



**ANALISA PEWARNAAN TOTAL r -DINAMIS PADA
GRAF KHUSUS DAN GRAF HASIL OPERASI**

SKRIPSI

Oleh

Desi Febriani Putri

NIM 121810101077

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016**



**ANALISA PEWARNAAN TOTAL r -DINAMIS PADA
GRAF KHUSUS DAN GRAF HASIL OPERASI**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana
Sains

Oleh

Desi Febriani Putri

NIM 121810101077

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016**

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. keluarga besar saya, Bapak Salimin Hadi Santoso, S.Pd., Ibu Siti Fatimah, Bapak Sururi dan Ibu Liskanah, yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, kepercayaan dan senyuman yang selalu menguatkan saya di setiap perjalanan hidup;
2. saudara-saudara saya, Mas Doni, Mbak Vita, Riska dan Dimas, yang selalu memberikan dukungan pada saya;
3. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang senantiasa meluangkan waktu memberikan pengarahan dan bimbingan hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini;
4. Ibu Ika Hesti Agustin S.Si., selaku Dosen Penguji I dan Bapak Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
5. seluruh guru dan dosen beserta almamater sekolah, yang telah memberikan banyak ilmu dan suasana kekeluargaan di setiap masanya;
6. teman-teman angkatan Bathics'12, yang selalu memberikan dukungan dan motivasi, para wanita hebat (Ade, Rere, Anggun, Yuni, Dwindah, Wahyu, Ikfi, Vivie, Intan dan Ana) yang selalu menemani saat suka maupun duka, sahabat Ala-ala (Mas Nugroho, Mas Frenthis, Mas Dhani, Naufan, Dela, Yola, Mellisa, Wisnu) yang selalu bikin kehebohan saat ketemu;
7. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Allah meninggikan orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat."
(QS.Al – Mujadilah : 11)*)

"Orang kuat bukanlah orang yang mampu membanting lawannya, namun orang kuat adalah orang yang mampu mengendalikan dirinya ketika marah."
(HR.Bukhari – Muslim)**)

"Enjoy the little things in life, because one day you will look back, and realize they were the big things."
(TheVow)***)

*) Departemen Agama Republik Indonesia. 2004. *Al-Qur'an* dan Terjemahannya. Bandung. CV Penerbit J-ART.

***) <http://lafazhcenter.ga/uncategorized/metode-alfazh-revolusi-belajar-membaca-al-quran/>

****) <http://weheartit.com/>

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Desi Febriani Putri

NIM : 121810101077

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "Analisa Pewarnaan Total r -dinamis pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2016

Yang menyatakan,

Desi Febriani Putri

NIM. 121810101077

SKRIPSI

**ANALISA PEWARNAAN TOTAL r -DINAMIS PADA
GRAF KHUSUS DAN GRAF HASIL OPERASI**

Oleh

Desi Febriani Putri
NIM 121810101077

Dosen Pembimbing I : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
Dosen Pembimbing II : Kusbudiono, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Analisa Pewarnaan Total r -Dinamis Pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi" telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas
Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D
NIP.196808021993031004

Kusbudiono, S.Si., M.Si
NIP.197704302005011001

Anggota I,

Anggota II,

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si
NIP.198408012008012006

Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si
NIP.196906061998031001

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D.
NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Analisa Pewarnaan Total r -Dinamis pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi; Desi Febriani Putri, 121810101077; 2016: 118 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika diskrit yang sangat menarik untuk dikaji. Pewarnaan graf merupakan salah satu kajian dalam teori graf. Pewarnaan graf dibedakan menjadi tiga yaitu pewarnaan titik (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*) dan pewarnaan region atau wilayah. Pewarnaan graf mulai dikembangkan menjadi pewarnaan r -dinamis pada graf. Pewarnaan r -dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan k -warna dinamis yang diperkenalkan oleh Montgomery pada tahun 2002. Pewarnaan k -warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak k warna sedemikian hingga setiap titik berderajat minimum dua pada G setidaknya memiliki dua warna berbeda dengan titik-titik ketetanggaannya. Nilai k terkecil dimana graf G memiliki pewarnaan k -warna dinamis disebut sebagai bilangan kromatik dinamis, disimbolkan dengan $\chi(G)$.

Pewarnaan titik r -dinamis dikembangkan menjadi pewarnaan sisi r -dinamis yang disesuaikan dengan definisi atau syarat pada pewarnaan sisi r -dinamis pada graf. Selain itu, pewarnaan r -dinamis juga dikembangkan menjadi pewarnaan total r -dinamis pada graf. Pewarnaan total r -dinamis merupakan pewarnaan pada graf yang mewarnai titik dan sisi pada suatu graf. Pewarnaan total r -dinamis merupakan kajian baru dalam teori graf. Pada penelitian ini menghasilkan suatu definisi baru tentang pewarnaan total r -dinamis. Pewarnaan total r -dinamis pada suatu graf didefinisikan sebagai pemetaan fungsi c_i dari himpunan titik dan sisi ($V(G) \cup E(G)$) ke himpunan warna sedemikian hingga untuk setiap titik $v \in V(G)$ maka $|c(N(v))| \geq \min[r, d(v) + |N(v)|]$ dan untuk setiap sisi $e = uv \in E(G)$, $|c(N(e))| \geq \min[r, d(v) + d(u)]$. Penggunaan k -warna dinamis yang paling minimal disebut dengan bilangan kromatik total r -dinamis yang dinotasikan dengan $\chi''(G)$.

Pewarnaan total r -dinamis diterapkan pada graf khusus dan graf hasil operasi yaitu graf lintasan, graf grid, graf bintang, graf *cocktail party*, graf buku dan graf *friendship*. Adapun operasi yang digunakan pada penelitian ini adalah operasi *crown product*, *shackle* dan *generalized shackle*. Penelitian ini menggunakan metode pendeteksian pola dan metode deduktif aksiomatik. Adapun tujuan dari penulisan ini adalah untuk menentukan kardinalitas titik dan sisi, bilangan kromatik total r -dinamis beserta fungsi pewarnaan total r -dinamis pada graf lintasan (P_n), graf hasil operasi *crown product* graf lintasan ($P_n \odot P_2$), *shackle* graf grid ($shack(G_{3,3}, v, n)$), *shackle* graf bintang ($shack(S_5, v, n)$), *shackle* graf *cocktail party* ($shack(H_{2,2}, v, n)$), *shackle* graf buku ($shack(B_2, v, n)$), *generalized shackle* graf *friendship* ($gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$).

1. **Teorema 4.1.1** Misal G adalah suatu graf lintasan P_n . Untuk $n \geq 3$, bilangan kromatik total r -dinamis pada graf G adalah

$$\chi_r''(P_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 2 \\ 4, & \text{untuk } r = 3 \\ 5, & \text{untuk } r \geq 4 \end{cases}$$

2. **Teorema 4.1.2** Misal graf G adalah graf hasil operasi *crown product* dari graf lintasan. Untuk $n \geq 2$ dan $m = 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan total r -dinamis G graf $G = P_n \odot P_m = P_n \odot P_2$ adalah

Untuk $n = 2$:

$$\chi_r''(G = P_n \odot P_2) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 2 \\ r + 2, & \text{untuk } 3 \leq r \leq 4 \\ 7, & \text{untuk } r \geq 5 \end{cases}$$

Untuk $n \geq 3$:

$$\chi_r''(G = P_n \odot P_2) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ r + 2, & \text{untuk } 4 \leq r \leq 5 \\ 8, & \text{untuk } 6 \leq r \leq 7 \\ 9, & \text{untuk } r \geq 8 \end{cases}$$

3. **Teorema 4.1.3** Misal graf G adalah graf hasil operasi *shackle* dari graf grid $G_{3,3}$. Untuk $n \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan total r -dinamis graf $G = Shack(G_{3,3}, v, n)$ adalah

$$\chi_r''(Shack(G_{3,3}, v, n)) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 4 \\ 7, & \text{untuk } r = 5 \\ 9, & \text{untuk } r = 6 \\ 10, & \text{untuk } r \geq 7 \end{cases}$$

4. **Teorema 4.1.4** Misal graf G adalah graf hasil operasi *shackle* dari graf bintang S_5 . Untuk $n \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan total r -dinamis graf $G = Shack(S_5, v, n)$ adalah

$$\chi_r''(Shack(S_5, v, n)) = \begin{cases} 6, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ 7, & \text{untuk } 4 \leq r \leq 5 \\ 8, & \text{untuk } r = 6 \\ 10, & \text{untuk } 7 \leq r \leq 9 \\ 11, & \text{untuk } r \geq 10 \end{cases}$$

5. **Teorema 4.1.5** Misal graf G adalah graf hasil operasi *shackle* dari graf *cocktail party* $H_{2,2}$. Untuk $n \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan total r -dinamis graf $Shack(H_{2,2}, v, n)$ adalah

$$\chi_r''(H_{2,2}, v, n) = \begin{cases} 5 & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ 7, & \text{untuk } 4 \leq r \leq 5 \\ 10, & \text{untuk } 6 \leq r \leq 7 \\ 11, & \text{untuk } r \geq 8 \end{cases}$$

6. **Teorema 4.1.6** Misal graf G adalah graf hasil operasi *shackle* dari graf buku B_2 . Untuk $n \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan total r -dinamis

shackle graf buku $Shack(B_2, v, n)$ adalah

$$\chi_r''(Shack(B_2, v, n)) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ 6, & \text{untuk } r = 4 \\ 9, & \text{untuk } r = 5 \\ 10, & \text{untuk } r \geq 6 \end{cases}$$

7. **Teorema 4.1.7** Misal graf G adalah graf hasil operasi generalized shackle dari graf friendship \mathbf{F}_4 . Untuk $n \geq 2$, bilangan kromatik dan pewarnaan total r -dinamis generalized shackle graf buku friendship \mathbf{F}_4 adalah

$$\chi_r''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \begin{cases} 9, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 5 \\ 10, & \text{untuk } 6 \leq r \leq 8 \\ 11 & \text{untuk } r = 9 \\ 12, & \text{untuk } r = 10 \\ 16, & \text{untuk } 11 \leq r \leq 15 \\ 17, & \text{untuk } r \geq 16 \end{cases}$$

PRAKATA

Puji syukur kehadiran Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Analisa Pewarnaan Total r -Dinamis Pada Graf Khusus dan Graf Hasil Operasi". Skripsi ini disusun guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas MIPA Universitas Jember dan Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember beserta jajarannya;
2. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc.,Ph.D. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota yang senantiasa meluangkan waktu memberikan pengarahan dan bimbingan hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini;
3. Ibu Ika Hesti Agustin S.Si., selaku Dosen Penguji I dan Bapak Dr. Mohamad Fatekurohman, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
4. dosen dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember yang telah memberikan ilmu dan membantu penulis dalam urusan administrasi selama perkuliahan;
5. teman-teman angkatan Bathics'12, yang selalu memberikan dukungan dan motivasi, para wanita hebat (Ade, Rere, Anggun, Yuni, Dwindah, Wahyu, Ikfi, dan Vivie) yang selalu menemani saat suka maupun duka, sahabat Ala-ala (Mas Nugroho, Mas Frenhdhis, Mas Dhani, Naufan, Dela, Yola, Mellisa, Wisnu) yang selalu memberikan semangat;
6. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

