NILAI KETAKTERATURAN JARAK DARI FAMILI GRAF RODA

TESIS

Oleh

Tanti Windartini
NIM 131820101003

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER

2015

NILAI KETAKTERATURAN JARAK DARI FAMILI GRAF RODA

TESIS

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S2)
dan mencapai gelar Magister Sains

Oleh

Tanti Windartini
NIM 131820101003

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015

PERSEMBAHAN

Tesis ini saya persembahkan untuk:

1. Allah SWT yang memberikan karunia kehidupan yang indah;
2. orang tuaku Ibunda Tik Amah dan Ayahanda Kuswadi yang senantiasa memberikan dukungan, doa, nasihat, dan kasih sayang dalam meraih cita-citaku;
3. Kakakku Sukma Erliana, S.E dan keluarga kecilnya, serta adikku Edwin Firdhaus Saputra yang memberikan dukungan dan keceriaan dalam hidupku;
4. guru-guru sejak taman kanak-kanak sampai perguruan tinggi yang telah mendidik, memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
5. Almamater Program Studi Magister Matematika FMIPA Universitas Jember, Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember, SMAN 2 Genteng, SMPN 1 Genteng, SDN 2 Setail, SD Muhammadiyah 9 Jalen, dan TK Aba 7 Jalen;
6. karier yang akan saya raih kelak.

MOTTO

"Beruntung itu bertemunya antara kemauan dan kemampuan."*)

"ILMU, merupakan investasi seumur hidup
yang tak pernah mengenal kata RUGI."*)

*) Tanti Windartini/Penulis

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Tanti Windartini

NIM : 131820101003

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa tesis yang berjudul: "Nilai Ketakteraturan Jarak dari Famili Graf Roda" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata dikemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Agustus 2015
Yang menyatakan,

Tanti Windartini
NIM. 131820101003

TESIS

NILAI KETAKTERATURAN JARAK DARI FAMILI GRAF RODA

Oleh

Tanti Windartini
NIM 131820101003

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D
Dosen Pembimbing Anggota : Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si

PENGESAHAN

Tesis berjudul "Nilai Ketakteraturan Jarak dari Famili Graf Roda" telah diuji dan disahkan pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,

Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D.
NIP.19670420 199201 1 001

Sekretaris,

Kosala Dwidja Purnomo S.Si, M.Si.
NIP. 19690828 199802 1 001

Penguji I,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19680802 199303 1 004

Penguji II,

Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D.
NIP.19591220 198503 1 002

Mengesahkan,
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D.
NIP. 19610108 198602 1 001

RINGKASAN

Nilai Ketakteraturan Jarak dari Famili Graf Roda; Tanti Windartini, 131820101003; 2015: 60 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf merupakan bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti. Beberapa permasalahan akan lebih jelas untuk diterapkan apabila permasalahan tersebut dimodelkan dalam bentuk graf. Graf dapat dikatakan sebagai bentuk visual dari beberapa objek, dimana kita dapat memisalkan objek-objek tersebut sebagai titik (*vertex*) yang memiliki hubungan antara objek satu dengan yang lain. Hubungan antar objek dapat dinyatakan sebagai garis atau sisi (*edge*).

Pada teori graf, terdapat satu topik yang dalam beberapa waktu terakhir ini mendapat perhatian khusus yaitu tentang pelabelan suatu graf. Salah satu jenis pelabelan graf adalah pelabelan ketakteraturan jarak dari graf G merupakan pemberian label bilangan asli (label yang digunakan boleh berulang) pada himpunan titik dari graf G sedemikian hingga bobot setiap titik di G adalah berbeda. Bobot titik x di G didefinisikan sebagai jumlah dari semua label titik yang bertetangga dengan x (jarak 1 dari x). Dalam melabeli suatu graf G terdapat beberapa pola pelabelan. Dengan kata lain, pelabelannya tidak tunggal. Permasalahan yang perlu diperhatikan adalah bagaimana melabeli graf tersebut sedemikian hingga bilangan asli terbesar yang dijadikan label adalah seminimum mungkin. Bilangan asli terbesar yang minimum tersebut dinamakan dengan nilai ketakteraturan jarak (*distance irregularity strength*) dari graf G yang dinotasikan dengan $dis(G)$.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui berapakah dis dari famili graf roda baik dari yang tunggal, gabungan isomorfis, famili graf roda dengan bandul serta pada operasi penjumlahan. Pada penelitian ini yang dibahas adalah graf friendship f_n, graf bunga Fl_n, graf helm H_n, graf kipas F_n. Penelitian ini diawali dengan menentukan nilai batas bawah dari dis famili graf roda. Selanjutnya menentukan batas atas dengan mencari formulasi dari pela-

belan ketakteraturan jarak dari famili graf roda sedemikian hingga setiap bobot titiknya berbeda. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik, yaitu dengan menggunakan lemma yang telah ada kemudian diterapkan dalam pelabelan ketakteraturan jarak pada famili graf roda.

Sesuai dengan tujuan dan hasil dalam penelitian ini, ditemukan beberapa teorema baru mengenai dis dari nilai ketakteraturan jarak dari famili graf roda yaitu: $dis(f_n) = 2n$; $dis(H_n) = n$; $dis(Fl_n) = n$; $dis(F_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, untuk $n \geq 4$; $dis(2f_n) = 2n+1$; $dis(2H_n) = 2n$, untuk $n \geq 6$; $dis(\mathcal{P}f_n) = 2n$; dan $dis(\mathcal{P}Fl_n) = n$; $dis(f_n + K_1) = 2n$; $dis(H_n + K_1) = n$; $dis(Fl_n + K_1) = n$; $dis(F_n + K_1) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, untuk $n \geq 4$.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul Nilai Ketakteraturan Jarak dari Famili Graf Roda. Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata dua (S2) pada Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Prof. Drs. Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Utama, Kosala Dwidja Purnomo S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Penguji I dan Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc., Ph.D selaku Dosen Penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, perhatian dan masukan demi terselesainya tesis ini;
3. Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., M.Si selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing serta memberi dukungan secara moral selama menjadi mahasiswa di Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. dosen, teknisi laboratorium serta administrasi Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, terima kasih atas segala bimbingannya selama ini;
5. teman-teman angkatan 2013, teman-teman kesayangan (Icha, Kiki, Neni, Sandra) yang senantiasa membantuku dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;

6. seseorang yang dilarang keras disebutkan namanya layaknya "Lord Voldemort" yang selalu mampu memberikan suntikan semangatnya untuk saya selama ini;
7. teman-teman kerja di SMA Negeri 2 Genteng yang selalu baik hati dan pengertian atas penderitaan anak kuliah yang disambi kerja;
8. teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka dan duka untuk menemukan rumus dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
9. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tesis ini. Akhirnya penulis berharap, semoga tesis ini dapat bermanfaat.

