



**NILAI KROMATIK DAN KAJIAN PEWARNAAN TOTAL  $r$ -DINAMIS PADA  
BEBERAPA GRAF KHUSUS**

**SKRIPSI**

Oleh

**Fahmi Hidayatul Azizah**

**NIM 121810101006**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER  
2016**



**NILAI KROMATIK DAN KAJIAN PEWARNAAN TOTAL  $r$ -DINAMIS PADA  
BEBERAPA GRAF KHUSUS**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat  
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)  
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Fahmi Hidayatul Azizah**

**NIM 121810101006**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2016**

## PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A,W, kupersembahkan skripsi ini sebagai kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terimakasihku kepada :

1. Orang tuaku tercinta Bapakku Achmad Suheri dan Ibuku Suwarni serta Kakak-kakakku Mas Iqbal Azhar Firdausy dan Mbak Iffatussofi Fauziah yang telah memberikan rasa cinta dan kasih sayangnya serta dukungan moril, materil dan doa yang tidak pernah berhenti untuk meraih cita-cita;
2. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., Bu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., dan Bapak Kusbudiono S.Si., M.Si. yang dengan sabar tulus dan ikhlas membimbing sehingga skripsi ini terselesaikan;
3. guru dan dosen-dosenku yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi duka maupun suka, dan selalu memberikan semangat;
5. teman-teman BATHIC'S 2012 yang telah menorehkan pengalaman tak terlupakan;
6. Alamamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

**MOTTO**

”... Sesungguhnya Allah tidak akan merubah keadaan suatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada mereka sendiri...”

(Q.S Ar-ra'du:11)

”Kegagalan hanya terjadi bila kita menyerah.”

Lessing

**PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

nama : Fahmi Hidayatul Azizah

NIM : 121810101006

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Nilai Kromatik dan Kajian Pewarnaan Total  $r$ -dinamis pada Beberapa Graf Khusus" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Fahmi Hidayatul Azizah

NIM 121810101006

**SKRIPSI**

**NILAI KROMATIK DAN KAJIAN PEWARNAAN TOTAL  $r$ -DINAMIS PADA  
BEBERAPA GRAF KHUSUS**

Oleh

Fahmi Hidayatul Azizah  
NIM 121810101006

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama : Kusbudiono, S.Si., M.Si.  
Dosen Pembimbing Anggota : Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

**PENGESAHAN**

Skripsi berjudul "Nilai Kromatik dan Kajian Pewarnaan Total  $r$ -dinamis pada Beberapa Graf Khusus" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

**Tim Penguji:**

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota

Kusbudiono, S.Si., M.Si.

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

NIP. 197704302005011001

NIP. 198408012008012006

Dosen Penguji I,

Dosen Penguji II,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Drs. Rusli Hidayat, M.Sc.

NIP. 196808021993031004

NIP. 196610121993031001

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

## RINGKASAN

**Nilai Kromatik dan Kajian Pewarnaan Total  $r$ -Dinamis pada Beberapa Graf Khusus;** Fahmi Hidayatul Azizah, 121810101006; 2016: 80 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf (*graph theory*) banyak digunakan sebagai alat bantu untuk mempermudah dan menyelesaikan suatu persoalan dalam kehidupan sehari-hari. Teori graf juga banyak diperlukan dalam menyelesaikan masalah dalam beberapa bidang ilmu lainnya misalnya digunakan untuk mencari jalur terpendek, masalah yang ada dalam sistem transportasi, ilmu komputer, sistem pemerintahan, sistem jaringan informasi dan lain sebagainya. Terdapat banyak topik yang dipelajari dalam teori graf, salah satunya adalah tentang pewarnaan dinamis graf. Pewarnaan  $k$ -warna dinamis pada suatu graf  $G$  adalah pewarnaan titik sebanyak  $k$  warna dimana titik yang berderajat minimum 2 memiliki dua warna yang berbeda dengan titik ketetanggannya. Nilai  $k$  warna dinamis yang digunakan disebut dengan bilangan kromatis dinamis dan disimbolkan dengan  $\chi_r$ .

Pewarnaan titik  $k$ -warna dinamis kemudian digeneralisasikan menjadi pewarnaan titik  $r$ -dinamis dan mengalami perkembangan yaitu menjadi pewarnaan sisi  $r$ -dinamis. Kemudian dari pewarnaan titik  $r$ -dinamis dan pewarnaan sisi  $r$ -dinamis kembali mengalami perkembangan yaitu menjadi pewarnaan total  $r$ -dinamis yang telah disesuaikan dengan kondisi atau syarat pada pewarnaan total  $r$ -dinamis. Pewarnaan total  $r$ -dinamis pada graf  $G$  adalah pemetaan  $c : V(G) \cup E(G)$  ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi  $|c(N(u))| \geq \min\{r, d(u) + N(u)\}$  dan  $|c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v)\}$ . Bilangan kromatik dari pewarnaan total  $r$ -dinamis adalah banyaknya nilai  $k$  minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai graf  $G$ , dan dinotasikan dengan  $\chi_r(G)$ .

Pewarnaan total  $r$ -dinamis dapat pada beberapa graf khusus diantaranya adalah



graf Bintang (*Star Graph*)  $S_n, n \geq 3$ , *Banana Tree Graph*  $B_{n,4}, n \geq 3$ , *Triangular Ladder Graph*  $TL_n, n \geq 2$ , graf Tangga *Ladder Graph*  $L_n \geq 2$ , graf Tangga Tiga Siklus (*Triangular Cycle Ladder Graph*)  $TCL_n, n \geq 2$  dan *Diamond Ladder Graph*  $DL_n, n \geq 2$ . Penelitian ini dikategorikan sebagai penelitian eksploratif dan menggunakan metode pendeteksian pola. Tujuan penelitian ini adalah menentukan nilai kromatik total dari beberapa graf khusus dan dihasilkan 6 teorema baru, diantaranya adalah:

1. **Teorema 4.1.1** Untuk  $n \geq 2$  bilangan kromatik total  $r$ -dinamis pada graf  $TCL_n$  adalah:

$$\chi''(TCL_n) = \chi''_d(TCL_n) = \chi''_3(TCL_n) = 7$$

$$\chi''_4(TCL_n) = 8$$

$$\chi''_5(TCL_n) = 9$$

$$\chi''_6(TCL_n) = 11$$

$$\chi''_7(TCL_n) = 14$$

$$\chi''_8(TCL_n) = 15$$

$$\chi''_9(TCL_n) = 18$$

$$\chi''_r(TCL_n) = 19, r \geq 10$$

2. **Teorema 4.1.2** Untuk  $n \geq 2$  bilangan kromatik total  $r$ -dinamis pada graf  $DL_n$

adalah:

$$\chi''(DL_n) = \chi''_d(DL_n) = \chi''_3(DL_n) = 6$$

$$\chi''_4(DL_n) = 7$$

$$\chi''_5(DL_n) = 8$$

$$\chi''_6(DL_n) = 10$$

$$\chi''_7(DL_n) = 11$$

$$\chi''_8(DL_n) = 14$$

$$\chi''_9(DL_n) = 16$$

$$\chi''_r(DL_n) = 17, r \geq 10$$

3. **Teorema 4.1.3** Untuk  $n \geq 2$  bilangan kromatik total  $r$ -dinamis pada graf  $TL_n$  adalah:

$$\chi''(TL_n) = \chi''_d(TL_n) = \chi''_3(TL_n) = 5$$

$$\chi''_4(TL_n) = 6$$

$$\chi''_5(TL_n) = 8$$

$$\chi''_6(TL_n) = 10$$

$$\chi''_7(TL_n) = 12$$

$$\chi''_r(TL_n) = 14, r \geq 8$$

4. **Teorema 4.1.4** Untuk  $n \geq 2$  bilangan kromatik total  $r$ -dinamis pada graf  $L_n$  adalah:

$$\chi''(L_n) = \chi''_d(L_n) = \chi''_3(L_n) = 4$$

$$\chi''_4(L_n) = 7$$

$$\chi''_5(L_n) = 8$$

$$\chi''_r(L_n) = 10, r \geq 6$$

5. **Teorema 4.1.5** Untuk  $n \geq 3$  bilangan kromatik total  $r$ -dinamis pada graf  $S_n$  adalah:

$$\chi''(S_n) = \chi''_d(S_n) = \chi''_3(S_n)$$

$$\chi''_r(S_n) = r + 1, r \geq 3.$$

6. **Teorema 4.1.6** Untuk  $n \geq 3$  bilangan kromatik total  $r$ -dinamis pada graf  $B_{n,4}$  adalah:

$$\chi''(B_{n,4}) = \chi''_d(B_{n,4}) = \chi''_3(B_{n,4})$$

$$\chi''_r(B_{n,4}) = n + r - 1, r \geq 3$$

## PRAKATA

Puji syukur kehadiran Tuhan Yang Maha Esa atas segala kuasa-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul "Nilai Kromatik dan Kajian Pewarnaan Total  $r$ -dinamis pada Beberapa Graf Khusus". Penulisan tugas akhir ini dilakukan guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Pada kesempatan ini, dengan segala hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si.. selaku dosen pembimbing utama dan Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing anggota;
2. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. dan Drs. Rusli Hidayat, M.Sc. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun;
3. Dosen dan Karyawan jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. teman-teman Bathics12 yang selalu setia memberikan dukungan;
5. serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis berharap kritik dan saran demi kesempurnaan penelitian selanjutnya. Semoga tugas ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jember, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>PERSEMBAHAN</b> .....	ii
<b>MOTTO</b> .....	iii
<b>PERNYATAAN</b> .....	iv
<b>HALAMAN PEMBIMBING</b> .....	v
<b>PENGESAHAN</b> .....	vi
<b>RINGKASAN</b> .....	vii
<b>PRAKATA</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiv
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xvii
<b>BAB 1. PENDAHULUAN</b> .....	1
<b>1.1 Latar Belakang</b> .....	1
<b>1.2 Rumusan Masalah</b> .....	2
<b>1.3 Tujuan Penelitian</b> .....	2
<b>1.4 Manfaat Penelitian</b> .....	2
<b>BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	4
<b>2.1 Terminologi Graf</b> .....	4
<b>2.2 Pewarnaan Graf</b> .....	6
2.2.1 Pewarnaan Titik ( <i>Vertex Coloring</i> ) .....	6
2.2.2 Pewarnaan Sisi ( <i>Edge Coloring</i> ).....	7
<b>2.3 Pewarnaan <math>r</math>-Dinamis</b> .....	7
2.3.1 Pewarnaan Titik $r$ -Dinamis .....	7

2.3.2	Pewarnaan Sisi $r$ -Dinamis .....	8
2.3.3	Pewarnaan Total $r$ -Dinamis .....	9
2.4	Graf-Graf Khusus .....	10
<b>BAB 3.</b>	<b>METODE PENELITIAN .....</b>	<b>12</b>
3.1	Jenis dan Data Penelitian .....	12
3.2	Rancangan Penelitian .....	12
<b>BAB 4.</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN .....</b>	<b>14</b>
4.1	Bilangan Kromatik dan Fungsi Pewarnaan Total $r$ -Dinamis.....	14
<b>BAB 5.</b>	<b>PENUTUP .....</b>	<b>87</b>
5.1	Kesimpulan .....	87
5.2	Saran .....	89
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>.....</b>	<b>90</b>

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Graf $G$ .....	4
2.2 Graf dengan sisi rangkap dan <i>loop</i> .....	5
2.3 $G_1$ adalah graf dan $G_2$ adalah multigraf .....	5
2.4 Pewarnaan titik .....	7
2.5 Pewarnaan sisi .....	7
3.1 Skema rancangan penelitian .....	13
4.1 Pewarnaan total $TCL_4$ dengan 10 warna .....	19
4.2 Pewarnaan total $TCL_4$ dengan 12 warna .....	21
4.3 Pewarnaan total $TCL_4$ dengan 13 warna .....	21
4.4 Pewarnaan total $TCL_4$ dengan 16 warna .....	25
4.5 Pewarnaan total $TCL_4$ dengan 17 warna .....	25
4.6 Pewarnaan total 3–dinamis pada $TCL_4$ .....	29
4.7 Pewarnaan total 4–dinamis pada $TCL_4$ .....	29
4.8 Pewarnaan total 5–dinamis pada $TCL_4$ .....	29
4.9 Pewarnaan total 6–dinamis pada $TCL_4$ .....	29
4.10 Pewarnaan total 7–dinamis pada $TCL_4$ .....	30
4.11 Pewarnaan total 8–dinamis pada $TCL_4$ .....	30
4.12 Pewarnaan total 9–dinamis pada $TCL_4$ .....	30
4.13 Pewarnaan total $r$ –dinamis $r \geq 10$ pada $TCL_4$ .....	30
4.14 Pewarnaan total $DL_4$ dengan 9 warna .....	38
4.15 Pewarnaan total $DL_4$ dengan 12 warna .....	42
4.16 Pewarnaan total $DL_4$ dengan 13 warna .....	42
4.17 Pewarnaan total $DL_4$ dengan 15 warna .....	44
4.18 Pewarnaan total 3–dinamis pada $DL_4$ .....	48