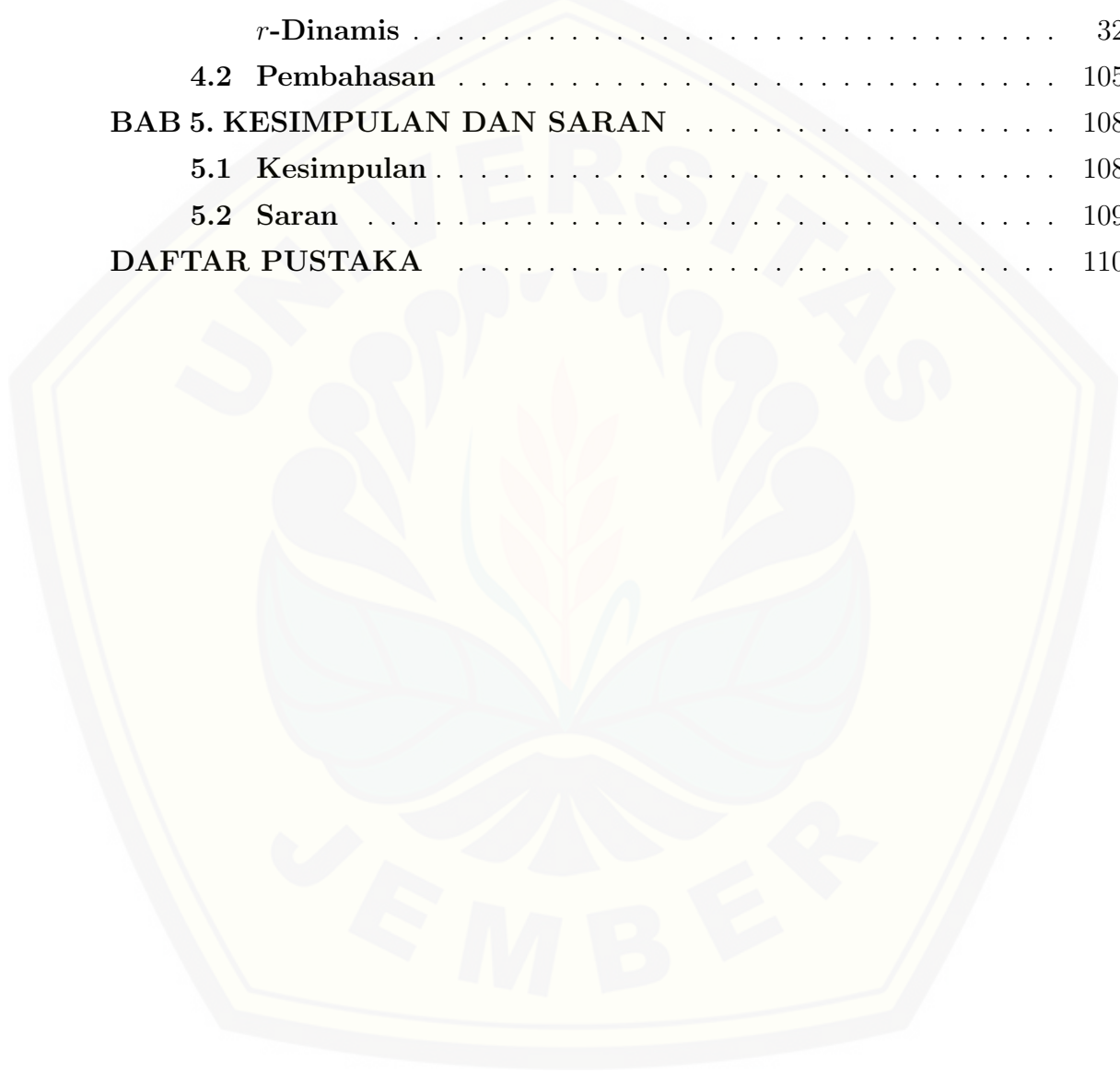
Jember, Juni 2016

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
PERSEMBAHAN	ii
MOTTO	iii
PERNYATAAN	iv
PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Konsep Dasar Graf	5
2.2 Klasifikasi Graf	6
2.3 Pewarnaan Pada Graf	8
2.4 Pewarnaan Titik r -dinamis (<i>r-Dynamic Vertex Coloring</i>)	10
2.5 Pewarnaan Sisi r -dinamis (<i>r-Dynamic Edge Coloring</i>)	11
2.6 Pewarnaan Total r -dinamis (<i>r-Dynamic Total Colouring</i>)	13
2.7 Graf Khusus dan Operasi Graf	18
2.8 Hasil Penelitian Pewarnaan Titik r -dinamis Sebelumnya	22
2.9 Hasil Penelitian Pewarnaan Sisi r -dinamis Sebelumnya	23
2.10 Aplikasi Graf	24
BAB 3. METODE PENELITIAN	28

3.1 Metode Penelitian	28
3.2 Jenis Penelitian	28
3.3 Data Penelitian	28
3.4 Rancangan Penelitian	29
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN	31
4.1 Bilangan Kromatik dan Fungsi Pewarnaan Total r -Dinamis	32
4.2 Pembahasan	105
BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN	108
5.1 Kesimpulan	108
5.2 Saran	109
DAFTAR PUSTAKA	110



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Contoh Graf G	5
2.2 Contoh (a)Graf Sederhana, (b)Graf Ganda dan (c)Graf Semu	7
2.3 (a)Graf Berhingga (b)Graf Tak-Berhingga	8
2.4 Contoh Graf Tak Berarah dan Graf Berarah	8
2.5 Contoh Pewarnaan Titik	9
2.6 Contoh Pewarnaan Sisi	9
2.7 Contoh Pewarnaan Titik 1-dinamis pada L_8	11
2.8 Contoh Pewarnaan Titik 2-dinamis pada graf L_8	11
2.9 Contoh Pewarnaan Sisi 1-dinamis dan 2-dinamis graf L_8	13
2.10 Contoh Pewarnaan Sisi 3-dinamis pada L_8	14
2.11 Contoh Pewarnaan Sisi 4-dinamis pada L_8	14
2.12 Contoh Pewarnaan total 1-dinamis dan 2-dinamis pada graf lintasan	16
2.13 Contoh Pewarnaan total 3-dinamis pada graf lintasan	17
2.14 Contoh Pewarnaan total r -dinamis pada graf lintasan	17
2.15 (a) P_8 , (b) P_n	18
2.16 Contoh graf <i>friendship</i> F_4	19
2.17 Contoh graf Grid $G_{3,3}$	19
2.18 (a)Graf Bintang S_5 (b)Graf Bintang S_6	19
2.19 Contoh operasi <i>crown product</i>	20
2.20 (a) W_4 (b) <i>Shack</i> ($W_4, v, 3$)	21
2.21 (a) W_4 , (b) <i>Amal</i> ($W_4, v, 4$)	21
2.22 Contoh pertemanan dalam kelas jika direpresentasikan dalam graf	25
2.23 graf pertemanan yang telah diberi warna	26
3.1 Rancangan Penelitian	30
4.1 Contoh graf lintasan	33
4.2 Pewarnaan total 1, 2-dinamis Pada graf lintasan (P_n)	34
4.3 Pewarnaan total 3-dinamis Pada graf lintasan (P_n)	35
4.4 Pewarnaan total r -dinamis Pada graf lintasan (P_n)	37

4.5	(a)Graf lintasan P_n dan P_2 (b)Graf Hasil Operasi <i>crown product</i> $(P_n \odot P_2)$	38
4.6	Pewarnaan total 1,2-dinamis pada graf $(P_2 \odot P_2)$	41
4.7	Pewarnaan total 1,2,3-dinamis pada graf $(P_6 \odot P_2)$	41
4.8	Pewarnaan total 4-dinamis pada graf $(P_2 \odot P_2)$	46
4.9	Pewarnaan total 5-dinamis pada graf $(P_6 \odot P_2)$	47
4.10	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $(P_2 \odot P_2)$	50
4.11	Pewarnaan total r -dinamis pada graf $(P_6 \odot P_2)$	52
4.12	(a)Graf Grid $G_{3,3}$, (b)Graf <i>Shack</i> $(G_{3,3}, v, 3)$	53
4.13	Pewarnaan 1,2,3,4-dinamis Pada Graf <i>Shack</i> $(G_{3,3}, v, n)$	56
4.14	Pewarnaan 6-dinamis Pada Graf <i>Shack</i> $(G_{3,3}, v, n)$	60
4.15	Pewarnaan r -dinamis Pada Graf <i>Shack</i> $(G_{3,3}, v, n)$	63
4.16	(a)Graf Bintang S_5 , (b)Graf <i>Shack</i> $(S_5, v, 3)$	64
4.17	Pewarnaan Total 4,5-dinamis Pada Graf <i>Shack</i> (S_5, v, n)	67
4.18	Pewarnaan Total 7,8-dinamis Pada Graf <i>Shack</i> (S_5, v, n)	71
4.19	Pewarnaan Total r -dinamis Pada Graf <i>Shack</i> (S_5, v, n)	75
4.20	(a)Graf <i>cocktail party</i> $H_{2,2}$, (b)Graf <i>Shack</i> $(H_{2,2}, v, n)$	76
4.21	Pewarnaan Total 1,2,3-dinamis Pada Graf <i>Shack</i> $(H_{2,2}, v, n)$	79
4.22	Pewarnaan Total 6,7-dinamis Pada Graf <i>Shack</i> $(H_{2,2}, v, n)$	83
4.23	Pewarnaan Total r -dinamis Pada Graf <i>Shack</i> $(H_{2,2}, v, n)$	85
4.24	(a)Graf buku B_2 , (b)Graf <i>Shack</i> $(B_2, v, 3)$	86
4.25	Pewarnaan Total 4-dinamis Pada Graf <i>Shack</i> (B_2, v, n)	89
4.26	Pewarnaan Total r -dinamis Pada Graf <i>Shack</i> (B_2, v, n)	92
4.27	(a)Graf friendship \mathbf{F}_4 , (b)Graf <i>gshack</i> $(\mathbf{F}_4, e, 4)$	93
4.28	Pewarnaan Total 1,2,3,4,5-dinamis pada Graf <i>gshack</i> $(\mathbf{F}_4, e, 4)$	96
4.29	Pewarnaan Total 9-dinamis pada Graf <i>gshack</i> $(\mathbf{F}_4, e, 4)$	99
4.30	Pewarnaan Total r -dinamis pada Graf <i>gshack</i> $(\mathbf{F}_4, e, 4)$	105

DAFTAR TABEL

	Halaman
2.1 Pewarnaan Titik x_i Pada Pewarnaan Titik 1-dinamis Graf Ladder L_8	12
2.2 Pewarnaan titik y_i pada Pewarnaan Titik 1-dinamis graf L_8	12
2.3 Pewarnaan sisi $y_i y_{i+1}$ pada pewarnaan sisi 1, 2-dinamis graf L_8	14
2.4 Pewarnaan sisi $x_i x_{i+1}$ pada pewarnaan sisi 1, 2-dinamis graf L_8	15
2.5 Pewarnaan sisi $x_i y_i$ pada pewarnaan sisi 1, 2-dinamis graf L_8	15
2.6 Pewarnaan Titik v_i pada Pewarnaan Total 1-dinamis dan 2-dinamis graf P_6	17
2.7 Pewarnaan sisi $v_i v_{i+1}$ pada pewarnaan total 1-dinamis dan 2-dinamis graf P_6	17
2.8 Hasil Penelitian Pewarnaan Titik r -dinamis Sebelumnya	22
2.9 Hasil Penelitian Pewarnaan Sisi r -dinamis Sebelumnya	23
4.1 Pewarnaan Titik x_i pada Pewarnaan Total 1, 2-dinamis graf P_6	35
4.2 Pewarnaan Titik x_i pada Pewarnaan Total 3-dinamis graf P_6	36
4.3 Pewarnaan Titik y_{ij} pada Pewarnaan Total 1, 2-dinamis graf $P_2 \odot P_2$	42
4.4 Pewarnaan Titik y_{ij} pada Pewarnaan Total 1, 2, 3-dinamis graf $P_6 \odot P_2$	42
4.5 Pewarnaan Titik y_{ij} pada Pewarnaan Total 3-dinamis graf $P_2 \odot P_2$	44
4.6 Pewarnaan sisi pada pewarnaan total 4-dinamis graf $P_3 \odot P_2$ untuk $n \geq 3$	45
4.7 Pewarnaan Titik x_i pada Pewarnaan Total 4-dinamis graf $P_2 \odot P_2$	47
4.8 Pewarnaan Titik x_i pada Pewarnaan Total 5-dinamis graf $P_6 \odot P_2$	48
4.9 Pewarnaan Titik x_i pada Pewarnaan Total 6, 7-dinamis graf $P_6 \odot P_2$	50
4.10 Pewarnaan Titik y_i pada 1, 2, 3, 4-dinamis graf $Shack(G_{3,3}, v, n)$	56
4.11 Pewarnaan Sisi pada Pewarnaan Total graf $Shack(G_{3,3}, v, n)$ dengan 6 warna	57
4.12 Pewarnaan Sisi $w_i w_{ij}$ pada Pewarnaan Total 5-dinamis graf $Shack(G_{3,3}, v, n)$	58
4.13 Pewarnaan Sisi $w_i w_{ij}$ pada Pewarnaan Total graf $Shack(G_{3,3}, v, n)$ dengan 8 warna	58