Jember, Agustus 2015
Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$G(V,E)$	=	Sebarang graf tak berarah dengan V adalah himpunan tak kosong dari semua titik dan E adalah himpunan sisi
v_n	=	Titik ke-n pada suatu graf
e_n	=	Sisi ke-n dari suatu graf
$\|V(G)\|$	=	Banyaknya titik dari graf G yang disebut *order*
$\|E(G)\|$	=	Banyaknya sisi dari graf G yang disebut ukuran (*size*)
dis	=	*Distance irregularity strength* atau nilai minimum dari label k yang terbesar
δ	=	Derajat minimum suatu graf
Δ	=	Derajat maksimum suatu graf
$deg(v)$	=	Derajat
$\lceil x \rceil$	=	Bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan dengan x
$\lfloor x \rfloor$	=	Bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan dengan x
mG	=	Banyaknya gabungan graf
$\lambda(v)$	=	Label sebuah titik pada suatu graf
$\lambda(e)$	=	Label sebuah sisi pada suatu graf
$wt(v)$	=	Bobot titik
$wt(e)$	=	Bobot sisi
c	=	titik pusat
f_n	=	Graf friendship
H_n	=	Graf helm
Fl_n	=	Graf bunga
F_n	=	Graf kipas
$\mathcal{P}f_n$	=	Graf friendship dengan bandul
$\mathcal{P}Fl_n$	=	Graf bunga dengan bandul

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti. Beberapa permasalahan akan lebih jelas untuk diterapkan apabila permasalahan tersebut dimodelkan dalam bentuk graf. Graf dapat dikatakan sebagai bentuk visual dari beberapa objek, dimana kita dapat memisalkan objek-objek tersebut sebagai titik (*vertex*) yang memiliki hubungan antara objek satu dengan yang lain. Hubungan antar objek dapat dinyatakan sebagai garis atau sisi (*edge*). Banyak sekali aplikasi yang dapat menggunakan graf sebagai alat untuk merepresentasikan suatu persoalan sehingga dapat terselesaikan dengan baik. Beberapa aplikasi yang sering digunakan yaitu tentang menentukan lintasan terpendek dan persoalan tukang pos Cina.

Pada teori graf, terdapat satu topik yang dalam beberapa waktu terakhir ini mendapat perhatian khusus yaitu tentang pelabelan suatu graf. Pelabelan graf G merupakan pemetaan dari elemen-elemen graf G ke bilangan asli. Terdapat tiga jenis pelabelan pada graf, yaitu pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan sisi (*edge labeling*), dan pelabelan total (*total labeling*). Dalam pembagian jenis pelabelan graf ini didasarkan pada domain dari pelabelan graf tersebut. Untuk pelabelan dengan domain himpunan titik G maka pelabelannya disebut pelabelan titik. Pelabelan dengan domain himpunan sisi G disebut pelabelan sisi, sedangkan pelabelan dengan domain himpunan titik dan himpunan sisi G maka disebut pelabelan total. Karena domain dari fungsi pelabelan ketakteraturan jarak pada graf G adalah titik maka termasuk dalam jenis pelabelan titik.

Pelabelan ketakteraturan jarak dari graf G merupakan pemberian label bilangan asli (label yang digunakan boleh berulang) pada himpunan titik dari graf G sedemikian hingga bobot setiap titik dari G adalah berbeda. Bobot titik x di G didefinisikan sebagai jumlah dari semua label titik yang bertetangga dengan

x (jarak 1 dari x) (Slamin, 2013). Dalam melabeli suatu graf G terdapat beberapa pola pelabelan. Dengan kata lain, pelabelannya tidak tunggal. Permasalahan yang perlu diperhatikan adalah bagaimana melabeli graf tersebut sedemikian hingga bilangan asli terbesar yang dijadikan label adalah seminimum mungkin. Bilangan asli terbesar yang minimum tersebut dinamakan dengan nilai ketakteraturan jarak (*distance irregularity strength*) dari graf G yang dinotasikan dengan $dis(G)$.

Terdapat beberapa graf yang termasuk dalam famili graf roda dimana graf tersebut memiliki karakteristik bentuk khusus, diantaranya adalah graf friendship (f_n), graf helm (H_n), graf bunga (Fl_n), dan graf kipas (F_n). Penelitian tentang penentuan nilai ketakteraturan dari beberapa graf sudah dilakukan diantaranya adalah graf lengkap, graf lintasan, graf lingkaran, graf roda sudah pernah dilakukan oleh Slamin, 2013.

Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai pelabelan ketakteraturan jarak dari famili graf roda dikarenakan belum adanya peneliti yang melakukan penelitian tentang pelabelan ketakteraturan jarak pada famili graf roda sebelumnya. Setelah dilakukan pelabelan ketakteraturan jarak pada famili graf roda, maka akan didapatkan *distance irregularity strength* dari graf G yang merupakan famili dari graf roda. Beberapa keterangan di atas yang melatar belakangi penulis untuk melakukan penelitian dengan judul ***"Nilai Ketakteraturan Jarak dari Famili Graf Roda"***.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana cara menentukan dis dari:

1. famili graf roda tunggal?
2. gabungan isomorfis famili graf roda?
3. famili graf roda dengan bandul?
4. operasi dari famili graf roda dengan K_1?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam tugas akhir ini dibatasi pada:

1. famili graf roda yang tunggal dibatasi pada graf friendship, graf helm, graf bunga, dan graf kipas;
2. gabungan isomorfis famili graf roda dibatasi pada graf friendship dan graf helm;
3. gabungan isomorfis famili graf roda dibatasi pada graf helm dengan $n \geq 6$;
4. famili graf roda dengan bandul dibatasi pada graf friendship dan graf bunga;
5. operasi dari famili graf roda dibatasi pada graf friendship, graf helm, graf bunga, dan graf kipas;
6. kasus pelabelan ketakteraturan jarak pada graf tidak berarah.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui dis dari:

1. famili graf roda tunggal;
2. gabungan isomorfis famili graf roda;
3. famili graf roda dengan bandul;
4. operasi dari famili graf roda dengan K_1.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini adalah:

1. menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf, yaitu mengetahui keberadaan dari pelabelan ketakteraturan jarak (dis) pada famili graf roda;

2. memberikan kontribusi terhadap perkembangan pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf;
3. memberikan motivasi pada peneliti lain untuk meneliti mengenai pelapelan ketakteraturan jarak pada famili graf yang lain.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan tentang materi yang memiliki kaitan erat dengan teori graf. Pengertian dasar tersebut diambil dari beberapa sumber yang disebutkan dalam daftar pustaka.

2.1 Terminologi Dasar Graf

Dalam mempelajari graf terdapat beberapa istilah yang berkaitan dengan graf. Berikut ini beberapa definisi terminologi dasar graf yang akan dipakai dalam penelitian ini.