4.19	Pewarnaan total 4–dinamis pada $DL_4$ .....	48
4.20	Pewarnaan total 5–dinamis pada $DL_4$ .....	49
4.21	Pewarnaan total 6–dinamis pada $DL_4$ .....	49
4.22	Pewarnaan total 7–dinamis pada $DL_4$ .....	49
4.23	Pewarnaan total 8–dinamis pada $DL_4$ .....	49
4.24	Pewarnaan total 9–dinamis pada $DL_4$ .....	50
4.25	Pewarnaan total $r$ –dinamis $r \geq 10$ pada $DL_4$ .....	50
4.26	Pewarnaan total $TL_4$ dengan 7 warna .....	56
4.27	Pewarnaan total $TL_4$ dengan 9 warna .....	57
4.28	Pewarnaan total $TL_4$ dengan 11 warna .....	59
4.29	Pewarnaan total $TL_4$ dengan 13 warna .....	61
4.30	Pewarnaan total 3–dinamis pada $TL_4$ .....	63
4.31	Pewarnaan total 4–dinamis pada $TL_4$ .....	63
4.32	Pewarnaan total 5–dinamis pada $TL_4$ .....	63
4.33	Pewarnaan total 6–dinamis pada $TL_4$ .....	64
4.34	Pewarnaan total 7–dinamis pada $TL_4$ .....	64
4.35	Pewarnaan total $r$ –dinamis $r \geq 8$ pada $TL_4$ .....	64
4.36	Pewarnaan total $L_4$ dengan 5 warna.....	68
4.37	Pewarnaan total $L_4$ dengan 6 warna.....	68
4.38	Pewarnaan total $L_4$ dengan 9 warna.....	71
4.39	Pewarnaan total 3–dinamis pada $L_4$ .....	72
4.40	Pewarnaan total 4–dinamis pada $L_4$ .....	73
4.41	Pewarnaan total 5–dinamis pada $L_4$ .....	73
4.42	Pewarnaan total $r$ –dinamis $r \geq 6$ pada $L_4$ .....	73
4.43	Pewarnaan total $r$ –dinamis $1 \leq r \leq n$ pada $S_8$ .....	77
4.44	Pewarnaan total $r$ –dinamis $r \geq 2n$ pada $S_8$ .....	77
4.45	Pewarnaan total 3–dinamis pada $B_{3,4}$ .....	84



4.46 Pewarnaan total 4–dinamis pada $B_{3,4}$ .....	84
4.47 Pewarnaan total 5–dinamis pada $B_{3,4}$ .....	85
4.48 Pewarnaan total 6–dinamis pada $B_{3,4}$ .....	85



DAFTAR TABEL

	Halaman
4.1 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $x_i$ pada $TCL_4$ dengan $r \geq 10$ .....	31
4.2 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $y_i$ pada $TCL_4$ dengan $r \geq 10$ .....	31
4.3 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $z_i$ pada $TCL_4$ dengan $r \geq 10$ .....	31
4.4 Pewarnaan sisi $r$ -dinamis pada $TCL_4$ dengan $r \geq 10$ .....	32
4.5 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $x_i$ pada $DL_4$ dengan $r \geq 10$ .....	50
4.6 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $y_i$ pada $DL_4$ dengan $r \geq 10$ .....	50
4.7 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $z_i$ pada $DL_4$ dengan $r \geq 10$ .....	51
4.8 Pewarnaan sisi $r$ -dinamis pada $DL_4$ dengan $r \geq 10$ .....	52
4.9 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $x_i$ pada $TL_4$ dengan $r \geq 8$ .....	65
4.10 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $y_i$ pada $TL_4$ dengan $r \geq 8$ .....	65
4.11 Pewarnaan sisi $r$ -dinamis pada $TL_4$ dengan $r \geq 8$ .....	65
4.12 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $x_i$ pada $L_4$ dengan $r \geq 6$ .....	74
4.13 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $y_i$ pada $L_4$ dengan $r \geq 6$ .....	74
4.14 Pewarnaan sisi $r$ -dinamis pada $L_4$ dengan $r \geq 6$ .....	74
4.15 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $x_i$ pada $S_3$ dengan $r \geq 6$ .....	78
4.16 Pewarnaan sisi $r$ -dinamis pada $S_3$ dengan $r \geq 6$ .....	78
4.17 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $A$ pada $B_{3,4}$ dengan $r \geq 2n$ .....	85
4.18 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $x_i$ pada $B_{3,4}$ dengan $r \geq 2n$ .....	85
4.19 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $y_i$ pada $B_{3,4}$ dengan $r \geq 2n$ .....	86
4.20 Pewarnaan titik $r$ -dinamis $z_i$ pada $B_{3,4}$ dengan $r \geq 2n$ .....	86
4.21 Pewarnaan sisi $r$ -dinamis pada $B_{3,4}$ dengan $r \geq 2n$ .....	86

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Ilmu matematika merupakan ilmu yang bersifat *universal*, terdapat banyak bidang yang dipelajari dalam matematika, salah satunya teori graf. Teori graf (*graph theory*) banyak digunakan sebagai alat bantu untuk mempermudah dan menyelesaikan suatu persoalan dalam kehidupan sehari-hari. Teori graf juga banyak diperlukan dalam menyelesaikan masalah dalam beberapa bidang ilmu lainnya misalnya digunakan untuk mencari jalur terpendek, masalah yang ada dalam sistem transportasi, ilmu komputer, sistem pemerintahan, sistem jaringan informasi dan lain sebagainya.

Tahun 1959 Sir. W.R Hamilton menawarkan sebuah permainan teka-teki ke pabrik mainan di Dublin. Permainan tersebut terbuat dari kayu berbentuk dodecahedron beraturan yakni berupa benda yang disusun oleh 12 pentagonal dan mempunyai 20 titik sudut. Tiap titik sudut dari dodecahedron tersebut dipasangkan dengan sebuah kota terkenal seperti London, New York, Paris, dan lain-lain. Permainan yang dilakukan adalah dengan cara membentuk perjalanan keliling dunia yang dapat mengunjungi setiap kota yang ada tepat satu kali dan kembali ke kota asal.

Terdapat banyak topik yang dipelajari dalam teori graf, seperti SEATL, SHATL (*covering*), *Rainbow Connection*, *Dominating Set*, *Matrix Dimension*, *Partition Dimension* dan  $r$ -dinamis.  $r$ -dinamis dibagi menjadi tiga macam, yakni  $r$ -dinamis titik,  $r$ -dinamis sisi dan  $r$ -dinamis total.

Penelitian pewarnaan dinamis suatu graf yang dilakukan sebelumnya merupakan pewarnaan dinamis untuk titik dan sisi pada suatu graf. Penelitian untuk pewarnaan dinamis antara lain, M. Alishasi (2011) meneliti tentang pewarnaan dinamis pada graf dan hipergraf. S. Kim, dkk (2013) meneliti tentang pewarnaan dinamis pada graf planar. Irwanto dan Dafik (2014) meneliti tentang tantangan bilangan kromatik pada graf roda  $W_n$  untuk  $n \geq 5$ , graf helm  $F_n$  untuk  $n \geq 4$ , graf anti prisma  $H_m$  untuk  $m \geq 4$ , graf

prisma  $H_n$  untuk  $n \geq 4$  dan graf kipas  $F_n$  untuk  $n \geq 4$ . Wulandari (2015) meneliti pewarnaan  $r$ -dinamis titik pada hasil operasi graf khusus. Meganingtyas melakukan penelitian pada tahun 2016 yang meneliti pewarnaan titik dan sisi  $r$ -dinamis pada graf-graf khusus dan operasinya.