4.14	Pewarnaan Sisi $y_i w_{ij}$ pada graf $Shack(G_{3,3}, v, n)$ dengan 9 warna	60
4.15	Pewarnaan Titik y_i pada Pewarnaan Total 1, 2, 3-dinamis graf $Shack(S_5, v, n)$	66
4.16	Pewarnaan Sisi dengan 4,5-dinamis pada graf $Shack(S_n, v, n)$	68
4.17	Pewarnaan Sisi 6-dinamis pada graf $Shack(S_n, v, n)$	69
4.18	Pewarnaan Titik y_i pada Pewarnaan Total 7, 8-dinamis graf $Shack(S_5, v, n)$	72
4.19	Pewarnaan Titik y_i pada Pewarnaan Total 9-dinamis graf $Shack(S_5, v, n)$	73
4.20	Pewarnaan Titik x_i pada graf $Shack(H_{2,2}, v, n)$ dengan 6 warna	79
4.21	Pewarnaan Sisi dengan 8 warna pada graf $Shack(H_{2,2}, v, n)$	81
4.22	Pewarnaan Titik x_i dengan 10 pewarnaan pada graf $Shack(H_{2,2}, v, n)$	83
4.23	Pewarnaan Titik z_{ij} pada 1, 2, 3-dinamis graf $Shack(B_2, v, n)$	88
4.24	Pewarnaan Sisi dengan 8 warna pada graf $Shack(B_2, v, n)$	90
4.25	Pewarnaan Titik z_{ij} pada Pewarnaan Total 6-dinamis graf $Shack(B_2, v, n)$	91
4.26	Pewarnaan Titik z_i pada 1, 2, 3, 4, 5-dinamis graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$	96
4.27	Pewarnaan Titik x_i dengan 10 warna pada graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$	98
4.28	Pewarnaan Titik x_i dengan 10 warna pada graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$	100
4.29	Pewarnaan Sisi dengan 15 pewarnaan pada graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$	101
4.30	Pewarnaan Titik x_i pada Pewarnaan Total 15-dinamis graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$	103

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang dalam matematika diskrit yang menarik untuk dibahas karena berkaitan dengan permasalahan yang banyak ditemui dalam kehidupan sehari-hari (Wibisono, 2008). Menurut Suryadi dan Priatna (2013), sejarah munculnya graf bermula dari seorang matematikawan dari Swiss bernama Leonhard Euler. Teori graf lahir pada tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Königsberg yang sangat terkenal di Eropa. Dalam pembuktiannya, Euler mengilustrasikan situasi jembatan Königsberg itu dalam sebuah graf dimana digambarkan empat daratan sebagai titik, dan tujuh jembatan sebagai sisi. Berkat pekerjaan Euler yang diilhami melalui persoalan jembatan Königsberg itu, maka muncullah suatu cabang Matematika yang cukup penting yang dikenal dengan nama Teori Graf (Hasmawati, 2010).

Graf merupakan salah satu model matematika yang kompleks dan cukup sulit, akan tetapi bisa juga menjadi solusi yang sangat bagus untuk masalah tertentu. Saat ini teori graf semakin berkembang dan menarik karena keunikan dan banyak sekali penerapannya. Salah satu alasan perkembangan teori graf yang begitu pesat adalah aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu (Budayasa, 2007). Salah satu bidang kajian dalam teori graf yang banyak mendapat perhatian adalah tentang pewarnaan graf. Pewarnaan graf mulai berkembang sejak Erdos dan Szekeres (1935) memperkenalkan bilangan Ramsey dua warna dalam teori graf. Penerapan pewarnaan graf untuk menyelesaikan masalah pada bidang ilmu lain juga belum banyak dilakukan. Baskoro dan Simanjuntak mengaplikasikan pewarnaan graf sebagai struktur dasar pembangun skema pembagian rahasia (*secret sharing scheme (SSS)*). Skema dan software SSS yang dihasilkan masih terbatas pada struktur pewarnaan graf bintang.

Pada penelitian ini, akan mengkaji salah satu topik tentang teori graf yaitu pewarnaan graf. Pewarnaan graf yang akan dikaji adalah pewarnaan total r -dinamis. Penelitian mengenai pewarnaan graf telah banyak dilakukan oleh peneliti terdahulu. Bahkan hingga saat ini masih banyak dilakukan penelitian tentang pewarnaan graf. Pada pewarnaan graf dibutuhkan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi yang berfungsi untuk menunjukkan karakteristik suatu graf dan dapat digunakan sebagai penentuan fungsi pewarnaan yang memetakan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ ke himpunan warna. Seiring dengan perkembangan zaman, pewarnaan graf mulai dikembangkan menjadi pewarnaan r -dinamis pada graf. H. Lai dan B. Montgomery memperkenalkan konsep pewarnaan dinamis dan menuangkannya dalam sebuah artikel yang berjudul *Dynamic Coloring of Graphs*. H. Lai, B. Montgomery dan H. Poon juga membuat artikel yang berjudul *Upper Bounds of Dynamic Chromatic Number*. Dari penelitian diatas mulai dikembangkan lagi tentang pewarnaan dinamis pada graf.

Dewasa ini, pewarnaan r -dinamis lebih dikaji lagi oleh para peneliti. Pada tahun 2007, M. Alishahi meneliti tentang pewarnaan dinamis pada graf. S. Kim, dkk meneliti tentang pewarnaan dinamis pada graf planar di tahun 2012. Tahun 2014 Jahanbekam menuliskan artikel dengan judul *On r -dynamic Coloring of Graph*. Wulandari (2015) juga meneliti tentang *r -Dynamic Vertex Coloring* pada hasil operasi graf khusus. Pada tahun yang sama, Tarmidzi juga meneliti tentang nilai kromatik dan pewarnaan titik r -dinamis pada hasil operasi graf khusus. Meganingtyas di tahun 2015 meneliti tentang analisis pewarnaan r -dinamis pada graf-graf khusus. Penelitian tentang pewarnaan sisi dan titik r -dinamis telah banyak dilakukan. Topik baru yang perlu dikaji dan diteliti lebih lanjut adalah pewarnaan total r -dinamis. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dikaji tentang pewarnaan total r -dinamis pada beberapa graf khusus dan graf hasil operasi. Graf-graf khusus tersebut akan ditentukan pewarnaan total r -dinamis untuk selanjutnya akan didapatkan bilangan kromatiknya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dapat diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

- bagaimana menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf lintasan (P_n), graf hasil operasi *crown product* graf lintasan ($P_n \odot P_2$), *shackle* graf grid ($shack(G_{3,3}, v, n)$), *shackle* graf bintang ($shack(S_5, v, n)$), *shackle* graf *cocktail party* ($shack(H_{2,2}, v, n)$), *shackle* graf buku ($shack(B_2, v, n)$), *generalized shackle* graf *friendship* ($gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$)?
- bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf lintasan (P_n), graf hasil operasi *crown product* dari graf lintasan (P_n), graf hasil operasi *crown product* graf lintasan ($P_n \odot P_2$), *shackle* graf grid ($shack(G_{3,3}, v, n)$), *shackle* graf bintang ($shack(S_5, v, n)$), *shackle* graf *cocktail party* ($shack(H_{2,2}, v, n)$), *shackle* graf buku ($shack(B_2, v, n)$), *generalized shackle* graf *friendship* ($gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$)?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini yaitu:

- pada graf lintasan, graf grid, graf bintang, graf *cocktail party*, graf buku, dan graf *friendship*;
- operasi yang digunakan pada penelitian ini menggunakan operasi *shackle*, *generalized shackle* dan operasi *crown product*.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf lintasan (P_n), graf hasil operasi *crown product* graf lintasan ($P_n \odot P_2$), *shackle* graf grid ($shack(G_{3,3}, v, n)$), *shackle* graf bintang ($shack(S_5, v, n)$), *shackle* graf *cocktail party* ($shack(H_{2,2}, v, n)$), *shackle* graf buku ($shack(B_2, v, n)$), *generalized shackle* graf *friendship* ($gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$);

- b. menentukan bilangan kromatik dari pewarnaan total r -dinamis pada graf lintasan (P_n), graf hasil operasi *crown product* graf lintasan ($P_n \odot P_2$), *shackle* graf grid ($shack(G_{3,3}, v, n)$), *shackle* graf bintang ($shack(S_5, v, n)$), *shackle* graf *cocktail party* ($shack(H_{2,2}, v, n)$), *shackle* graf buku ($shack(B_2, v, n)$), *generalized shackle* graf *friendship* ($gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$).

1.5 Manfaat Penelitian

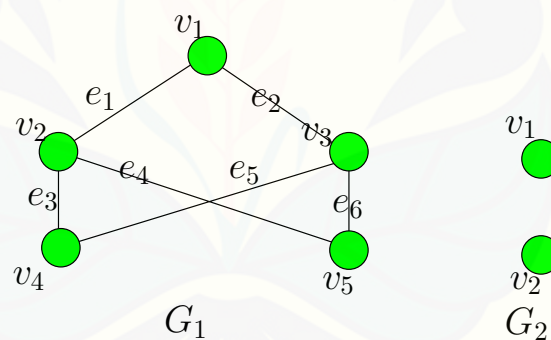
Adapun manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. meningkatkan pemahaman mengenai graf khusus dan graf hasil operasi;
- b. memberi motivasi pada peneliti lain untuk memperluas penelitian tentang pewarnaan total r -dinamis;
- c. hasil dari penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan ilmu dan aplikasi dalam masalah pewarnaan total r -dinamis.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Sebuah graf G merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut $\{u, v\}$ dari titik-titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi (Slamin, 2009). $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G . Secara sederhana, dapat juga ditulis $G = (V, E)$. Definisi graf di atas menyatakan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong, sedangkan $E(G)$ boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial (Munir, 2009).



Gambar 2.1 Contoh Graf G

Pada Gambar 2.1 di atas merupakan contoh graf secara umum. Pada graf G_1 merupakan graf sederhana yang terdiri dari himpunan titik yang dinotasikan dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi yang dinotasikan dengan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Sedangkan pada graf G_2 merupakan contoh *null graph* yang didefinisikan sebagai graf yang tidak mempunyai himpunan sisi. Dapat dilihat pada graf G_2 hanya terdiri dari himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2\}$. Banyaknya titik pada suatu graf disebut kardinalitas titik dinotasikan dengan

$|V|$ sedangkan banyaknya sisi pada suatu graf disebut kardinalitas sisi dinotasikan dengan $|E|$ (Nugroho, 2008).

Menurut Slamini (2009), ordo dari sebuah graf G adalah banyaknya titik pada G . Sedangkan derajat dari titik v pada G dinotasikan $deg(v)$ adalah jumlah sisi yang bersisian dengan v , dengan kata lain jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung (Lipschutz dan Lipson, 2002). Jika setiap titik pada graf G mempunyai derajat yang sama maka graf tersebut dinamakan graf reguler atau teratur. Jika terdapat sebuah titik yang tidak mempunyai sisi yang terhubung dengannya atau dengan kata lain derajat titik tersebut bernilai 0, maka titik tersebut dinamakan titik terisolasi (Khud, 2010).

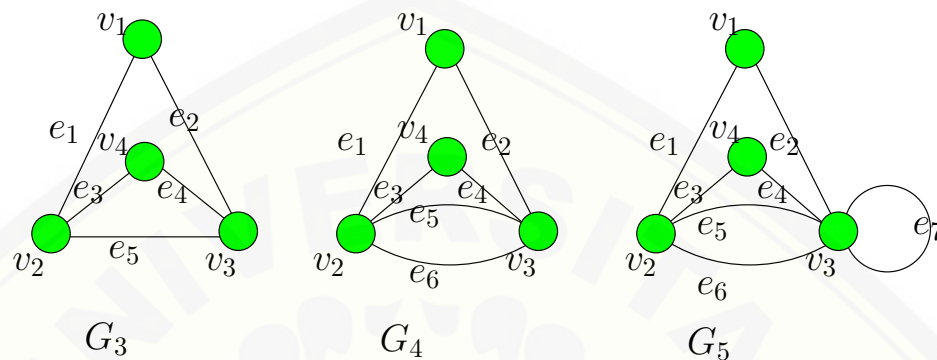
Jika u dan v adalah titik-titik pada graf G , dapat dikatakan u berdekatan (*adjacent*) dengan v jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan antara titik u dan v , dinotasikan dengan sisi $e = uv$, dengan kata lain u dan v bertetangga. Selanjutnya, titik u disebut bersisian/bertemu (*incident*) dengan sisi e jika titik u adalah titik ujung dari sisi e . Dapat juga dikatakan bahwa sisi e bersisian/bertemu (*incident*) dengan titik u jika titik u adalah titik ujung dari sisi e (Harstfield, 1990). Dengan kata lain, sisi e bersisian/bertemu (*incident*) dengan titik u dan v jika sisi e menghubungkan titik u dan v . Dua sisi misalnya e_1 dan e_2 dikatakan bertetangga jika keduanya mempunyai suatu titik ujung yang sama misalnya z , artinya $e_1=uz$ dan $e_2=vz$ (Nugroho, 2008).