Definisi 2.1. *Sebuah graf G merupakan himpunan (V(G); E(G)), dimana V(G) adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan E(G) adalah sebuah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tak terurut u; v dari titik-titik u; v* $\in$ *V(G) yang disebut sisi. V(G) disebut himpunan titik dari G dan E(G) disebut himpunan sisi dari G.*

Dari definisi di atas menyatakan bahwa himpunan sisi $E(G)$ bisa merupakan suatu himpunan kosong. Jika hal ini terjadi, maka G disebut graf kosong. Graf G bisa berhingga atau tidak berhingga, tergantung pada $V(G)$ berhingga atau tidak berhingga. Banyaknya anggota himpunan $V(G)$ dinotasikan dengan $|V|$ dan untuk himpunan $E(G)$ dinotasikan dengan $|E|$.

Titik u pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) dengan titik v jika terdapat sisi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Sisi tersebut dinotasikan dengan uv. Titik v dikatakan hadir (*incident*) pada sisi e jika v adalah titik akhir dari sisi e. Demikian juga sisi e dikatakan hadir pada titik v ketika titik v menjadi titik akhir dari sisi e. Derajat (*degree*) dari suatu titik v adalah banyaknya sisi yang hadir pada titik v. Derajat dari titik v dinotasikan dengan $deg(v)$. Titik dengan derajat 0 disebut titik terisolir, sedangkan titik dengan derajat 1 disebut titik terminal.

Suatu graf G dikatakan graf reguler jika setiap titiknya mempunyai derajat yang sama, jika tidak maka graf tersebut dikatakan non-reguler. Derajat terbesar dari graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$ adalah derajat terbesar yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Derajat terkecil dari graf G dinotasikan dengan $\delta(G)$ adalah derajat terkecil yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik lainnya.

Deretan sisi-sisi yang membentuk sambungan tidak putus pada graf G disebut jalan (*walk*). Jika jalan tersebut tidak mengandung sisi yang berulang maka jalan tersebut disebut jalur (*trail*). Jika jalur ini tidak mengandung sisi yang berulang maka disebut lintasan (*path*). Dengan kata lain, lintasan pada graf G adalah jalan yang tidak mengandung titik dan sisi yang berulang. Suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk sembarang dua titik u dan v pada graf G terdapat lintasan dari titik u ke v. Jarak atau *distance* dari titik u ke v dinotasikan dengan $\delta(u, v)$, adalah panjang lintasan (*path*) minimum dari titik u ke titik v (Slamin, 2009: 15).

2.2 Jenis-jenis Graf

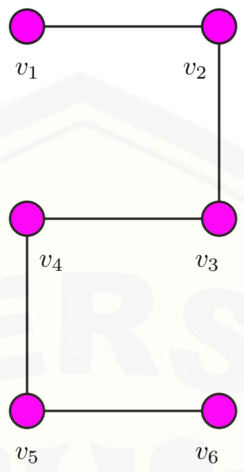
Terdapat beberapa jenis graf ditinjau dari definisi graf secara umum, diantaranya adalah sebagai berikut:

1. Graf Lintasan

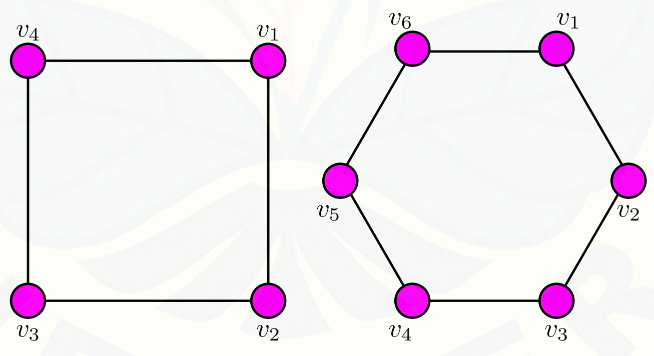
   Graf lintasan P_n adalah graf yang hanya terdiri dari satu lintasan dengan n titik. Graf lintasan memiliki himpunan titik $V(P_n) = \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = n$ dan himpunan sisi $E(P_n) = \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = n - 1$. Graf lintasan ditunjukkan pada Gambar 2.1.

2. Graf Lingkaran (*Cycle*)

   Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Graf lingkaran C_n hanya dapat terbentuk jika $n \geq 3$. Graf lingkaran memiliki himpunan titik $V(C_n) = \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = n$ dan himpunan sisi $E(C_n) = \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = n$. Contoh dari graf lingkaran bisa dilihat pada Gambar 2.2.



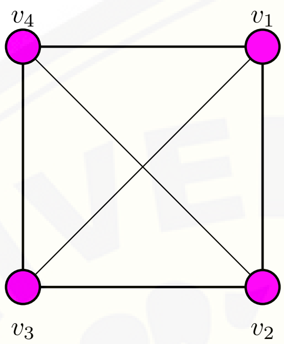
Gambar 2.1 Graf Lintasan P_6

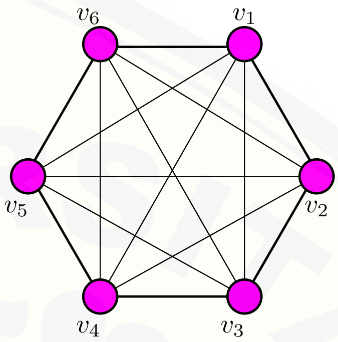


Gambar 2.2 Graf Lingkaran C_4 dan C_6

3. Graf Lengkap *(Complete Graph)*

   Graf lengkap K_n adalah graf yang setiap titiknya berhubungan dengan titik-titik yang lain (Hartsfield dan Ringel, 1994: 14). Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi. Gambar 2.3 menunjukkan graf lengkap K_4 dan K_6.

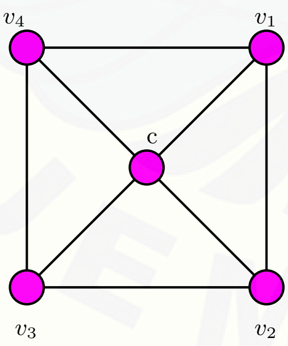


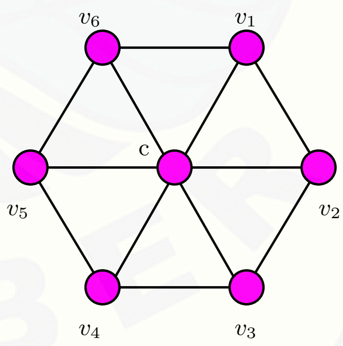


Gambar 2.3 Graf Lengkap K_4 dan K_6

4. Graf Roda (*Wheel Graph*)

   Graf roda W_n adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf lingkaran C_n dengan suatu titik pusat. Graf roda dapat dibentuk jika $n \geq 3$. Graf roda memiliki himpunan titik $V(W_n) = \{c\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = n + 1$ dan himpunan sisi $E(W_n) = \{v_iv_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{cv_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 2n$. Gambar 2.4 merupakan graf roda.