Berdasarkan uraian tersebut, dapat dilihat bahwa belum ada peneliti yang tertarik untuk meneliti pewarnaan total  $r$ -dinamis. Oleh karena itu, maka penulis akan meneliti lebih lanjut tentang pewarnaan total  $r$ -dinamis pada graf-graf khusus. Dalam penelitian ini akan ditentukan warna seminimum mungkin yang digunakan dalam pewarnaan pada graf sehingga akan didapatkan bilangan kromatik  $r$ -dinamis.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana nilai kromatik pewarnaan total  $r$ -dinamis pada graf Bintang (*Star Graph*)  $(S_n), n \geq 3$ , *Banana Tree Graph*  $(B_{n,4}), n \geq 3$ , *Triangular Ladder Graph*  $(TL_n), n \geq 2$ , graf Tangga (*Ladder Graph*)  $(L_n), n \geq 2$ , graf Tangga Tiga Siklus *Triangular Cycle Ladder Graph*  $(TCL_n), n \geq 2$  dan *Diamond Ladder Graph*  $(DL_n), n \geq 2$ ?

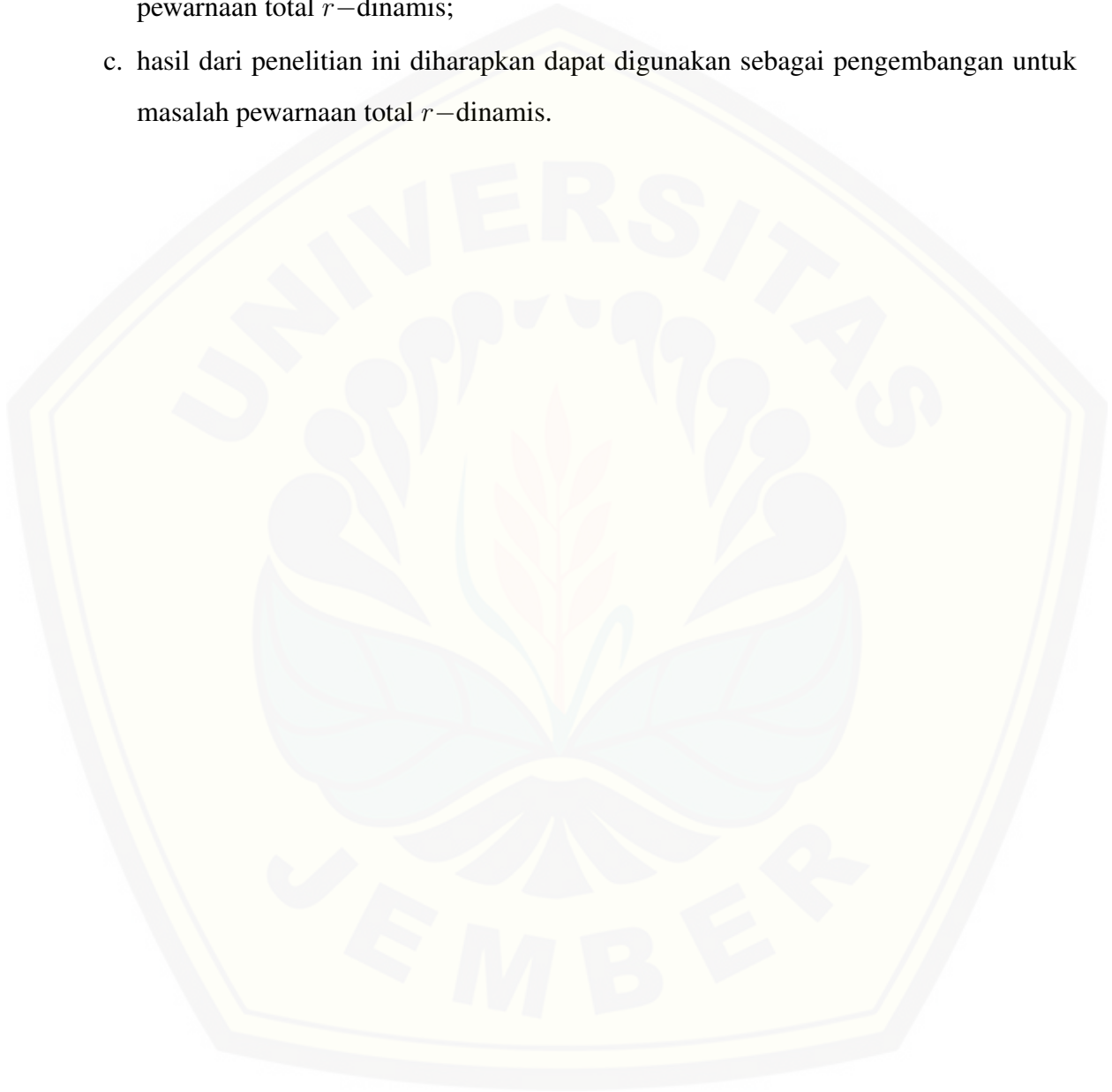
## 1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penelitian ini menentukan nilai kromatik pewarnaan total  $r$ -dinamis pada graf Bintang (*Star Graph*)  $(S_n), n \geq 3$ , *Banana Tree Graph*  $(B_{n,4}), n \geq 3$ , *Triangular Ladder Graph*  $(TL_n), n \geq 2$ , graf Tangga *Ladder Graph*  $(L_n), n \geq 2$ , graf Tangga Tiga Siklus (*Triangular Cycle Ladder Graph*)  $(TCL_n), n \geq 2$  dan *Diamond Ladder Graph*  $(DL_n), n \geq 2$ .

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan oleh peneliti antara lain:

- a. meningkatkan pengetahuan baru tentang pewarnaan total;
- b. memberikan dorongan kepada peneliti lain untuk memperluas penelitian tentang pewarnaan total  $r$ -dinamis;
- c. hasil dari penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan untuk masalah pewarnaan total  $r$ -dinamis.



## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Terminologi Graf

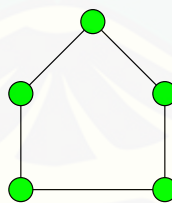
Graf  $G$  adalah pasangan himpunan dari  $(V, E)$  dengan  $V$  adalah himpunan tidak kosong dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan  $E$  adalah himpunan pasangan yang boleh kosong dari titik-titik yang berbeda di  $G$  yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$  dan himpunan sisi dinotasikan dengan  $E(G)$ . Sedangkan banyaknya unsur yang berada di  $V$  disebut *order* dari  $G$ , dilambangkan dengan  $p(G)$  dan banyaknya unsur di  $E$  disebut *size* dari  $G$ , dilambangkan dengan  $q(G)$  (Chartrand dan Lesniak, 1996).