2.2 Klasifikasi Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Graf dapat dikelompokkan berdasarkan ada tidaknya sisi ganda dan *loop*, jumlah titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi. Berikut ini penjelasan dari pengelompokan graf.

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis yaitu graf sederhana (*simple graph*) dan graf tak sederhana (*unsimple graphs*). Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda dinamakan graf sederhana. Sedangkan graf yang mengandung sisi ganda disebut graf tak sederhana. Ada dua macam graf tak sederhana yaitu dan graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Graf ganda adalah

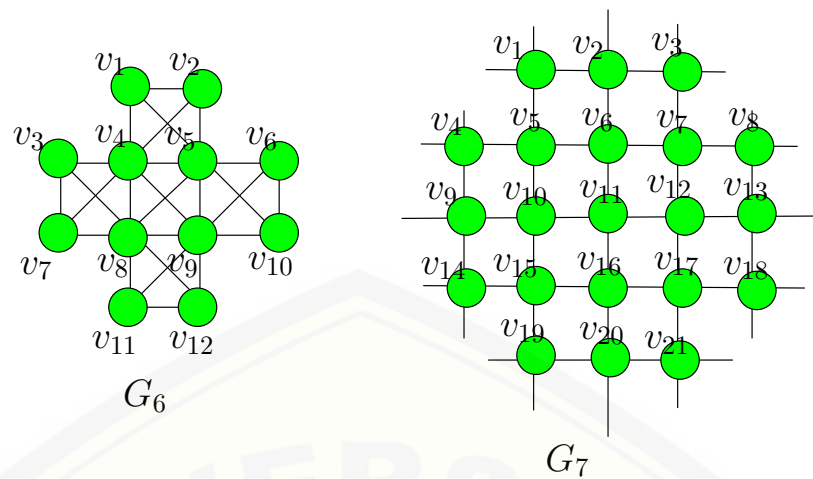
graf yang mengandung sisi ganda. Sisi ganda yang menghubungkan sepasang simpul bisa lebih dari dua buah. Graf semu adalah graf yang mengandung *loop*. Graf semu lebih umum daripada graf ganda, karena sisi pada graf semu dapat terhubung ke dirinya sendiri (Munir, 2009). Contoh graf sederhana dan tak sederhana dapat dilihat pada gambar 2.2.



Gambar 2.2 Contoh (a)Graf Sederhana, (b)Graf Ganda dan (c)Graf Semu

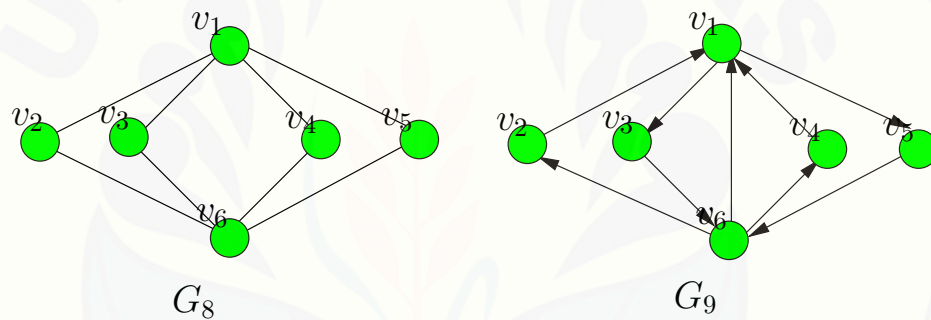
Berdasarkan jumlah titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis yaitu graf berhingga (*limited graph*) dan graf tak berhingga (*unlimited graph*). Graf berhingga adalah graf yang jumlah titiknya n berhingga sedangkan graf tak berhingga adalah graf yang jumlah titiknya n tidak berhingga banyaknya (Munir, 2009). Contoh graf berhingga dan tak berhingga dapat dilihat pada gambar 2.3.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan menjadi dua jenis yaitu graf tak berarah (*undirected graph*) dan graf berarah (*directed graph*). Graf tak berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(v,u)=(u,v)$ adalah sisi yang sama. Graf berarah disebut juga digraf, adalah graf pada setiap sisinya diberikan orientasi arah. Pada graf berarah, (u,v) dan (v,u) menyatakan dua buah sisi berarah yang berbeda. Dengan kata lain, pada graf berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan dengan sisi diperhatikan atau $(v,u) \neq (u,v)$. Untuk sisi berarah (u,v) , titik u dinamakan titik asal (*initial vertex*) dan titik v dinamakan titik terminal (*terminal vertex*) (Munir, 2009). Gambar 2.4 adalah contoh graf berarah dan tak



Gambar 2.3 (a)Graf Berhingga (b)Graf Tak-Berhingga

berarah.

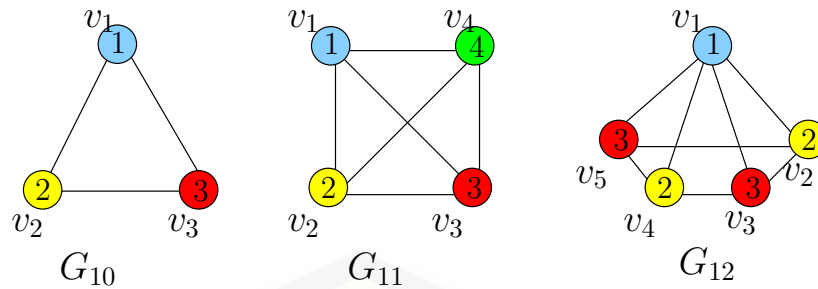


Gambar 2.4 Contoh Graf Tak Berarah dan Graf Berarah

2.3 Pewarnaan Pada Graf

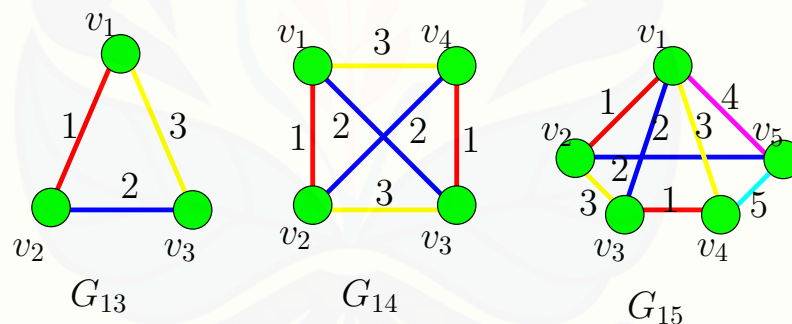
Pewarnaan graf adalah pemberian warna pada objek tertentu pada graf. Objek tersebut dapat berupa titik, sisi dan wilayah. Pewarnaan titik pada graf G merupakan pemberian warna pada titik-titik graf G , satu warna untuk setiap titik, sehingga titik-titik yang bertetangga diwarnai dengan warna berbeda (Chartrand dan Zhang, 2009:147). Pewarnaan titik dapat dianggap sebagai fungsi $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sedemikian hingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v merupakan dua titik yang bertetangga. Gambar 2.5 merupakan contoh pewarnaan titik.

Pewarnaan sisi pada graf G merupakan pemberian warna pada sisi-sisi graf



Gambar 2.5 Contoh Pewarnaan Titik

G , satu warna untuk setiap sisi pada graf G , dimana sisi-sisi yang bertetangga diberikan warna yang berbeda (Chartrand dan Zhang, 2009:249). Seperti halnya pada pewarnaan titik, pewarnaan sisi dapat digambarkan sebagai fungsi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ sedemikian hingga $c(e) \neq c(f)$ untuk setiap dua sisi e dan f yang bertetangga pada G . Bilangan bulat positif k yang paling minimum untuk mewarnai sisi pada graf G disebut sebagai indeks kromatik (atau disebut juga bilangan kromatik sisi) graf G dan dinotasikan dengan $\chi'(G)$. Contoh pewarnaan sisi dapat dilihat pada gambar 2.6.



Gambar 2.6 Contoh Pewarnaan Sisi

Pewarnaan wilayah pada graf G adalah memberikan warna pada setiap wilayah pada graf sehingga wilayah yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama (Chartrand dan Zhang, 2009:249). Seperti halnya dengan pewarnaan titik dan pewarnaan sisi, pewarnaan wilayah juga dapat dinyatakan sebagai fungsi $c : R(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$, sedemikian hingga $c(r) \neq c(s)$ untuk setiap wilayah r dan s merupakan wilayah bertetangga pada G .

2.4 Pewarnaan Titik r -dinamis (r -Dynamic Vertex Coloring)

Montgomery (2002) memperkenalkan pewarnaan k -warna dinamis pada graf. Pewarnaan k -warna dinamis pada graf G merupakan pewarnaan titik pada graf G sebanyak k warna sedemikian hingga setiap titik yang berderajat paling sedikit dua pada graf G setidaknya memiliki dua warna berbeda dengan titik-titik ketetanggaannya. Pewarnaan r -dinamis merupakan pengembangan dari pewarnaan k -warna dinamis. Nilai k minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G dinotasikan dengan $\chi(G)$. Adapun definisi dari pewarnaan dinamis dapat dilihat pada Definisi 2.4.1.

Definisi 2.4.1. *Pewarnaan dinamis didefinisikan sebagai pewarnaan yang tepat (proper) sehingga setiap titik berderajat minimal dua mempunyai lebih dari satu warna yang berbeda pada setiap titik-titik ketetanggaannya. Pewarnaan dinamis merupakan suatu pemetaan c dari V ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:*

- a. jika $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dan
- b. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{2, d(v)\}$.

(Lai dan Montgomery, 2002: 2)

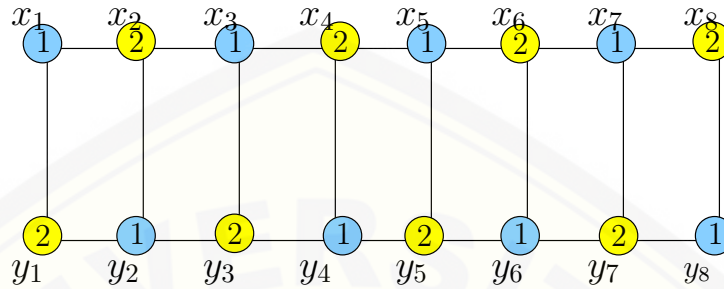
Pewarnaan dinamis pada akhirnya berkembang menjadi pewarnaan r -dinamis dengan cara menggeneralisasikan konsep pewarnaan dinamis. Adapun pengertian mengenai pewarnaan r -dinamis dapat dilihat pada Definisi 2.4.2.

Definisi 2.4.2. *Pewarnaan r -dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari V ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut:*

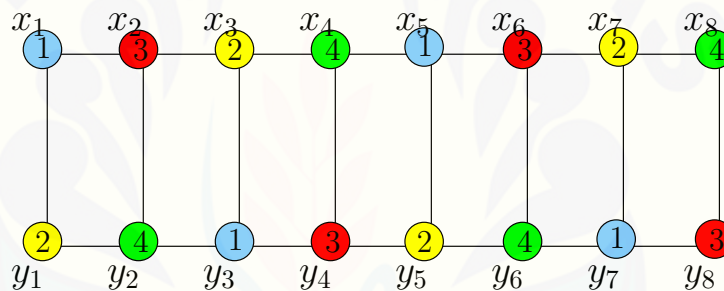
- a. jika $uv \in E(G)$ maka $c(u) \neq c(v)$, dan
- b. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$.

(Lai dan Montgomery, 2002: 12)

Selanjutnya, pewarnaan r -dinamis disebut dengan pewarnaan titik r -dinamis dan bilangan kromatik r -dinamis disebut dengan bilangan kromatik titik r -dinamis. Contoh pewarnaan titik r -dinamis pada graf tangga dapat dilihat pada Gambar 2.7 dan Gambar 2.8.



Gambar 2.7 Contoh Pewarnaan Titik 1-dinamis pada L_8



Gambar 2.8 Contoh Pewarnaan Titik 2-dinamis pada graf L_8

Tabel 2.1 menunjukkan tentang pewarnaan titik x_i pada pewarnaan 1-dinamis graf tangga (L_8). Sedangkan untuk tabel 2.2 menunjukkan tentang pewarnaan titik y_i pada pewarnaan 1-dinamis graf tangga (L_8).