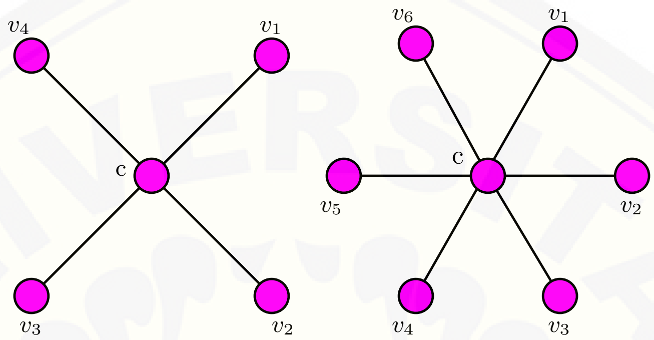




Gambar 2.4 Graf Roda W_4 dan W_6

5. Graf Bintang (*Star Graph*)

   Graf bintang S_n adalah suatu graf terhubung yang mempunyai 1 titik berderajat $n+1$ yang disebut pusat, dan n titik lain yang berderajat 1. Graf bintang memiliki himpunan titik $V(S_n) = \{c\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = n+1$ dan himpunan sisi $E(S_n) = \{cv_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = n$ dengan $n \geqslant 3$. Gambar 2.5 merupakan graf bintang.



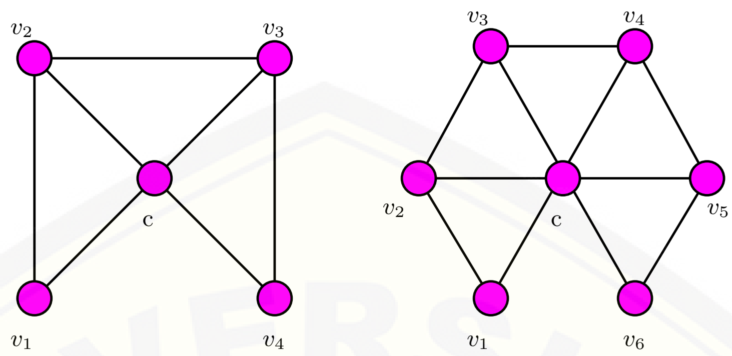
Gambar 2.5 Graf Bintang S_4 dan S_6

6. Graf Kipas (*Fan Graph*)

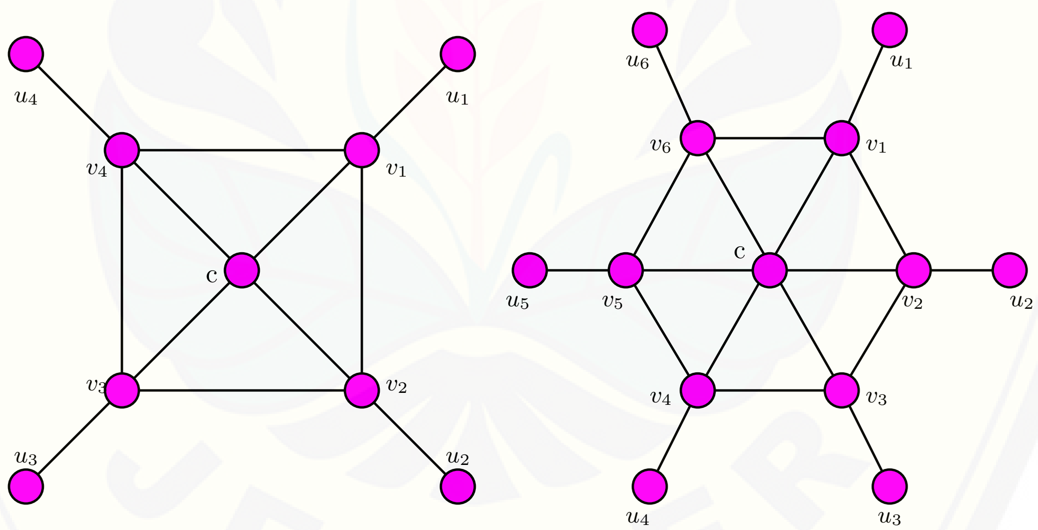
   Graf kipas F_n adalah sebuah graf yang diperoleh dari sebuah graf roda dengan menghilangkan satu sisi pada graf lingkaran. Graf kipas dapat dibentuk dengan $n \geq 3$. Graf kipas memiliki himpunan titik $V(F_n) = \{c\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = n+1$ dan himpunan sisi $E(F_n) = \{cv_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 2n-1$. Gambar 2.6 merupakan graf kipas.

7. Graf Helm

   Graf helm H_n merupakan graf yang terbentuk dari sebuah graf roda W_n dengan penambahan sisi bandul pada setiap titik dari sikel ke-n. Graf helm memiliki himpunan titik $V(H_n) = \{c\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = 2n+1$ dan himpunan sisi $E(H_n) = \{cv_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i u_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 3n$ dengan $n \geqslant 3$. Gambar 2.7 merupakan graf helm.



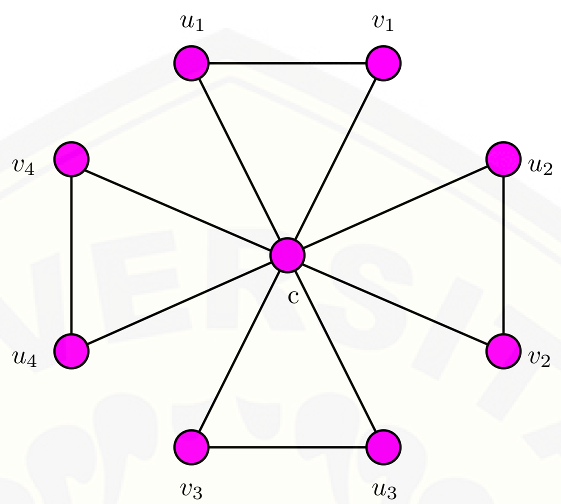
Gambar 2.6 Graf Kipas F_4 dan F_6



Gambar 2.7 Graf Helm H_4 dan H_6

8. Graf Friendship

   Graf friendship f_n terdiri atas n segitiga dengan tepat satu titik c yang disebut titik pusat. Graf friendship dapat dibentuk dengan $n \geq 3$.



Gambar 2.8 Graf Friendship f_4

   Gambar 2.8 diatas dapat diketahui bahwa graf friendship memiliki himpunan titik $V(f_n) = \{c\} \cup \{u_i, v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = 2n+1$ dan himpunan sisi $E(f_n) = \{cu_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{cv_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_iv_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 3n$.