Misalkan graf  $G$  yang memuat himpunan titik  $V$  dan himpunan sisi  $E$  seperti berikut:

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, e), (d, e)\}$$

Graf tersebut dapat digambar sebagai berikut :

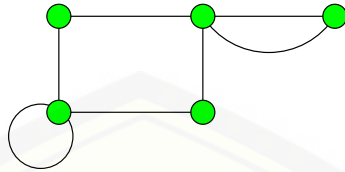


Gambar 2.1 Graf  $G$

Graf  $G$  mempunyai 5 titik sehingga *order*  $G$  adalah  $p = 5$ , dan mempunyai 5 sisi sehingga *size* graf  $G$  adalah  $q = 5$ .

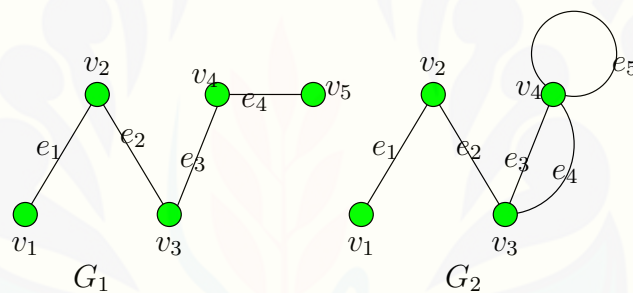
Dua sisi atau lebih yang terdapat pada suatu graf yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut sisi rangkap, sedangkan sisi yang menghubungkan sebuah titik ke dirinya sendiri disebut *loop* (Wilson, 1996). Agar lebih jelas dapat dilihat pada

Gambar 2.2



Gambar 2.2 Graf dengan sisi rangkap dan *loop*

Berdasarkan definisi tersebut, maka suatu graf sederhana tidak boleh mempunyai sisi rangkap (*multiple edges*) atau gelang (*loop*), sedangkan graf yang mempunyai sisi rangkap atau gelang disebut multigraf.



Gambar 2.3  $G_1$  adalah graf dan  $G_2$  adalah multigraf

Pada gambar 2.3  $G_1$  merupakan graf yang memuat himpunan titik  $V(G_1)$  dan sisi  $E(G_1)$  yaitu:

$$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E(G_1) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5)\}$$

Graf  $G_1$  mempunyai *order* 5 atau  $p = 5$  dan *size* 4 atau  $q = 4$ . Sedangkan graf  $G_2$  merupakan multigraf karena mempunyai sisi rangkap  $e_3, e_4$  dan *loop* dititik  $v_4$  yaitu  $e_5$ . Graf sederhana mempunyai jumlah titik  $n$  terbatas yang diebut dengan graf berhingga. Suatu graf  $G$  dikatakan sederhana apabila graf  $G$  tersebut tidak mempunyai orientasi arah pada sisi-sisinya.

Suatu sisi  $e = (u, v)$  dapat dikatakan menghubungkan titik  $u$  dan  $v$ , apabila  $e = (u, v)$  adalah sisi suatu graf  $G$ , maka  $u$  bertetangga/ berdampingan/ berdekatan (*adjacent*) dengan  $v$ . Himpunan dari  $u$  dinotasikan dengan  $N(u)$ . Sedangkan untuk sebuah sisi  $e$  yang menghubungkan titik  $u$  dan  $v$  disebut beririsan/ bertemu (*incident*) dengan titik  $u$  dan  $v$ .

Banyaknya titik yang bertetangga dengan suatu titik  $v$  pada suatu graf  $G$  disebut derajat dari titik  $v$  (Slamin, 2009). Suatu titik  $v$  mempunyai derajat 0 atau tidak mempunyai tetangga disebut titik terasing, untuk titik  $v$  berderajat 1 disebut titik ujung atau daun. Sedangkan untuk titik dari suatu graf  $G$  yang mempunyai tetangga sama maka graf  $G$  disebut sebagai graf reguler atau graf teratur. Titik dengan derajat genap sering disebut titik genap (*even vertices*) dan titik dengan derajat ganjil disebut titik ganjil (*odd vertices*). Suatu graf dikatakan terhubung apabila setiap pasang titik  $v_i$  dan  $v_j$  dalam himpunan  $V$  terdapat lintasan dari  $v_i$  ke  $v_j$ . Graf dengan satu titik pusat disebut graf terhubung karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri.

## 2.2 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf merupakan suatu bentuk pelabelan pada graf dengan cara memberikan warna pada elemen graf. Terdapat tiga macam pewarnaan pada graf, yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan wilayah (*region coloring*).

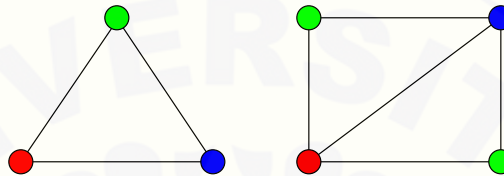
### 2.2.1 Pewarnaan Titik (*Vertex Coloring*)

Pewarnaan titik pada graf  $G$  merupakan suatu pewarnaan dengan cara memberikan warna yang berbeda di setiap titik pada suatu graf  $G$  yang bertetangga sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Menurut Chartrand dan Zhang (2009) pewarnaan titik pada suatu graf  $G$  merupakan pemberian warna yang berbeda pada setiap titik yang bertetangga. Pewarnaan titik menggunakan bilangan kromatik, yaitu banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk memberi



warna di setiap titik pada graf  $G$ .

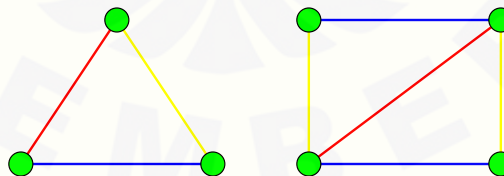
Apabila suatu graf  $G$  mempunyai pewarnaan titik- $k$ , maka dapat dikatakan titik pada graf  $G$  diwarnai dengan  $k$  warna. Bilangan bulat positif  $k$  yang paling minimum untuk mewarnai titik pada graf  $G$  disebut dengan bilangan kromatik. Suatu bilangan kromatik dari graf  $G$  disimbolkan dengan  $\chi(G)$ . Pewarnaan titik dapat dilihat pada Gambar 2.4



Gambar 2.4 Pewarnaan titik

### 2.2.2 Pewarnaan Sisi (*Edge Coloring*)

Sebuah pewarnaan sisi pada Graf  $G$  merupakan pewarnaan semua sisi pada graf  $G$  sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda (Budayasa, 2012). Apabila graf  $G$  mempunyai pewarnaan sisi- $k$ , maka dapat dikatakan sisi pada graf  $G$  diwarnai dengan  $k$  warna dan bilangan bulat positif  $k$  yang paling minimum untuk mewarnai sisi pada graf  $G$  disebut sebagai bilangan kromatik. Suatu bilangan kromatik ini dinotasikan dengan  $\lambda(G)$ . Pewarnaan sisi dapat dilihat pada Gambar 2.5



Gambar 2.5 Pewarnaan sisi

## 2.3 Pewarnaan $r$ -Dinamis

### 2.3.1 Pewarnaan Titik $r$ -Dinamis

Pewarnaan titik  $r$ -dinamis adalah sebuah penentuan warna pada titik sebuah graf dengan syarat titik yang berdekatan tidak boleh mempunyai warna yang sama.