2.5 Pewarnaan Sisi r -dinamis (r -Dynamic Edge Coloring)

Pewarnaan sisi r -dinamis merupakan perluasan konsep dari pewarnaan titik r -dinamis. Definisi pewarnaan sisi r -dinamis dikembangkan dari definisi pada pewarnaan titik r -dinamis yang disesuaikan dengan kondisi atau syarat pada pewarnaan sisi graf. Definisi 2.5.1 merupakan definisi dari pewarnaan sisi r -dinamis. Jumlah warna minimal yang dapat digunakan untuk mewarnai sisi-sisi dalam graf G disebut bilangan kromatik G .

i	$c(x_i)$	$ c(N(x_i)) $	r	$d(x_i)$	$\min\{r, d(x_i)\}$	$ c(N(x_i)) \geq \min\{r, d(x_i)\}$
1	1	1	1	2	1	YA
2	2	1	1	3	1	YA
3	1	1	1	3	1	YA
4	2	1	1	3	1	YA
5	1	1	1	3	1	YA
6	2	1	1	3	1	YA
7	1	1	1	3	1	YA
8	2	1	1	2	1	YA

Tabel 2.1 Pewarnaan Titik x_i Pada Pewarnaan Titik 1-dinamis Graf Ladder L_8

i	$c(y_i)$	$ c(N(y_i)) $	r	$d(y_i)$	$\min\{r, d(y_i)\}$	$ c(N(y_i)) \geq \min\{r, d(y_i)\}$
1	2	1	1	2	1	YA
2	1	1	1	3	1	YA
3	2	1	1	3	1	YA
4	1	1	1	3	1	YA
5	2	1	1	3	1	YA
6	1	1	1	3	1	YA
7	2	1	1	3	1	YA
8	1	1	1	2	1	YA

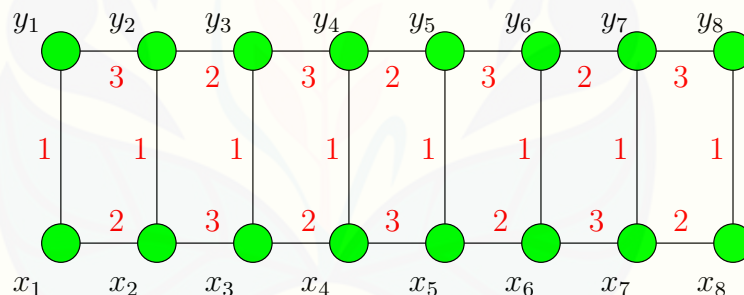
Tabel 2.2 Pewarnaan titik y_i pada Pewarnaan Titik 1-dinamis graf L_8

Definisi 2.5.1. *Pewarnaan sisi r -dinamis pada suatu graf G didefinisikan sebagai pemetaan c dari E ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut :*

1. *jika $e_1 = uv$, $e_2 = vw \in E(G)$, maka $c(e_1) \neq c(e_2)$, dan*
2. *$\forall e_1 = uv \in E(G)$, $|c(N(e_1))| \geq \min[r, d(v) + d(u) - 2]$*

(Meganingtyas, 2015).

Nilai k yang minimal sehingga graf G memenuhi pewarnaan k -warna sisi r -dinamis disebut sebagai bilangan kromatik sisi r -dinamis, yang dinotasikan dengan $\lambda_r(G)$. Bilangan kromatik pada pewarnaan 1-dinamis merupakan bilangan kromatik pada $\lambda(G)$. Adapun bilangan kromatik sisi 2-dinamis disebut sebagai bilangan kromatik sisi dinamis $\lambda_d(G)$. Gambar 2.9 merupakan contoh pewarnaan sisi 1-dinamis dan 2-dinamis pada graf tangga. Gambar 2.10 merupakan contoh pewarnaan sisi 3-dinamis pada graf tangga. Gambar 2.11 merupakan contoh pewarnaan sisi 4-dinamis pada graf tangga.

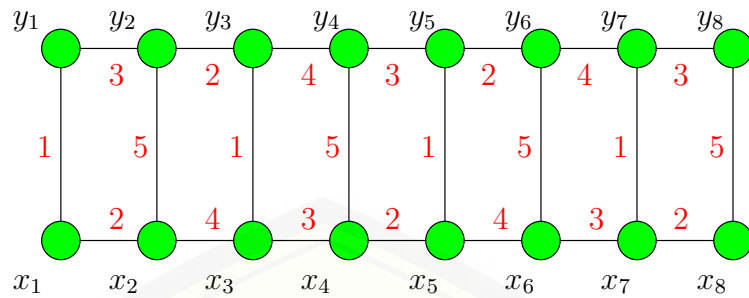


Gambar 2.9 Contoh Pewarnaan Sisi 1-dinamis dan 2-dinamis graf L_8

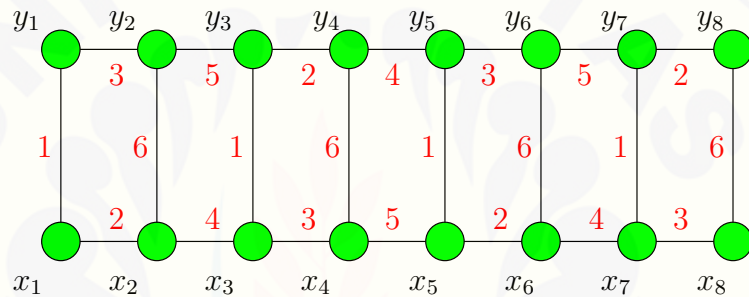
Tabel 2.3 menunjukkan tentang pewarnaan sisi $y_i y_{i+1}$ pada pewarnaan sisi 1, 2-dinamis graf tangga. Tabel 2.4 menunjukkan tentang pewarnaan sisi $x_i x_{i+1}$ pada pewarnaan sisi 1, 2-dinamis graf tangga. Tabel 2.5 menunjukkan tentang pewarnaan sisi $x_i y_i$ pada pewarnaan sisi 1, 2-dinamis graf tangga.

2.6 Pewarnaan Total r -dinamis (*r -Dynamic Total Colouring*)

Pewarnaan total pada graf G adalah penentuan warna titik dan sisi pada graf G dimana setiap dua titik yang saling bertetangga dan sisi yang



Gambar 2.10 Contoh Pewarnaan Sisi 3-dinamis pada L_8



Gambar 2.11 Contoh Pewarnaan Sisi 4-dinamis pada L_8

e $=uv$	$c(e)$	$ c(N(e)) $	r	$d(u)+$ $d(v) - 2$	$\min\{r, d(u)+$ $d(v) - 2\}$	$ c(N(e)) \geq$ $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$
y_1y_2	3	2	1	3	1	YA
y_2y_3	2	2	1	4	1	YA
y_3y_4	3	2	1	4	1	YA
y_4y_5	2	2	1	4	1	YA
y_5y_6	3	2	1	4	1	YA
y_6y_7	2	2	1	4	1	YA
y_7y_8	3	2	1	3	1	YA

Tabel 2.3 Pewarnaan sisi y_iy_{i+1} pada pewarnaan sisi 1, 2-dinamis graf L_8

e $=uv$	$c(e)$	$ c(N(e)) $	r	$d(u)+$ $d(v) - 2$	$\min\{r, d(u)+$ $d(v) - 2\}$	$ c(N(e)) \geq$ $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$
x_1x_2	2	2	1	3	1	YA
x_2x_3	3	2	1	4	1	YA
x_3x_4	2	2	1	4	1	YA
x_4x_5	3	2	1	4	1	YA
x_5x_6	2	2	1	4	1	YA
x_6x_7	3	2	1	4	1	YA
x_7x_8	2	2	1	3	1	YA

Tabel 2.4 Pewarnaan sisi $x_i x_{i+1}$ pada pewarnaan sisi 1, 2-dinamis graf L_8

e $=uv$	$c(e)$	$ c(N(e)) $	r	$d(u)+$ $d(v) - 2$	$\min\{r, d(u)+$ $d(v) - 2\}$	$ c(N(e)) \geq$ $\min\{r, d(u) + d(v) - 2\}$
x_1y_1	1	2	1	2	1	YA
x_2y_2	1	2	1	4	1	YA
x_3y_3	1	2	1	4	1	YA
x_4y_4	1	2	1	4	1	YA
x_5y_5	1	2	1	4	1	YA
x_6y_6	1	2	1	4	1	YA
x_7y_7	1	2	1	4	1	YA
x_8y_8	1	2	1	2	1	YA

Tabel 2.5 Pewarnaan sisi $x_i y_i$ pada pewarnaan sisi 1, 2-dinamis graf L_8

menghubungkan dua titik tersebut serta dua sisi yang bersisian dengan titik tersebut harus mempunyai warna berbeda. Bilangan kromatik dari pewarnaan total r -dinamis adalah banyaknya nilai k minimum yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G , dan dinotasikan dengan $\chi''(G)$.

Dugaan 2.6.1. *Pewarnaan total harus memenuhi $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$, dimana $\Delta(G)$ adalah derajat maksimal dari graf G . Menurut Behzad dan Vizing, bilangan kromatik total untuk setiap graf G harus memenuhi $\Delta(G)+1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G)+2$ (Geetha et al., Tanpa Tahun)*

Semua graf dianggap terbatas, sederhana dan tidak berarah. Jika diberikan $G=(V(G),E(G))$ adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Pewarnaan total dari graf G adalah pemetaan $c : V(G) \cup E(G) \rightarrow [1, 2, \dots, k]$ dimana $[1, 2, \dots, k]$ adalah himpunan warna, yang memenuhi kondisi berikut:

1. $c(u) \neq c(v)$, untuk setiap dua titik yang bertetangga, dimana $u, v \in V(G)$;
2. $c(e) \neq c(e')$, untuk setiap dua sisi yang bertetangga, dimana $e, e' \in E(G)$;
3. $c(v) \neq c(e)$, untuk setiap titik $v \in V(G)$ dan sembarang sisi $e \in E(G)$ bersisian di titik v (Kowalik et al., 2008:1)

Pewarnaan total r -dinamis pada suatu graf G adalah pemetaan $c : V(G) \cup E(G)$ ke himpunan warna sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut :

1. $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min[r, d(v) + |N(v)|]$ dan
2. $\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min[r, d(v) + d(u)]$

Adapun contoh pewarnaan total r -dinamis dapat dilihat pada Gambar 2.12



Gambar 2.12 Contoh Pewarnaan total 1-dinamis dan 2-dinamis pada graf lintasan

Tabel 4.1 menunjukkan tentang pewarnaan titik v_i pada pewarnaan total 1, 2-dinamis graf lintasan. Tabel 2.7 menunjukkan tentang pewarnaan sisi $v_i v_{i+1}$ pada pewarnaan total 1, 2-dinamis graf lintasan.

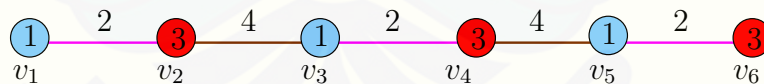
Adapun contoh pewarnaan total 3-dinamis dan 4-dinamis pada graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.13 dan Gambar 2.14.

i	$c(v_i)$	$ c(N(v_i)) $	r	$d(v) + N(v_i) $	$\min\{r, d(v) + N(v_i) \}$	$ c(N(v_i)) \geq \min\{r, d(v) + N(v_i) \}$
1	1	2	1	2	1	YA
2	3	2	1	4	1	YA
3	2	2	1	4	1	YA
4	1	2	1	4	1	YA
5	3	2	1	4	1	YA
6	2	2	1	2	1	YA

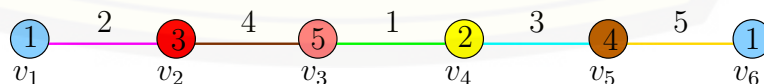
Tabel 2.6 Pewarnaan Titik v_i pada Pewarnaan Total 1-dinamis dan 2-dinamis graf P_6

$e = uv$	$c(e)$	$ c(N(e)) $	r	$d(u) + d(v)$	$\min\{r, d(u) + d(v)\}$	$ c(N(e)) \geq \min\{r, d(u) + d(v)\}$
v_1v_2	2	2	1	3	1	YA
v_2v_3	1	2	1	4	1	YA
v_3v_4	3	2	1	4	1	YA
v_4v_5	2	2	1	4	1	YA
v_5v_6	1	2	1	3	1	YA

Tabel 2.7 Pewarnaan sisi $v_i v_{i+1}$ pada pewarnaan total 1-dinamis dan 2-dinamis graf P_6



Gambar 2.13 Contoh Pewarnaan total 3-dinamis pada graf lintasan

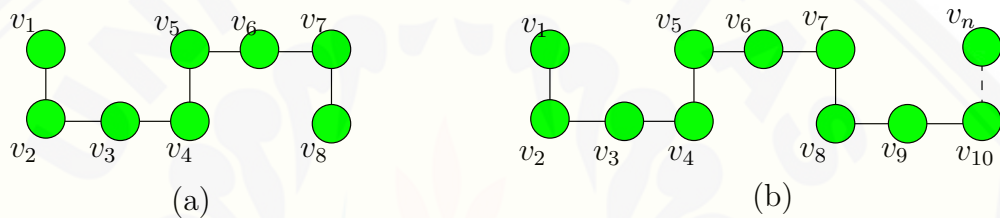


Gambar 2.14 Contoh Pewarnaan total r -dinamis pada graf lintasan

2.7 Graf Khusus dan Operasi Graf

Graf khusus adalah graf yang memiliki keunikan dan karakteristik. Keunikan dari graf khusus yaitu tidak isomorfis dengan graf yang lainnya. Karakteristik bentuknya memperluas order n tetapi simetris. Contoh dari beberapa graf khusus diantaranya adalah graf lintasan, graf sikel atau lingkaran, graf lengkap, graf bintang, graf kipas dan graf roda.