9. Graf Gir

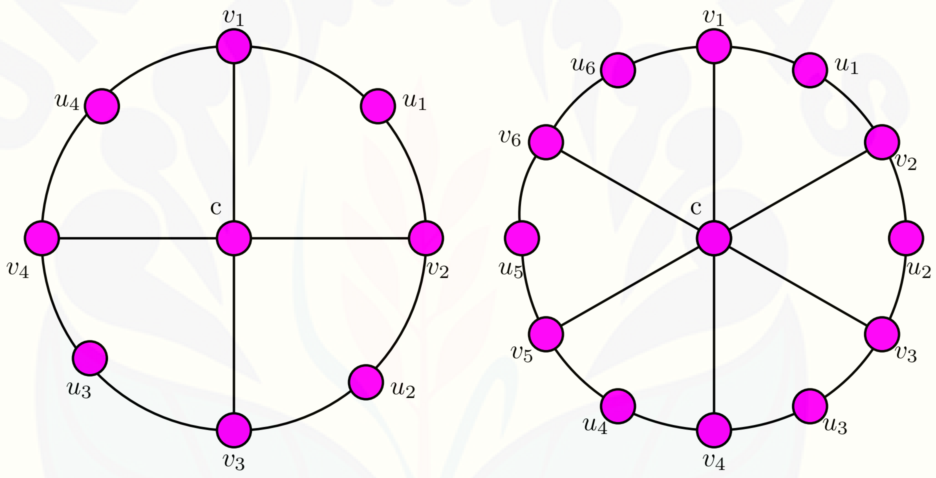
   Graf gir G_n adalah graf yang dibentuk dari graf lingkaran C_n untuk n genap dengan menambahkan satu titik pusat kemudian menghubungkan titik pusat tersebut ke $\frac{n}{2}$ titik di C_n secara bergantian. Graf gir memiliki himpunan titik $V(G_n) = \{c\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = 2n+1$ dan himpunan sisi $E(G_n) = \{cv_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iu_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 3n$ dengan $n \geqslant 3$. Gambar 2.9 adalah contoh dari graf gir.

10. Graf Web

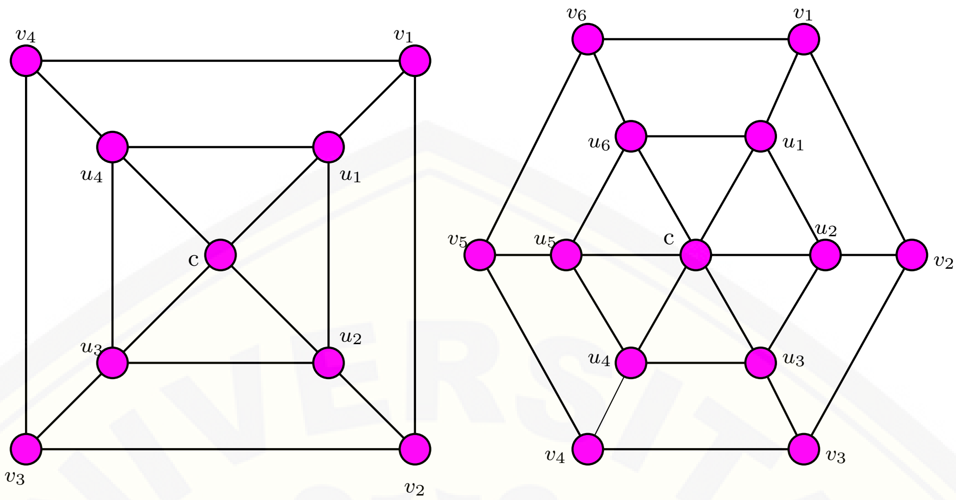
   Graf web Wb_n adalah graf yang diperoleh dari graf helm dengan cara menambahkan titik-titik bandul dan menghubungkan satu sama lainnya. Graf web memiliki himpunan titik $V(Wb_n) = \{c\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = 2n+1$ dan himpunan sisi $E(Wb_n) = \{cu_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i u_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i u_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 4n$ dengan $n \geqslant 3$. Gambar 2.10 adalah contoh dari graf web.

11. Graf Bunga (*flower Graph*)

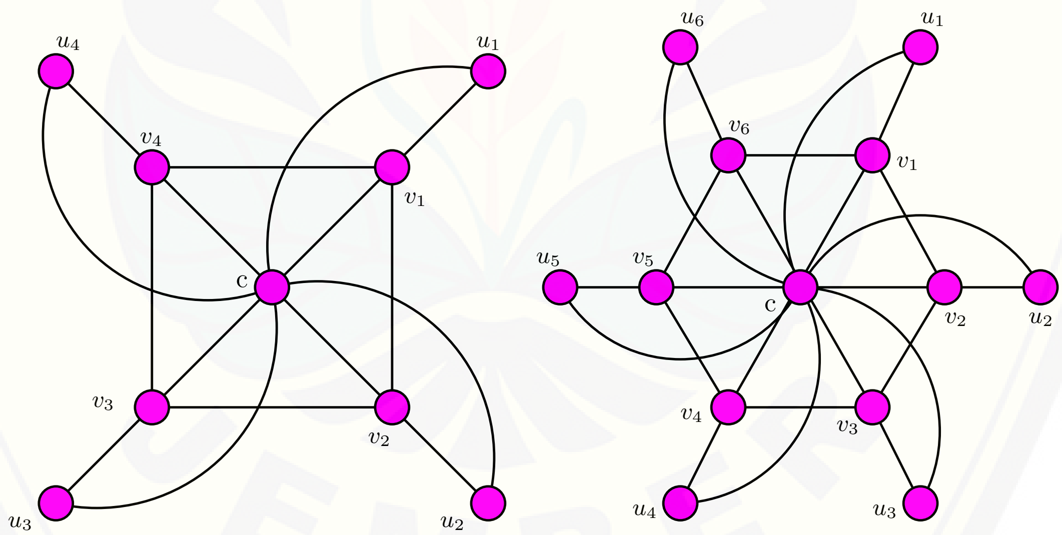
    Graf bunga Fl_n adalah graf yang diperoleh dari sebuah graf helm dengan menghubungkan masing-masing titik terluarnya ke titik pusat helm. Graf bunga memiliki himpunan titik $V(Fl_n) = \{C\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = 2n + 1$ dan himpunan sisi $E(Fl_n) = \{Cu_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Cv_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i u_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 4n$ dengan $n \geqslant 3$. Gambar 4.3 adalah contoh dari graf bunga.