Bilangan untuk jumlah minimum warna yang digunakan untuk pewarnaan sisi dalam sebuah graf disebut bilangan kromatik dan dinotasikan dengan  $\chi_r(G)$ . Untuk bilangan kromatik pada pewarnaan titik 1–dinamis dinotasikan dengan  $\chi(G)$ , sedangkan untuk bilangan kromatik pada pewarnaan titik 2–dinamis dinotasikan dengan  $\chi_d(G)$ . Pewarnaan titik  $r$ –dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan  $k$ –warna dinamis dengan cara menggeneralisasikan konsep pewarnaan dinamis. Pengertian dari pewarnaan titik  $r$ –dinamis dapat dilihat pada definisi berikut.

**Definisi 2.3.1.** *Pewarnaan titik  $r$ -dinamis suatu graf  $G$  didefinisikan sebagai pemetaan  $c$  dari  $V$  ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi sebagai berikut:*

1. jika  $uv \in E(G)$ , maka  $c(u) \neq c(v)$ , dan
2.  $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$

(Lai dan Montgomery, 2002)

### 2.3.2 Pewarnaan Sisi $r$ –Dinamis

Pewarnaan sisi  $r$ -dinamis adalah sebuah penentuan warna pada sisi sebuah graf dengan syarat sisi yang berdekatan tidak boleh mempunyai warna yang sama. Bilangan untuk jumlah minimum warna yang digunakan dalam sebuah graf disebut bilangan kromatik dan dinotasikan dengan  $\lambda_r(G)$ . Untuk bilangan kromatik pada pewarnaan titik 1–dinamis dinotasikan dengan  $\lambda(G)$ , sedangkan untuk bilangan kromatik pada pewarnaan titik 2–dinamis dinotasikan dengan  $\lambda_d(G)$ . Pewarnaan sisi  $r$ –dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan  $k$ –warna dinamis dengan cara menggeneralisasikan konsep pewarnaan dinamis. Pengertian dari pewarnaan sisi  $r$ –dinamis dapat dilihat pada definisi berikut.

Pewarnaan sisi  $r$ –dinamis ini adalah suatu pengembangan dari pewarnaan  $r$ –dinamis titik dengan kondisi atau syarat-syarat yang telah disesuaikan.

**Definisi 2.3.2.** *Pewarnaan sisi  $r$ -dinamis suatu graf  $G$  didefinisikan sebagai pemetaan  $c$  dari  $E$  ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi sebagai berikut:*

1. *jika  $e_1 = uv, e_2 = vw \in E(G)$ , maka  $c(e_1) \neq c(e_2)$ , dan*
2.  *$\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min\{r, d(v) + d(u) - 2\}$*

(Dafik dan Meganingtyas, 2015)

### 2.3.3 Pewarnaan Total $r$ -Dinamis

Pewarnaan total  $r$ -dinamis adalah sebuah penentuan warna pada sisi dan titik yang menggabungkan dua metode pewarnaan  $r$ -dinamis yaitu pewarnaan  $r$ -dinamis titik dan pewarnaan  $r$ -dinamis sisi, dengan syarat warna yang diberikan kepada titik dan sisi dalam suatu graf tidak boleh mempunyai warna yang sama dengan sisi dan titik yang berada didekatnya atau bertetangga dan tetap memprioritaskan jumlah pewarnaan yang digunakan pada sisi dan titik yang disebut bilangan kromatik dan dinotasikan dengan  $\chi''(G)$ . Untuk bilangan kromatik pada pewarnaan total 1-dinamis dinotasikan dengan  $\chi''(G)$ , sedangkan untuk bilangan kromatik pada pewarnaan total 2-dinamis dinotasikan dengan  $\chi''_d(G)$ .

**Konjektur 2.3.1.** *Pewarnaan total harus memenuhi  $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ , dimana  $\Delta(G)$  adalah derajat maksimum dari graf  $G$ . Menurut Behzad dan Vizing, bilangan kromatik total untuk setiap graf  $G$  harus memenuhi  $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$ . (Geetha et al.)*

Pewarnaan total dari graf  $G$  dapat dianggap sebagai fungsi pemetaan  $c : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  dimana  $\{1, 2, \dots, k\}$  adalah himpunan yang memenuhi kondisi berikut:

1. *jika  $u, v \in V(G)$ , maka  $c(u) \neq c(v)$*
2. *jika  $e, e' \in E(G)$ , maka  $c(e) \neq c(e')$*

3.  $c(v) \neq c(e)$ , untuk setiap titik  $v \in V(G)$  dan sembarang sisi  $e \in E(G)$  yang bersisian di titik  $v$ . (Kowalik *et al.*, 2008)

Pewarnaan total dapat dikatakan sebagai pewarnaan total  $r$ -dinamis jika memenuhi kondisi sebagai berikut :

- a. untuk warna titik:  $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v) + |N(v)|\}$ , dan
- b. untuk warna sisi:  $\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min\{r, d(u) + d(v)\}$

#### 2.4 Graf-Graf Khusus

Graf khusus adalah sebuah graf dengan karakteristik dan keunikan yang dimilikinya. Keunikan yang dimiliki oleh graf khusus tersebut adalah tidak isomorfis dengan graf yang lainnya, serta karakteristik yang dimiliki graf khusus tersebut adalah bentuknya yang dapat memperluas *order*  $n$  tetapi tetap simetris. Suatu graf dikatakan isomorfis dengan graf lainnya, apabila terdapat korespondensi satu-satu antara keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga jika sisi  $e$  bersisian dengan *vertex*  $u$  dan  $v$  disuatu graf  $G_1$ , maka sisi  $e$  pada graf  $G_2$  juga harus bersisian dengan *vertex*  $u$  dan  $v$  di  $G_2$ . Dua graf dapat isomorfis apabila mempunyai  $V$  dan  $E$  yang sama. Graf-graf khusus diantaranya adalah:

Graf Lintasan (*Path Graph*) menurut Damayanti (2011) adalah graf sederhana yang terdiri atas satu lintasan yang dinotasikan sebagai  $P_n$  dimana  $n \geq 2$  yang terdiri dari  $n$  titik dan  $n - 1$  sisi.

Graf Siklus (*Cycle Graph*) adalah graf sederhana yang terdiri dari  $n$  titik dan setiap titiknya berderajat 2, serta memiliki jumlah sisi dan titik yang sama. Graf lingkaran dinotasikan dengan  $C_n$ , dimana  $n \geq 3$  (Purwanto dkk., 2006).