Definisi 2.7.1. *Graf lintasan, dinotasikan dengan P_n , merupakan suatu graf dengan himpunan titik $V(P_n) = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan himpunan sisi $E(P_n) = x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n$ (Meganingtyas, 2015). Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.17.*

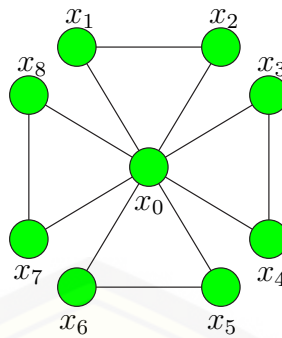


Gambar 2.15 (a) P_8 , (b) P_n

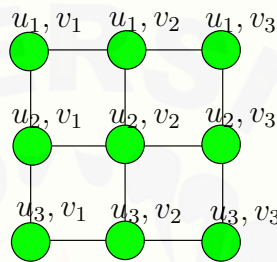
Definisi 2.7.2. *Graf persahabatan (friendship graph) dinotasikan dengan F_n dimana $n \geq 2$ adalah graf yang didapat dengan cara menghapus $n/2$ sisi pada bagian sikel graf roda. Graf friendship hanya bisa didapat dari graf roda dengan n genap. Kardinalitas titik dari graf friendship adalah $2n + 1$ sedangkan kardinalitas sisinya adalah $3n$ (Rahmawati dan Rahajeng, 2014).*

Definisi 2.7.3. *Graf buku yang dinotasikan dengan B_n adalah suatu graf yang dibentuk dari operasi hasil kali kartesius antara graf lintasan dengan dua titik dan graf bintang dengan $n+1$ titik yaitu $B_n = P_n \times S_n$ (Lukito dan Nurhidayat, Tanpa Tahun).*

Definisi 2.7.4. *Graf grid adalah graf yang merupakan hasil kali kartesius dari graf lintasan $P_m \times P_n$ atau jika dituliskan dalam notasi pembentuk himpunan maka $V(P_m \times P_n) = (v_i, w_j) | v_i \in P_m, w_j \in P_n$. Graf grid dengan $m \times n$ titik dinotasikan dengan $G_{m,n}$ (Weisstein, Tanpa Tahun).*

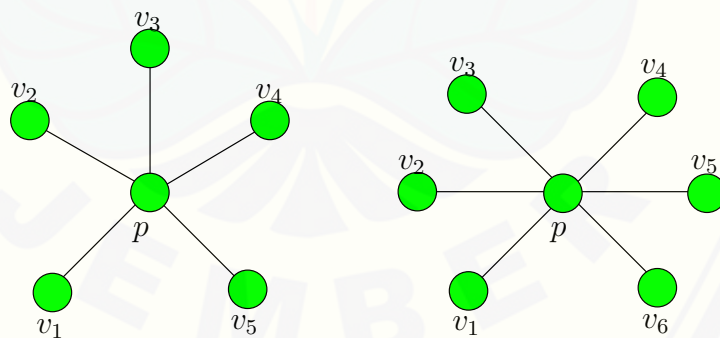


Gambar 2.16 Contoh graf *friendship* F_4



Gambar 2.17 Contoh graf Grid $G_{3,3}$

Definisi 2.7.5. Graf bintang dinotasikan S_n dengan $n \geq 3$ adalah graf yang terdiri dari satu titik pusat yang mempunyai derajat n dan $n + 1$ titik dan n sisi. Berikut contoh gambar 2.18 dari graf S_5 dan S_6 .

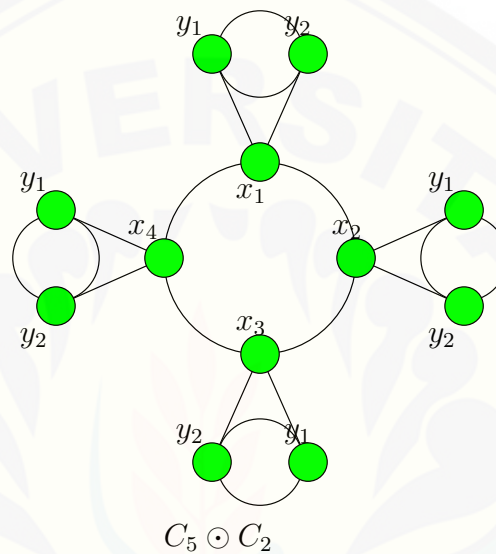


Gambar 2.18 (a)Graf Bintang S_5 (b)Graf Bintang S_6

Operasi graf merupakan salah satu cara untuk mendapatkan graf baru dengan cara melakukan operasi terhadap dua jenis graf atau lebih. Terdapat beberapa macam jenis operasi graf yang telah dikembangkan oleh para peneliti.

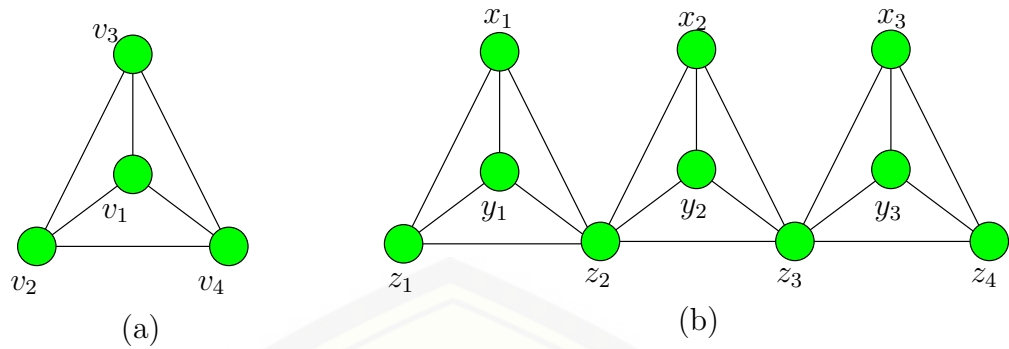
Berikut ini adalah penjelasan dari beberapa macam operasi graf :

Definisi 2.7.6. *Crown Product* $G \odot H$ dari dua graf G dan H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|V(G)|$ duplikat $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$ dari H , kemudian menghubungkan titik ke- i dari G ke setiap titik di H_i , $i = 1, 2, 3, \dots, V(G)$ (Harsya dkk., 2014). Sebagai contoh, perhatikan Gambar 2.19.



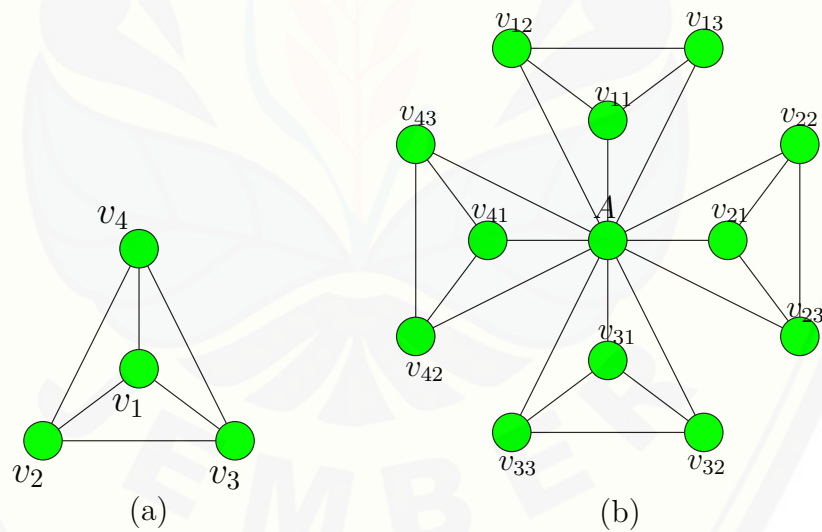
Gambar 2.19 Contoh operasi *crown product*

Definisi 2.7.7. *Shackle* dari graf H dinotasikan dengan $G = shack(H, v, n)$ adalah graf G yang dibangun dari graf non trivial H_1, H_2, \dots, H_n sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq s, t \leq n$, H_s dan H_t tidak memiliki titik penghubung dimana $|s - t| \geq 2$ dan untuk setiap $1 \leq i \leq n - 1$, H_i dan H_{i+1} memiliki tepat satu titik bersama v , disebut dengan titik penghubung dan $k-1$ titik penghubung tersebut adalah berbeda. Jika $G = shack(H, v, n)$ titik penghubung digantikan dengan subgraf $K \subset H$ disebut dengan *generalized shackle*, dan dinotasikan dengan $G = gshack(H, K \subset H, n)$ (Dafik et al., 2010). Gambar 2.20 adalah contoh graf dengan operasi *shackel*.



Gambar 2.20 (a) W_4 (b) $Shack(W_4, v, 3)$

Definisi 2.7.8. Misalkan $\{G_i\}$ merupakan kumpulan graf berhingga dan masing-masing G_i mempunyai titik tertentu yang sama, yakni v_{oi} , yang disebut sebagai titik terminal. Amalgamasi pada G_i , dinotasikan dengan $amal\{G_i, v_{oi}\}$, diperoleh dengan cara menyatukan seluruh graf G_i pada titik terminalnya (Maryati, dkk., 2010: 339). Contoh graf dengan operasi amalgamasi dapat dilihat pada Gambar 2.21.



Gambar 2.21 (a) W_4 , (b) $Amal(W_4, v, 4)$

2.8 Hasil Penelitian Pewarnaan Titik r -dinamis Sebelumnya

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil pewarnaan titik r -dinamis yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Rangkuman yang tersedia pada bagian ini merupakan hasil penelitian pewarnaan titik terdahulu. Bisa dilihat pada Tabel 2.8.