Gambar 2.9 Graf Gir G_4 dan G_6



Gambar 2.10 Graf Web Wb_4 dan Wb_6

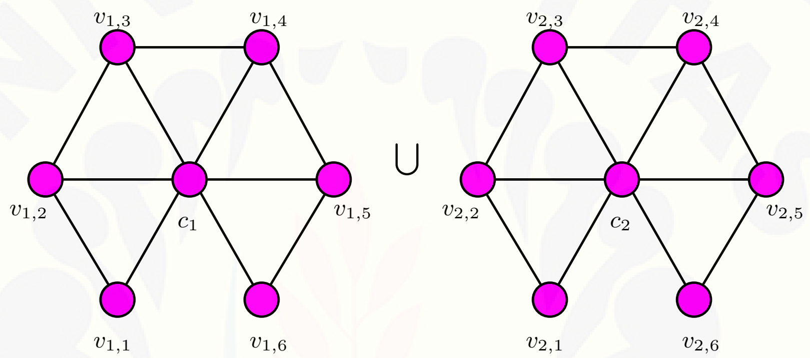


Gambar 2.11 Graf Bunga Fl_4 dan Fl_6

2.3 Gabungan Graf

Menurut Abdussakir, *et al.*, (2009: 33), Gabungan dari dua graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titiknya adalah $V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1) \cup E(G_2)$.

Graf G merupakan gabungan graf G_1 dan G_2, yaitu $G = G_1 \cup G_2$. Graf gabungan mG didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari m copy graf G, atau dapat juga dikatakan sebagai gabungan graf dengan m komponen, dimana setiap komponennya adalah graf G. Dengan kata lain $mG = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \ldots \cup G_m$, dengan $G_1 = G_2 = G_3 = \ldots = G_m = G$. Misalkan graf G mempunyai p titik dan q sisi, maka graf mG mempunyai mp titik dan mq sisi.



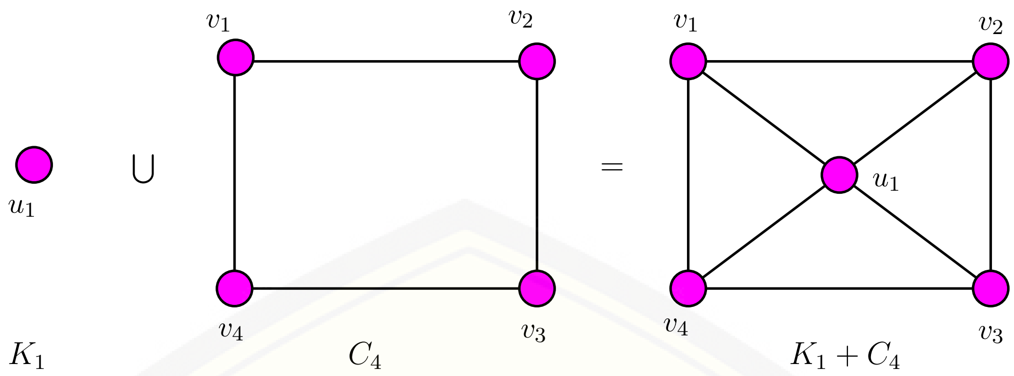
Gambar 2.12 Gabungan Graf Kipas $2F_6$

2.4 Operasi Graf

Operasi graf adalah suatu cara untuk mendapatkan graf baru dengan melakukan suatu operasi tertentu terhadap dua atau lebih graf.

Definisi 2.2. *Graf Join* $(G_1 + G_2)$ *merupakan join dari graf* G_1 *dan* G_2*, dinotasikan dengan* $G = G_1 + G_2$*, adalah graf* G *dimana* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup uv|u \in V(G_1), v \in V(G_2)$ *(Harary, 1994).*

Pada gambar 2.13 menunjukkan operasi *Graph Join* pada graf $K_1 + C_4$.



Gambar 2.13 Contoh operasi *Graph Join*

2.5 Terminologi Pernyataan Matematika

Pada subbab ini akan disajikan beberapa pengertian tentang terminologi pernyataan matematika yang digunakan dalam penelitian.

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi. Sedangkan teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lemma dan akibat. Lemma adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. Lemma biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan lemma, setiap lemma dibuktikan secara individual (Munir, 2010).

Definisi dibuat dengan hanya menggunakan konsep yang tak terdefinisi atau konsep yang telah didefinisikan sebelumnya. Corollary merupakan suatu proposisi yang secara langsung diperoleh dari teorema yang sudah dibuktikan. Sedangkan konjektur adalah suatu pernyataan yang nilai kebenarannya tidak diketahui. Setelah pembuktian berhasil dilakukan, maka konjektur berubah menjadi teorema.

Observasi merupakan kegiatan memperhatikan secara akurat, mencatat fenomena yang muncul, dan mempertimbangkan hubungan antar aspek dalam fenomena tersebut. Observasi yang berarti pengamatan bertujuan untuk mendapatkan data tentang suatu masalah, sehingga diperoleh pemahaman atau sebagai alat pembuktian terhadap keterangan yang diperoleh sebelumnya (Rahayu, 2004).

2.6 Pelabelan Graf

2.6.1 Pelabelan Ketakteraturan Jarak

Definisi 2.3. *suatu pelabelan ketakteraturan jarak dari graf G dengan v merupakan titik-titik dari graf G adalah sebuah pemetaan $\lambda : V \rightarrow \{1, 2, ..., k\}$ sehingga bobot yang dihitung pada setiap titiknya adalah berbeda. Bobot dari sebuah titik x di G didefinisikan sebagai penjumlahan dari semua label titik yang bertetangga ke x (jarak 1 dari x), yaitu:*

$$wt(x) = \sum_{y \in N(x)} \lambda(y)$$

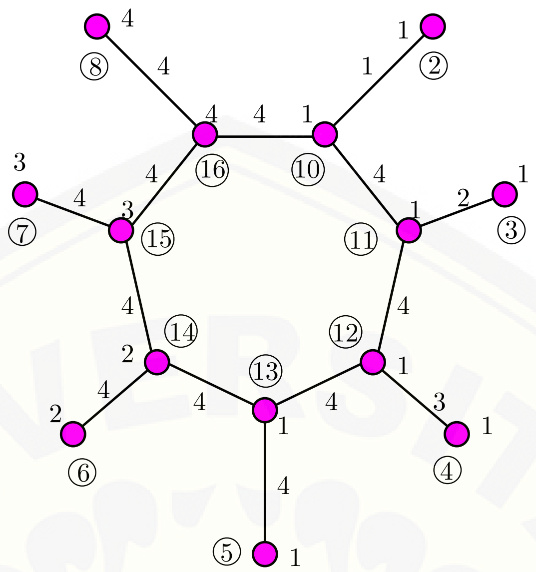
Nilai ketakteraturan jarak dari G dinotasikan dengan $dis(G)$ adalah nilai minimum dari label k yang terbesar (Slamin, 2013).