Graf Bintang (*Star Graph*) adalah graf yang terdiri dari satu titik pusat yang mempunyai derajat  $n$  dan mempunyai  $n + 1$  titik serta  $n$  sisi. Graf bintang dinotasikan dengan  $S_n$  dimana  $n \geq 3$ .

*Banana Tree Graph* dinotasikan dengan  $B_{n,m}$ , untuk  $B_{n,4}$  mempunyai himpunan

titik  $V(B_{n,4}) = \{A; A = 1\} \cup \{X_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Z_i; 1 \leq i \leq 2n\}$   
 dan himpunan sisi  $E(B_{n,4}) = \{AX_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{X_iY_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Y_iZ_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Y_iZ_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ , sehingga  $|V|B_{n,4} = 4n + 1$  dan  $|E|B_{n,4} = 4n$ .

*Triangular Ladder Graph* dinotasikan dengan  $TL_n$  mempunyai himpunan titik  $V(TL_n) = \{X_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{Y_i; 1 \leq i \leq n + 1\}$  dan himpunan sisi  $E(TL_n) = \{X_iX_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Y_iY_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{X_iY_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{X_iY_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ , sehingga  $|V|TL_n = 2n + 2$  dan  $|E|TL_n = 4n + 1$ .

Graf Tangga (*Ladder Graph*) dinotasikan dengan  $L_n$  mempunyai himpunan titik  $V(L_n) = \{X_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{Y_i; 1 \leq i \leq n + 1\}$  dan himpunan sisi  $E(L_n) = \{X_iX_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Y_iY_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{X_iY_i\}; 1 \leq i \leq n + 1\}$ , sehingga  $|V|L_n = 2n + 2$  dan  $|E|L_n = 3n + 1$ .

*Triangular Cycle Ladder Graph* atau graf tangga siklus segitiga dinotasikan dengan  $TCL_n$  dimana  $n \geq 2$  adalah graf dengan himpunan titik  $V(TCL_n) = \{X_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{Y_i; i \leq i \leq n + 1\} \cup \{Z_i; i \leq i \leq n\}$  dan himpunan sisi  $E(TCL_n) = \{X_iY_i; 1 \leq i \leq n + 1\} \cup \{Y_iY_{i+1}\}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{X_iZ_i\}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{X_{i+1}Z_i\}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Y_iZ_i\}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Y_{i+1}Z_i\}; 1 \leq i \leq n\}$ , sehingga  $|V|TCL_n = 3n + 2$  dan  $|E|TCL_n = 6n + 1$ .

*Diamond Ladder Graph* dinotasikan dengan  $DL_n$  mempunyai himpunan titik  $V(DL_n) = \{X_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Z_i; 1 \leq i \leq 2n\}$  dan himpunan sisi  $E(DL_n) = \{X_iX_{i+1}\}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{Y_iY_{i+1}\}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{X_iY_i\}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{X_iZ_{2i-1}\}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{X_iZ_{2i}\}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Y_iZ_{2i-1}\}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Y_iZ_{2i}\}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Z_{2i}Z_{2i+1}\}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ , sehingga  $|V|DL_n = 4n$  dan  $|E|DL_n = 8n - 3$ .

## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Jenis dan Data Penelitian

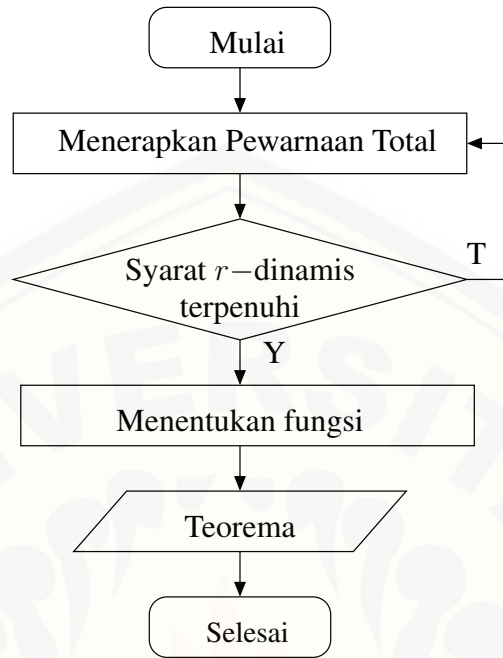
Penelitian ini dapat dikategorikan kedalam penelitian eksploratif. Penelitian eksploratif adalah penelitian yang bertujuan untuk memberikan definisi atau penjelasan hal baru yang belum dan ingin diketahui oleh peneliti, kemudian hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya. Penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola, yaitu dengan mencari pola pewarnaan total  $r$ -dinamis sehingga diperoleh bentuk umumnya.

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf-graf khusus, antara lain: graf Bintang (*Star Graph*) ( $S_n$ ),  $n \geq 3$ , *Banana Tree Graph* ( $B_{n,4}$ ),  $n \geq 3$ , *Triangular Ladder Graph* ( $TL_n$ ),  $n \geq 2$ , graf Tangga (*Ladder Graph*) ( $L_n$ ),  $n \geq 2$ , graf Tangga Tiga Siklus (*Triangular Cycle Ladder Graph*) ( $TCL_n$ ),  $n \geq 2$  dan *Diamond Ladder Graph* ( $DL_n$ ),  $n \geq 2$ .

### 3.2 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf khusus. Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut:

- menerapkan pewarnaan total  $r$ -dinamis pada graf-graf khusus yang telah ditentukan;
- memeriksa apakah syarat untuk  $r$ -dinamis total terpenuhi atau tidak, apabila belum terpenuhi maka akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menerapkan pewarnaan total pada graf;
- menentukan fungsi pewarnaan total  $r$ -dinamis;
- pewarnaan total  $r$ - dinamis yang telah didapatkan kemudian dibuktikan sehingga menjadi sebuah teorema.