Tabel 2.8: Hasil Penelitian Pewarnaan Titik r -dinamis Sebelumnya

Graf	Hasil	Keterangan
<i>Graf Triangular Book ; $n \geq 2$</i> (BT_n)	$\chi(BT_n) = \chi_d(BT_n) = 3,$ $\chi_r(BT_n) = r + 1, 3 \leq r \leq n$ $\chi_r(BT_n) = n + 1, r \geq n$	Tarmidzi, 2015
<i>Graf Kipas (F_n); $n \geq 3$</i>	$\chi(F_n) = \chi_d(F_n) = 3,$ $\chi_r(F_n) = r + 1, 3 \leq r \leq n$ $\chi_r(F_n) = n + 1, r \geq n$	Tarmidzi, 2015
<i>Graf Tangga Siklus; $n \geq 2$</i> (TCL_n)	$\chi(TCL_n) = \chi_d(TCL_n) = 3,$ $\chi_3(TCL_n) = 4,$ $\chi_4(TCL_n) = 5,$ $\chi_r(TCL_n) = 6, r \geq 5$	Tarmidzi, 2015
<i>Graf Tangga (L_n); $n \geq 2$</i>	$\chi(L_n) = 2,$ $\chi_r(L_n) = 4, r \geq 2$	Tarmidzi, 2015
<i>Shackel Graf Oktahedral;</i> ($Shack(j_{4,2}, v = 1, n)$) $n \geq 2$	$\chi(Shack(j_{4,2}, v = 1, n)) =$ $\chi_d(Shack(j_{4,2}, v = 1, n)) = 3$ $\chi_3(Shack(j_{4,2}, v = 1, n)) = 5,$ $\chi_4(Shack(j_{4,2}, v = 1, n)) =$ $\chi_5(Shack(j_{4,2}, v = 1, n)) = 6,$ $\chi_r(Shack(j_{4,2}, v = 1, n)) = r + 1,$ untuk $6 \leq r \leq 7$ $\chi_r(Shack(j_{4,2}, v = 1, n)) = 9, r \geq 8$	Tarmidzi, 2015
<i>Banana Tree ($B_{m,4}$);</i> $m \geq 2, n = 4$	$\chi_r(B_{m,4}) = r + 1,$	Tarmidzi, 2015

2.9 Hasil Penelitian Pewarnaan Sisi r -dinamis Sebelumnya

Beberapa hasil penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, terkait pewarnaan sisi r -dinamis yang dapat dijadikan sebagai rujukan pada penelitian ini dapat dilihat pada tabel 2.9 berikut:

Tabel 2.9: Hasil Penelitian Pewarnaan Sisi r -dinamis Sebelumnya

Graf	Hasil	Keterangan
<i>Graf Lintasan</i> (P_n); $n \geq 2$	$\lambda(P_n) = 2$, untuk $n \geq 2$ $\lambda_2(P_n) = \lambda_r(P_n) = 3$, untuk, $n \geq 2, r \geq 2$	Meganingtyas, 2015
<i>Graf Sikel</i> (C_n); $n \geq 3$	$\lambda(C_n) = 2$, 2 untuk n genap 3 untuk n ganjil $\lambda_{r \geq 2}(C_n) = 3$, untuk, $n = 3k, k \in N$ $\lambda_{r \geq 2}(C_n) = 4$, untuk, $n = 3k + 1, k \in N$ $\lambda_{r \geq 2}(C_n) = 5$, untuk, $n = 3k + 2, k \in N$	Meganingtyas, 2015
<i>Graf Bintang</i> (S_n); $n \geq 3$	$\lambda_{r \geq 1}(S_n) = n$	Meganingtyas, 2015
<i>Graf Roda</i> (W_n); $n \geq 5$	$\lambda_{r \leq n-1}(W_n) = n$, untuk $1 \leq r \leq n-1$ $\lambda_{r \geq n}(W_n) = 10$, untuk, $n = 5, r \geq n$ $\lambda_{r \geq n}(W_n) = n + 3$, untuk, $n = 3k + 3, k \in N, r \geq n$ $\lambda_{r \geq n}(W_n) = n + 4$, untuk, n lainnya, $r \geq n$	Meganingtyas, 2015

Graf	Hasil	Keterangan
<i>Graf Prisma</i> (P_n); $n \geq 3$	$\lambda(P_n) = \lambda_2(P_n) = 2,$ untuk n genap $\lambda(P_n) = \lambda_2(P_n) = 3,$ untuk n ganjil $\lambda_3(P_n) = 4,$ untuk $n = 3$ $\lambda_3(P_n) = 5,$ untuk n lainnya $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 9,$ untuk, $n = 3$ $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 6,$ untuk, $n = 4k, k \in N,$ $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 8,$ untuk, $n = 5, 6, 4k + 7k \in N$ $\lambda_{r \geq 4}(P_n) = 7,$ untuk, n lainnya	Meganingtyas, 2015
<i>Graf Tangga</i> (L_n); $n \geq 3$	$\lambda(L_n) = \lambda_2(L_n) = 3,$ $\lambda_3(L_n) = 5,$ $\lambda_4(L_n) = \lambda_r(L_n) = 6,$	Meganingtyas, 2015
<i>Graf Friendship</i> (F_n); $n \geq 3$	$\lambda_{r \leq 2n-1}(F_n) = 2n,$ $\lambda_{r \geq 2n}(F_n) = 2n + 1,$	Meganingtyas, 2015
<i>Graf Amalgamasi Lintasan</i> (P_n); $n \geq 2, m \geq 3$	$\lambda(amal(P_n, v, m)) =$ $\lambda_2(amal(P_n, v, m)) = m,$ $\lambda_{r \geq 3n}(amal(P_n, v, m)) = m + 1,$	Meganingtyas, 2015

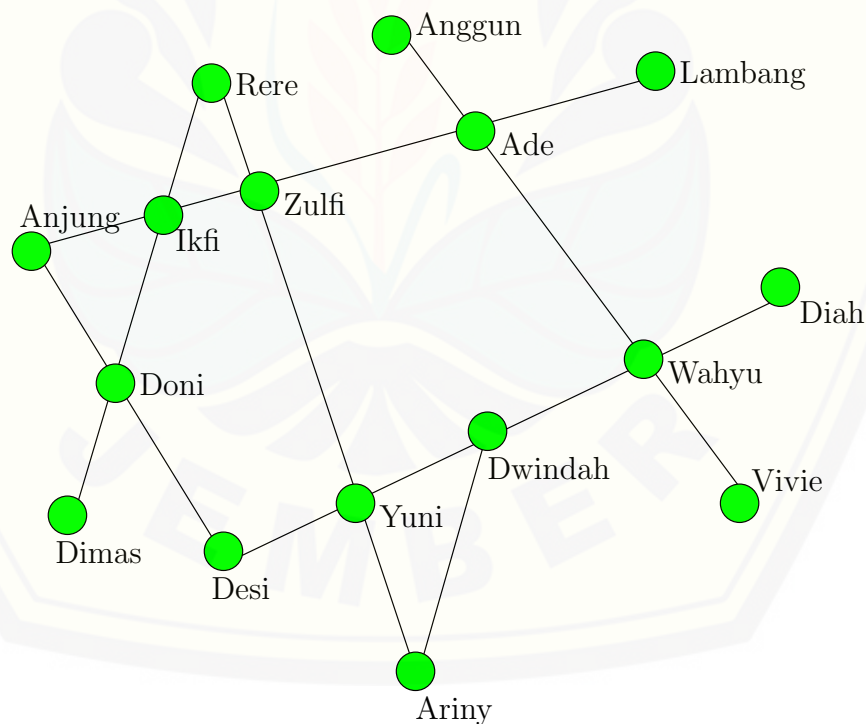
2.10 Aplikasi Graf

Graf dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu kajian graf yang sering diaplikasikan dalam kehidupan adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf dapat diaplikasikan dalam masalah penjadwalan. Tetapi belum ada penelitian tentang aplikasi pewarnaan total r -dinamis. Berikut ini

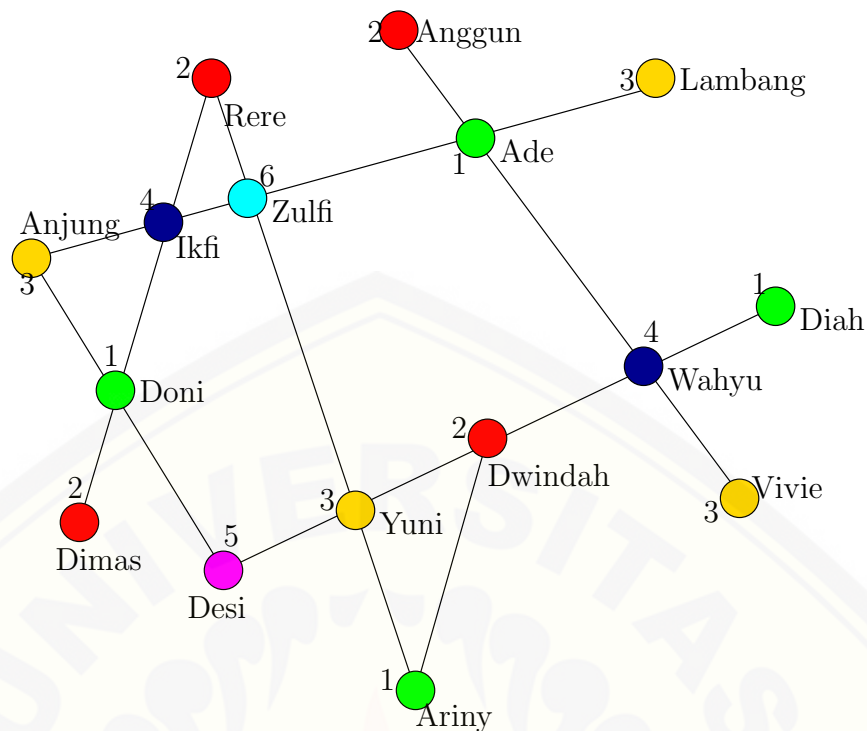
merupakan gambaran aplikasi tentang pewarnaan r -dinamis.

Seorang dosen memberikan tugas kepada mahasiswa untuk mencari artikel dalam jurnal tentang kajian tertentu bidang teori graf. Setiap mahasiswa harus memilih satu kajian topik teori graf tersebut untuk dipelajari dan dijelaskan pada temannya. Setiap mahasiswa dengan paling sedikit r teman harus mendengar tentang r kajian berbeda dari temannya. Dalam kasus ini, tidak ada dua teman yang mempelajari kajian yang sama. Mahasiswa dapat merencanakan bersama tentang siapa saja yang akan mempelajari kajian tersebut agar jumlah kajian itu minimal.

Misalkan dalam suatu perkuliahan terdapat 16 mahasiswa yang menempuh mata kuliah Teori Graf. Pada mata kuliah tersebut terdapat beberapa kajian yaitu *covering*, *r-dynamic colouring*, *k-rainbow connection*, *locating domination number*, *metric dimension with no isolated resolving set* dan *power domination*. Untuk memperjelas kasus di atas akan direpresentasikan dalam graf seperti pada gambar 2.25 dan gambar 2.26.



Gambar 2.22 Contoh pertemanan dalam kelas jika direpresentasikan dalam graf



Gambar 2.23 graf pertemanan yang telah diberi warna

Dari representasi graf tersebut dapat disimpulkan bahwa dalam contoh kasus di atas membutuhkan 6 warna berbeda untuk mewarnai tersebut. Masing-masing warna menggambarkan kajian yang berbeda tentang teori graf. Misalkan untuk kajian pertama tentang *covering* disimbolkan dengan warna hijau. Kajian kedua tentang *r-dynamic coloring* disimbolkan dengan warna merah. Kajian ketiga tentang *k-rainbow connection* disimbolkan kuning. Kajian keempat tentang *locating domination number* disimbolkan dengan warna biru. Kajian kelima tentang *metric dimension with non isolated resolving set* disimbolkan dengan warna magenta. Kajian keenam tentang *power domination* disimbolkan dengan warna cyan.

Dari representasi graf tersebut dapat diketahui bahwa ada 16 mahasiswa yang berteman dengan mahasiswa lainnya. Tugas dari seorang mahasiswa adalah mencari, mempelajari dan menjelaskan kepada temannya tentang kajian tertentu. Dan seorang mahasiswa harus mendengarkan *r*-kajian berbeda dari *r*-temannya. Doni mendengarkan empat kajian berbeda dari keempat temannya.

Kajian tersebut adalah *r-dynamic coloring*, *k-rainbow connection*, *locating domination number* dan *metric dimension with non isolated resolving set*. Sedangkan Dimas hanya mendengarkan kajian tentang *covering* saja karena Dimas hanya berteman dengan Doni. Desi berteman dengan Doni dan Yuni sehingga ia mendengarkan dua kajian berbeda yaitu *covering* dan *k-rainbow connection*. Anjung mempunyai dua teman sehingga ia juga mendengarkan dua kajian berbeda. Berbeda dengan ikfi yang mempunyai empat orang teman sehingga ia mendengarkan empat kajian berbeda yang dijelaskan oleh keempat temannya.



BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik, yang diawali dengan istilah yang didefinisikan, kemudian dapat disusun pernyataan pangkal yang biasa disebut aksioma atau postulat. Metode ini menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma dan teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah. Pada penelitian ini akan didapatkan teorema ataupun definisi baru yang diperoleh dari hasil analisis lebih lanjut terhadap teorema atau definisi sebelumnya yang telah ada. Penelitian ini pada prosesnya juga menggunakan metode pendeteksian pola yaitu dengan menentukan pola pewarnaan r -dinamis sedemikian hingga diperoleh bentuk pola umumnya.

3.2 Jenis Penelitian

Adapun jenis penelitian ini dibedakan menjadi dua yaitu:

1. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan untuk menemukan hal baru yang ingin diketahui oleh peneliti, kemudian hasilnya dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.
2. Penelitian terapan (*applied research*) merupakan jenis penelitian dengan penyelidikan yang hati-hati, sistematis dan terus-menerus terhadap suatu masalah yang bertujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu.