Pelabelan ketakteraturan jarak dimotivasi oleh pelabelan sebelumnya, yaitu:

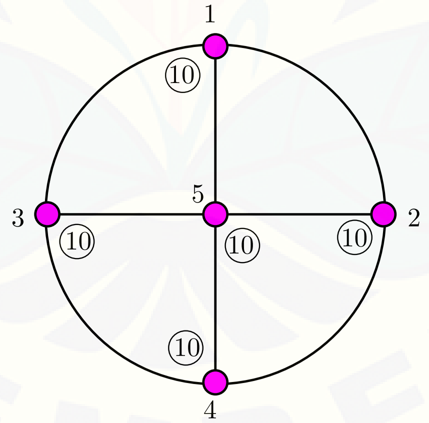
1. Pelabelan Total Titik Irregular
   Pelabelan total titik irregular merupakan pemberian nilai bilangan asli (nilai yang digunakan boleh berulang) pada himpunan titik dan himpunan sisi, dengan bobot setiap titiknya berbeda, yaitu: $wt(x) \neq wt(y)$ untuk setiap titik $x \neq y$. Nilai minimum pada label terbesar yang membuat graf G memiliki pelabelan total titik irregular disebut *total vertex irregularity strength*, dinotasikan dengan $tvs(G)$ (Baca et al., 2007).

2. Pelabelan Jarak Ajaib
   Pelabelan jarak ajaib dari graf G yang berorder n adalah sebuah fungsi bijektif $f : V \rightarrow \{1, 2, ..., n\}$ dengan sifat bahwa ada bilangan bulat k sedemikian hingga $\sum_{u \in N(v)} f(u) = k$ untuk setiap $v \in V$. Konstanta k dinamakan konstanta ajaib dari pelabelan f (Miller et al., 2003).

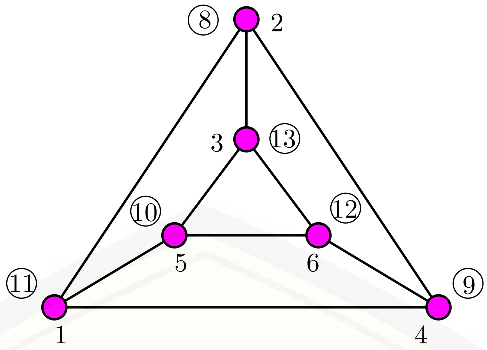
3. Pelabelan Jarak Anti Ajaib
   Sebuah graf G dikatakan sebagai (a, d) - jarak anti ajaib jika ada sebuah fungsi bijektif $f : V \rightarrow \{1, 2, ..., n\}$ sedemikian hingga himpunan semua bobot titik adalah $\{a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d\}$ dimana a dan d bilangan bulat positif dengan $d \geq 0$. Beberapa graf yang mengikuti pelabelan tersebut dinamakan (a, d)-jarak anti ajaib (Arumugam dan Kamatchi, 2012).



Gambar 2.14 Pelabelan total titik irregular pada graf matahari M_7



Gambar 2.15 Pelabelan jarak ajaib pada graf roda W_4



Gambar 2.16 Pelabelan jarak anti ajaib pada graf prisma D_3

Hasil penelitian tentang pelabelan ketakteraturan jarak disajikan sebagai berikut:

Observasi 2.1. *(Slamin, 2013) Misalkan u dan w adalah dua titik yang berbeda pada graf terhubung G. Jika u dan w mempunyai tetangga yang sama,* $N(u) = \lambda(v_1) + \lambda(v_2) + ... + \lambda(v_n)$ *dan* $N(w) = \lambda(v_1) + \lambda(v_2) + ... + \lambda(v_n)$ *sehingga* $N(u) = N(w)$*, maka G tidak mempunyai pelabelan ketakteraturan jarak.*

Terdapat beberapa graf yang tidak dapat dilabeli dengan menggunakan pelabelan ketakteraturan jarak, diantaranya adalah:

1. Complete bipartite graf, $K_{m,n}$ untuk $m, n \geq 3$;
2. Complete multipartite graf, $H_{m,n}$ untuk $m, n \geq 2$;
3. Graf Pohon, T_n untuk $n \geq 3$ yang mengandung titik;
4. Graf Bintang, S_n di titik $n + 1$ untuk $n \geq 2$. dengan sedikitnya dua daun.

Observasi 2.2. *(Slamin, 2013) Misalkan u dan w adalah dua titik yang bertetangga dalam graf terhubung G. Jika N(u) - w = N(w) - u, maka label u dan w harus berbeda sehingga* $\lambda(u) \neq \lambda(w)$.

Lema 2.1. *(Slamin, 2013) Misalkan G adalah sebuah graf yang terhubung pada titik v dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ dan tidak ada titik yang mempunyai tetangga yang sama, maka:*

$$dis(G) \geq \left\lceil \frac{v+\delta-1}{\Delta} \right\rceil$$

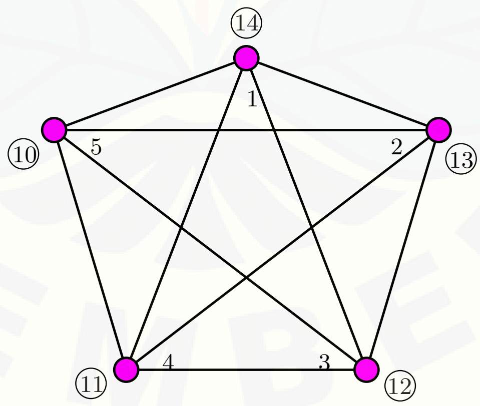
Bukti. Nilai bobot terkecil dari graf G adalah δ. Karena bobot setiap titik harus berbeda dan G mempunyai v titik, maka nilai bobot terbesar dari titik-titik graf G yang paling sedikit adalah $v+\delta-1$. Bobot ini adalah jumlah dari bilangan bulat Δ. Oleh karena itu label terbesar yang berkontribusi untuk bobot ini haruslah paling sedikit $\lceil \frac{v+\delta-1}{\Delta} \rceil$.

Keterangan bahwa batas bawah ini untuk graf secara umum. Namun demikian batas bawah ini dapat ditingkatkan sesuai dengan struktur graf yang akan ditentukan disnya.

2.6.2 Pelabelan Ketakteraturan Jarak pada Graf-graf Khusus

Pada bagian ini disajikan hasil penemuan pelabelan ketakteraturan jarak dari graf khusus, diantaranya sebagai berikut:

Teorema 2.1. *(Slamin, 2013) Misalkan K_n adalah graf lengkap dengan $n \geq 3$, maka $dis(K_n) = n$.*



Gambar 2.17 Pelabelan ketakteraturan jarak pada graf lengkap K_5

Bukti: Misalkan K_n adalah graf lengkap dengan titik $n \geq 3$, maka $dis(K_n) = n$. Jika menggunakan lemma 2.1, batas bawah yang diperoleh adalah :

$$dis(K_n) \geq \left\lceil \frac{n+n-1}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{2n-1}{n} \right\rceil$$

Namun, setiap titik pada K_n bertetangga dengan semua titik sehingga label dari setiap titik harus berbeda agar diperoleh bobot titik yang berbeda. Karena K_n mempunyai n titik, maka label tertinggi pada K_n adalah n sehingga nilai $dis(K_n) \geq n$. Untuk memperoleh batas atas dari $dis(K_n)$ perlu dilakukan pelabelan ketakteraturan jarak untuk menemukan rumus fungsi titik sehingga diperoleh batas atas dari $dis(K_n) \leq n$. Dengan demikian, nilai $dis(K_n) = n$.