Gambar 3.1 Skema rancangan penelitian

## BAB 5. PENUTUP

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab 4 sebelumnya, didapatkan bahwa pewarnaan total  $r$ -dinamis pada beberapa graf khusus diantaranya adalah graf Bintang (*Star Graph*) ( $S_n$ ),  $n \geq 3$ , *Banana Tree Graph* ( $B_{n,4}$ ),  $n \geq 3$ , *Triangular Ladder Graph* ( $TL_n$ ),  $n \geq 2$ , graf Tangga (*Ladder Graph*) ( $L_n$ ),  $n \geq 2$ , graf Tangga Tiga Siklus (*Triangular Cycle Ladder Graph*) ( $TCL_n$ ),  $n \geq 2$  dan *Diamond Ladder Graph* ( $DL_n$ ),  $n \geq 2$  dan didapatkan 6 teorema yang menunjukkan nilai kromatik dari graf-graf khusus, sebagai berikut:

Untuk *Triangular Cycle Ladder Graph* ( $TCL_n$ ) dengan  $n \geq 2$

$$\chi''(TCL_n) = \chi''_d(TCL_n) = \chi''_3(TCL_n) = 7$$

$$\chi''_4(TCL_n) = 8$$

$$\chi''_5(TCL_n) = 9$$

$$\chi''_6(TCL_n) = 11$$

$$\chi''_7(TCL_n) = 14$$

$$\chi''_8(TCL_n) = 15$$

$$\chi''_9(TCL_n) = 18$$

$$\chi''_r(TCL_n) = 19, r \geq 10$$



Untuk *Diamond Ladder Graph* ( $DL_n$ ) dengan  $n \geq 2$

$$\chi''(DL_n) = \chi''_d(DL_n) = \chi''_3(DL_n) = 6$$

$$\chi''_4(DL_n) = 7$$

$$\chi''_5(DL_n) = 8$$

$$\chi''_6(DL_n) = 10$$

$$\chi''_7(DL_n) = 11$$

$$\chi''_8(DL_n) = 14$$

$$\chi''_9(DL_n) = 16$$

$$\chi''_r(DL_n) = 17, r \geq 10$$

Untuk *Triangular Ladder Graph* ( $TL_n$ ) dengan  $n \geq 2$

$$\chi''(TL_n) = \chi''_d(TL_n) = \chi''_3(TL_n) = 5$$

$$\chi''_4(TL_n) = 6$$

$$\chi''_5(TL_n) = 8$$

$$\chi''_6(TL_n) = 10$$

$$\chi''_7(TL_n) = 12$$

$$\chi''_r(TL_n) = 14, r \geq 8$$

Untuk *Ladder Graph* ( $L_n$ ) dengan  $n \geq 2$

$$\chi''(L_n) = \chi''_d(L_n) = \chi''_3(L_n) = 4$$

$$\chi''_4(L_n) = 7$$

$$\chi''_5(L_n) = 8$$

$$\chi''_r(L_n) = 10, r \geq 6$$

Untuk Graf Bintang ( $S_n$ ) dengan  $n \geq 3$

$$\chi''(S_n) = \chi''_d(S_n) = \chi''_3(S_n)$$

$$\chi''_r(S_n) = r + 1, r \geq 3.$$

Untuk *Banana Tree Graph* ( $B_{n,4}$ ) dengan  $n \geq 3$

$$\chi''(B_{n,4}) = \chi''_d(B_{n,4}) = \chi''_3(B_{n,4})$$

$$\chi''_r(B_{n,4}) = n + r - 1, r \geq 3$$

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil dari penelitian mengenai pewarnaan total  $r$ -dinamis pada beberapa graf khusus. Graf khusus yang digunakan diantaranya adalah graf Bintang (*Star Graph*)  $S_n, n \geq 3$ , (*Banan Tree Graph*)  $B_{n,4}, n \geq 3$ , (*Triangular Ladder Graph*)  $TL_n, n \geq 2$ , graf Tangga (*Ladder Graph*)  $L_n \geq 2$ , graf Tangga Tiga Siklus (*Triangular Cycle Ladder Graph*)  $TCL_n, n \geq 2$  dan *Diamond Ladder Graph*  $DL_n, n \geq 2$  dan, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk dapat mengembangkan pewarnaan total  $r$ -dinamis pada graf-graf khusus lainnya dan pada operasi-operasi graf dari graf khusus yang telah ada, misalnya pada operasi *shackle*, *amalgamasi*, *joint* dan lain sebagainya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Alishasi, M. (2011). On The Dynamic Coloring. *Discrete Applied Mathematics* 159, pp 152-156.
- Amalia, Rica dan Darmaji. (2012). Dimensi Partisi pada Graf Serupa Roda dengan Penambahan Anting. *Jurnal Teknik Pomits*.1 (1): 1-6.
- Budayasa, K. (2007). *Teori Graf dan Aplikasinya*. Universitas Negeri Surabaya.
- Chartrand, G dan Lesniak, L. (1996). *Graphs and Digraphs Third Edition*. California: Chapman & Hall.
- Chartrand, G dan Zing, Ping. (2009). *Chromatic Graph Theory*. California: Chapman & Hall.
- Dafik dan Meganingtyas, D. (2015). On Edge  $r$ -Dynamic Coloring of Graphs. *Graph Master Workshop: UNEJ*.
- Dafik, Slamun, Eka, F., dan Sya'diyah, L. (2013). Super Antimagicness of Triangular Book and Diamond Ladder Graphs. *Proceeding of IICMA*.
- Damayanti, R.T. (2011). Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan. *CAUCHY*. 2 (1): 35-40.
- Geetha, J. dan Somasundaran, K. Tanpa Tahun. *Total Chromatic Number and Some Topological Indices*. Artikel (Tidak dipublikasikan). Departemene of Mathematics, Amrita Vishwa Vidyapeetham
- Harary. (2011). *Graph Theory*. New London: Wesley.
- Irwanto, J. dan Dafik. (2014). Pewarnaan Titik pada Graf Spesial dan Graf Operasinya. *Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematik*. 1 (1).
- Jeyanti, P. dan Maheswari, A.. (2015). One Modulo Three Mean Labeling Of Cycle Related Graphs. *International Journal Of Pure and Applied Mathematics*. 103 (4): 625-633.

Kim, S.J., Lee, S.J., dan Park, W.J. (2013). Dynamic Coloring and List Dynamic Coloring of Planar Graphs. *Discrete Applied Mathematics*. **161** (1): 2207-2212.

Kowalik, L., Sereni, J., dan Skrekovski, R. (2008). Total Coloring of Plane Graphs with Maximum Degree Nine. *Society for Industrial and Applied Mathematics*.

Lai, H., dan Montgomery, B. (2002). *Dynamic Coloring of Graphs*. Artikel (Tidak Dipublikasikan). Morgantown: West Virginia University.

Meganingtyas, D.E.W. (2015). *Analisis Pewarnaan  $r$ -Dinamis pada Graf Khusus*. Tidak diterbitkan. Tesis. Jember: Universitas Jember.

Montgomery, B. (2001). *Dynamic Coloring of Graph*. West Virginia University.

Munir, R. (2012). *Matematika Diskrit Revisi Kelima*. Bandung: Informatika.

Purwanto. (1998). *Matematika Diskritn*. Malang: IKIP Malang.

Slamin. (2009). *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*. Jember: Jember University Press.

Suryadi, D dan Priatna, N. (2008). *Pengetahuan Dasar Teori Graf*. Jakarta: t.p.

Wibisono, Samuel. (2008). *Matematika Diskrit*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Wilson, Robin J. (1996). *Introduction to Graphs Theory*. Edinburgh: Addison Wesley Longman Limited.

Wulandari, N.I. (2015). *Analisis  $r$ -Dynamic Vertex Coloring pada Hasil Operasi Graf Khusus*.