3.3 Data Penelitian

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah menggunakan graf lintasan (P_n), graf hasil operasi *crown product* graf lintasan ($P_n \odot P_2$), *shackle* graf grid ($shack(G_{3,3}, v, n)$), *shackle* graf bintang ($shack(S_5, v, n)$), *shackle* graf *cocktail*

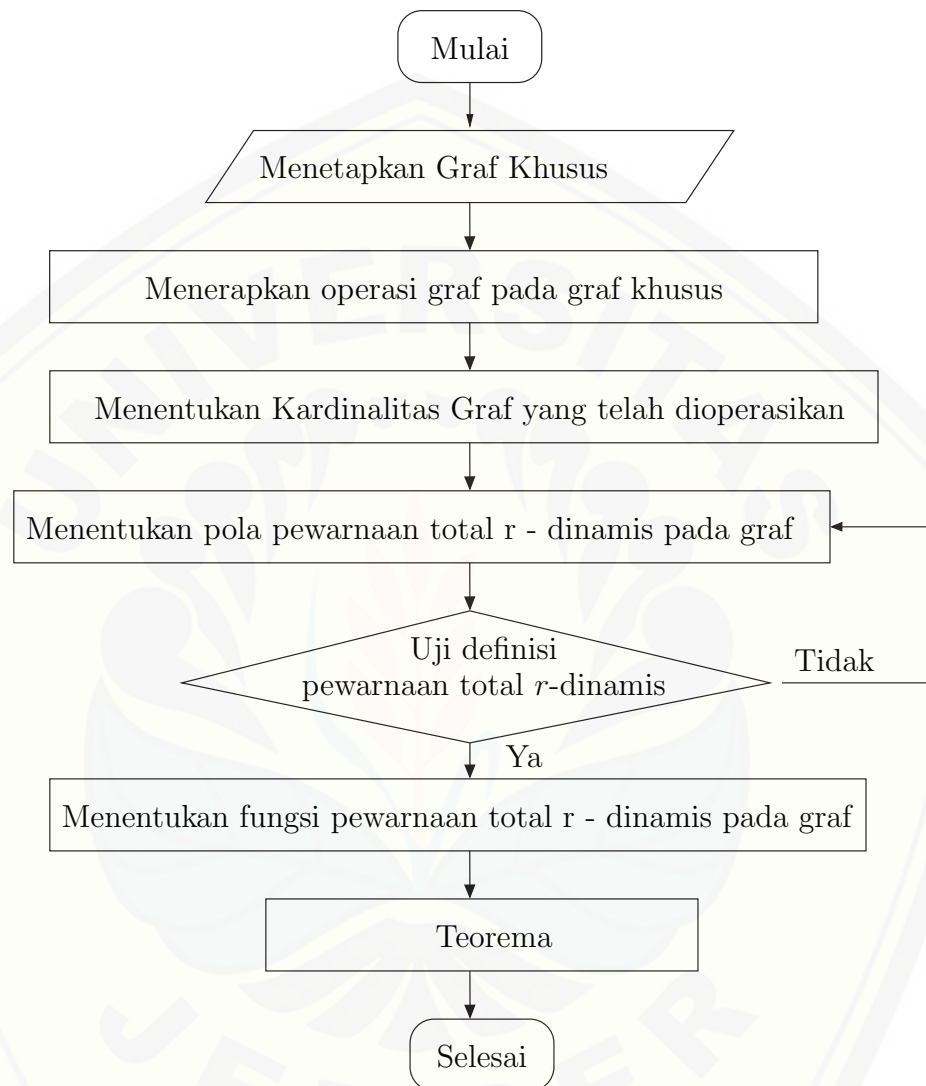
party ($shack(H_{2,2}, v, n)$), *shackle* graf buku ($shack(B_2, v, n)$), *generalized shackle* graf *friendship* ($gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$).

3.4 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian yang dilakukan terkait penelitian tentang pewarnaan total r -dinamis pada beberapa graf khusus dan graf hasil operasi adalah sebagai berikut:

1. menentukan graf-graf khusus sebagai objek penelitian;
2. menerapkan operasi graf pada graf khusus;
3. menentukan kardinalitas dari graf tersebut;
4. menentukan pola pewarnaan total r -dinamis pada graf tersebut;
5. memeriksa definisi pewarnaan total r -dinamis, apabila sudah optimal dilanjutkan dengan menentukan fungsi, apabila belum optimal akan kembali ke tahap sebelumnya yaitu menentukan pola pewarnaan total pada graf;
6. menentukan fungsi pewarnaan total r -dinamis pada graf;
7. pewarnaan total r -dinamis yang telah didapatkan kemudian dibuktikan sehingga menjadi sebuah teorema.

Adapun skema dari rancangan penelitian ini dapat dilihat pada gambar 3.1.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan dari penelitian ini adalah:

- a. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf lintasan adalah $|V(P_n)| = n$ dan $|E(P_n)| = n - 1$. Sedangkan kardinalitas titik dan sisi graf $P_n \odot P_2$ adalah $|V(P_n \odot P_2)| = 3n$ dan $|E(gshack(P_n \odot P_2))| = 4n - 1$. Kardinalitas titik dan sisi dari graf hasil operasi *shackle* $Shack(G_{3,3}, v, n)$ adalah $|V(Shack(G_{3,3}, v, n))| = 8n + 1$ dan $|E(Shack(G_{3,3}, v, n))| = 12n$. Sedangkan graf $Shack(S_5, v, n)$ mempunyai kardinalitas titik dan sisi yaitu $|V(Shack(S_5, v, n))| = 5n + 1$ dan $|E(Shack(S_5, v, n))| = 5n$. Graf $Shack(H_{2,2}, v, n)$ mempunyai kardinalitas titik dan sisi yaitu $|V(Shack(H_{2,2}, v, n))| = 3n + 1$ dan $|E(Shack(H_{2,2}, v, n))| = 4n$. Graf $Shack(B_2, v, n)$ mempunyai kardinalitas titik $|V(Shack(B_2, v, n))| = 5n + 1$ dan kardinalitas sisi $|E(Shack(B_2, v, n))| = 7n$. Kardinalitas titik dan kardinalitas sisi dari graf $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$ adalah $|V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))| = 7n + 2$ dan $|E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))| = 11n + 1$;
- b. Bilangan kromatik total r -dinamis dari graf lintasan P_n adalah $\chi_r''(P_n) = 5$ untuk $r \geq 4$. Bilangan kromatik total r -dinamis pada hasil operasi *crown product* dari graf lintasan $(P_n \odot P_2)$, untuk $n = 2$ adalah $\chi_r''(P_n \odot P_2) = 7$ ketika $r \geq 5$. Sedangkan untuk $n \geq 3$, bilangan kromatik total r -dinamis dari graf tersebut adalah $\chi_r''(P_n \odot P_2) = 9$ ketika $r \geq 8$. Bilangan kromatik total r -dinamis pada graf hasil operasi *shackle* dari graf grid $G_{3,3}$ ($Shack(G_{3,3}, v, n)$) adalah $\chi_r''(Shack(G_{3,3}, v, n)) = 10$ ketika $r \geq 7$. Bilangan kromatik total r -dinamis pada graf hasil operasi *shackle* dari graf bintang S_5 ($Shack(S_5, v, n)$) adalah $\chi_r''(Shack(S_5, v, n)) = 11$ ketika $r \geq 10$. Bilangan kromatik total r -dinamis pada graf hasil operasi *shackle* dari graf *cocktail party* $H_{2,2}$ ($Shack(H_{2,2}, v, n)$) adalah

$\chi_r''(\text{Shack}(H_{2,2}, v, n)) = 11$ ketika $r \geq 8$. Bilangan kromatik total r -dinamis pada graf hasil operasi *shackle* dari graf buku $\text{Shack}(B_2, v, n)$ adalah $\chi_r''(\text{Shack}(B_2, v, n)) = 10$ ketika $r \geq 6$. Bilangan kromatik total r -dinamis pada graf hasil operasi *generalized shackle* dari graf *friendship* \mathbf{F}_4 adalah $\chi_r''(\text{gshack}(\mathbf{F}_4, e, n)) = 17$ ketika $r \geq 16$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai bilangan kromatik pewarnaan total r -dinamis pada graf khusus dan graf hasil operasi dimana graf khusus yang digunakan adalah graf lintasan, graf grid, graf bintang, graf *cocktail party*, graf buku dan graf *friendship*. Dengan operasi yang digunakan pada penelitian ini adalah operasi *crown product*, *shackle* dan *generalized shackle*, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca agar melakukan penelitian di bidang ini. Hal ini dikarenakan topik pada penelitian ini tergolong topik baru dan perlu pengembangan yang lebih luas. Kemudian terkait hasil penelitian dapat disarankan untuk mengembangkan penelitian tentang pewarnaan total r -dinamis pada graf lainnya dengan operasi yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Abidin, W. dan Masni. 2014. *Pewarnaan Sisi Pada Graf yang Berhubungan dengan Sikel*. Jurnal MSA: UINAM.
- Alishasi, M. 2007. *On The Dynamic Coloring of Graphs*. Jurnal: Discrete Applied Mathematics.
- Bača dkk. 2007. *Edge-Antimagic Graphs*. Discrete Mathematics 307 (2007) 1232-1244.
- Budayasa, K. 2007. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Universitas Negeri Surabaya.
- Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- Geetha, J. dan Somasundaran, K. Tanpa Tahun. *Total Chromatic Number dan Some Topological Indices*. Artikel (Tidak dipublikasikan). India: Departemen of Mathematics, Amrita Vishwa Vidyapeetham.
- Harsya, A.Y., Dafik, dan Agustin, I.H., 2014. *Pewarnaan Titik Pada Graf Sikel dengan Graf Lintasan*. Artikel (Tidak dipublikasikan). Jember: UNEJ.
- Hartsfield, N. and Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. London: Accademic Press Limited.
- Jahanbekam, S., dkk. 2014. *On r-dynamic Coloring of Graphs*. Artikel (Tidak Dipublikasikan).
- Kang, R., Muller, T., dan West, D. B. 2015. *On r-Dynamic Coloring of Grids*. *Discrete Applied Mathematics*. **186**: 286-290.
- Khud. 2010. *Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Gabungan Saling Lepas Graf Banana Tree*. Tidak Dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Kowalik, L., Sereni, J., dan Skrekovski, R. 2008. *Total-Coloring of Plane Graphs with Maximum Degree Nine*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

- Lai, H. dan Montgomery, B. 2002. *Dynamic Coloring of Graphs*. Artikel (Tidak Dipublikasikan). Morgantown: West Virginia University.
- Lipschutz dan Lipson. 2002. *Matematika Diskrit Jilid 2*. Jakarta: Salemba Teknika
- Lukito, A dan Nurhidayat, A. (Tanpa Tahun). *Grup Automorfisme Graf Helm, Graf Helm Tertutup, Dan Graf Buku*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya
- Maryati, T. K., Salman, A., Baskoro, E. T., Ryan, J. Miller, M. 2010. *On H Supermagic Labellings for Certain Shackles and Amalgamations of A Connected Graph Antimagic Total Labelings For Shackles of A Connected Graph*. *Utilitas Math* 83, 333-342.
- Meganingtyas, D.E.W. 2015. *Analisis Pewarnaan r -Dinamis Pada Graf-Graf Khusus*. Tidak Dipublikasikan (Skripsi). Jember: UNEJ.
- Munir, Rinaldi. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.
- Nugroho, D.B. 2008. *Catatan Kuliah (2 SKS) MX 324 Pengantar Teori Graf*. Universitas Kristen Satya Wacana.
- Rahajeng, B. dan Rahmawati, N. 2014. *Dekomposisi Graf Sikel, Graf roda, Graf Gir dan Graf Persahabatan*. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.
- Slamin. 2009. *Desain Jaringan : Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember.
- Tarmidzi, M. D. 2015. *Nilai Kromatik dan Pewarnaan Titik r -Dinamis pada Graf Khusus dan Operasi Shaket*. Tidak Diterbitkan. Skripsi. Jember: Universitas Jember.
- Wibisono, S. 2008. *Matematika Diskrit Edisi 2*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Weisstein, Eric. (Tanpa Tahun). *Grid Graph From MathWorld-A Wolfram Web Resources*. <http://mathworld.wolfram.com/GridGraph.html>. [diakses tanggal 06 Juni 2016].

Wulandari,N.I. 2015. *Analisis r-Dynamic Vertex Coloring Pada Hasil Operasi Graf Khusus*. Tidak Dipublikasin (Skripsi). Jember: UNEJ.