Tabel 2.1: Ringkasan nilai *dis* pada beberapa graf khusus

Graf	**Hasil Penelitian**	**Sumber**
Lengkap	$dis(K_n) = n$ untuk $n \geq 3$	Slamin: Graph Master Workshop, 2013
Lintasan	$dis(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ untuk $n \geq 4$	Slamin: Graph Master Workshop, 2013
Lingkaran	$dis(C_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ untuk $n \geq 5$	Slamin: Graph Master Workshop, 2013
Roda	$dis(W_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ untuk $n \geq 5$	Slamin: Graph Master Workshop, 2013
Matahari	$dis(M_n) = n$ untuk $n \geq 3$	Riddiyani: Seminar Nasional Matematika, 2014
Sarang laba-laba	$dis(Sl_n) = n$ untuk $n \geq 3$	Islami: Seminar Nasional Matematika, 2014

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) dan deduktif aksiomatik. Metode pendeteksian pola yaitu mencari pola untuk dilakukan konstruksi himpunan pembeda pada pelabelan ketakteraturan jarak dari famili graf roda sedemikian hingga bobot setiap titiknya berbeda. Sedangkan, deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan lemma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah. Pada penelitian ini mengacu pada Lemma 2.1 seperti yang telah dibahas pada bab sebelumnya. Kemudian metode tersebut diterapkan dalam pelabelan ketakteratuan jarak dari famili graf roda dan operasinya, diantaranya: graf friendship f_n, graf helm H_n, graf bunga Fl_n, dan graf kipas F_n.

3.2 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan agar pemahaman yang diperoleh dari penelitian ini merupakan pemahaman sistematik, maka perlu diberikan pengertian yang jelas mengenai istilah-istilah yang dipergunakan didalam penelitian ini dengan tujuan menghindari perbedaan pengertian makna.

Pada penelitian ini akan dicari berapakah nilai *distance irregularity strength (dis)* pada famili graf roda. Dari graf tersebut diawali dengan menentukan pola dari pelabelan graf kemudian dibentuk rumus fungsi titik dan fungsi bobot titik berdasarkan pola pelabelan yang ditemukan. Dalam hal ini graf khusus yang dikaji adalah graf friendship (f_n), graf helm (H_n), graf bunga (Fl_n), dan graf kipas (F_n). Penamaan graf khusus tersebut dilakukan sebagai berikut:

1. Graf Friendship

   Graf friendship dilambangkan dengan f_n adalah graf yang memiliki $V(f_n) =$

$\{c\} \cup \{u_i, v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = 2n + 1$ dan $E(f_n) = \{cu_i; 1 \leq i \leq n\}$ $\cup\{cv_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_iv_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 3n$ dengan $n \geqslant 3$.

2. Graf Helm
   Graf helm dilambangkan dengan H_n adalah graf yang memiliki $V(H_n) = \{c\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = 2n + 1$ dan $E(H_n) = \{cv_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iu_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 3n$ dengan $n \geqslant 3$.

3. Graf Bunga
   Graf bunga dilambangkan dengan Fl_n adalah graf yang memiliki $V(Fl_n) = \{c\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = 2n + 1$ dan $E(Fl_n) = \{cu_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{cv_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iu_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 4n$ dengan $n \geqslant 3$.

4. Graf Kipas
   Graf kipas dilambangkan dengan F_n adalah graf yang memiliki $V(F_n) = \{c\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = n + 2$ dan $E(F_n) = \{cv_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 2n + 1$ dengan $n \geqslant 2$.

5. Graf Friendship dengan Bandul
   Graf friendship dengan bandul $\mathcal{P}f_n$ adalah graf friendship yang diberi penambahan titik berderajat satu pada masing-masing titik u_i dan v_i untuk $1 \leq i \leq n$.

6. Graf Bunga dengan Bandul
   Graf bunga dengan bandul $\mathcal{P}Fl_n$ adalah graf bunga yang diberi penambahan titik berderajat satu pada masing-masing titik v_i untuk $1 \leq i \leq n$.

7. Graf Friendship join Graf Komplit (K_1)
   Graf friendship f_n join graf komplit K_1 adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(f_n + K_1) = \{c\} \cup \{k\} \cup \{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i, 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(f_n + K_1) = \{ckx_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{kx_iy_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{cky_i, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = 2n + 2$ dan banyaknya sisi $|E| = 5n + 1$.

8. Graf Helm join Graf Komplit (K_1)
   Graf helm H_n join graf komplit K_1 adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(H_n + K_1) = \{c\} \cup \{k\} \cup \{u_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i, 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(H_n+K_1) = \{ckv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{ku_iv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{kv_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = 2(n+1)$ dan banyaknya sisi $|E| = 5n+1$. Graf helm dengan simpul $n \geq 3$.

9. Graf Bunga join Graf Komplit (K_1)
   Graf bunga Fl_n join graf komplit K_1 adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(Fl_n+K_1) = \{c\} \cup \{k\} \cup \{u_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i, 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(Fl_n+K_1) = \{ckv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{cku_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{ku_iv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{kv_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = 2(n+1)$ dan banyaknya sisi $|E| = 6n+1$.

10. Graf Kipas join Graf Komplit (K_1)
    Graf kipas F_n join graf komplit K_1 adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(F_n + K_1) = \{c\} \cup \{k\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = n+2$ dan himpunan sisi $E(F_n+K_1) = \{ckv_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{kv_iv_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 3n$.

3.3 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian pada pelabelan ketakteraturan jarak pada famili graf roda adalah sebagai berikut:

1. menentukan batas bawah dari famili graf roda menggunakan Lemma 2.1 yakni, Misalkan G adalah sebuah graf yang terhubung pada titik v dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ dan tidak ada titik yang mempunyai tetangga yang sama, maka:

$$dis(G) \geq \left\lceil \frac{v+\delta-1}{\Delta} \right\rceil$$

2. menentukan batas atas dari famili graf roda, untuk $n \geq 3$ (kecuali pada graf kipas, untuk $n \geq 4$) dengan cara sebagai berikut:

(a) melabeli setiap titik pada famili graf roda untuk $n \geq 3$ (kecuali pada graf kipas, untuk $n \geq 4$) dengan label $\{1, 2, ..., k\}$ dimana k adalah label terbesar sedemikian hingga setiap bobot titiknya berbeda;

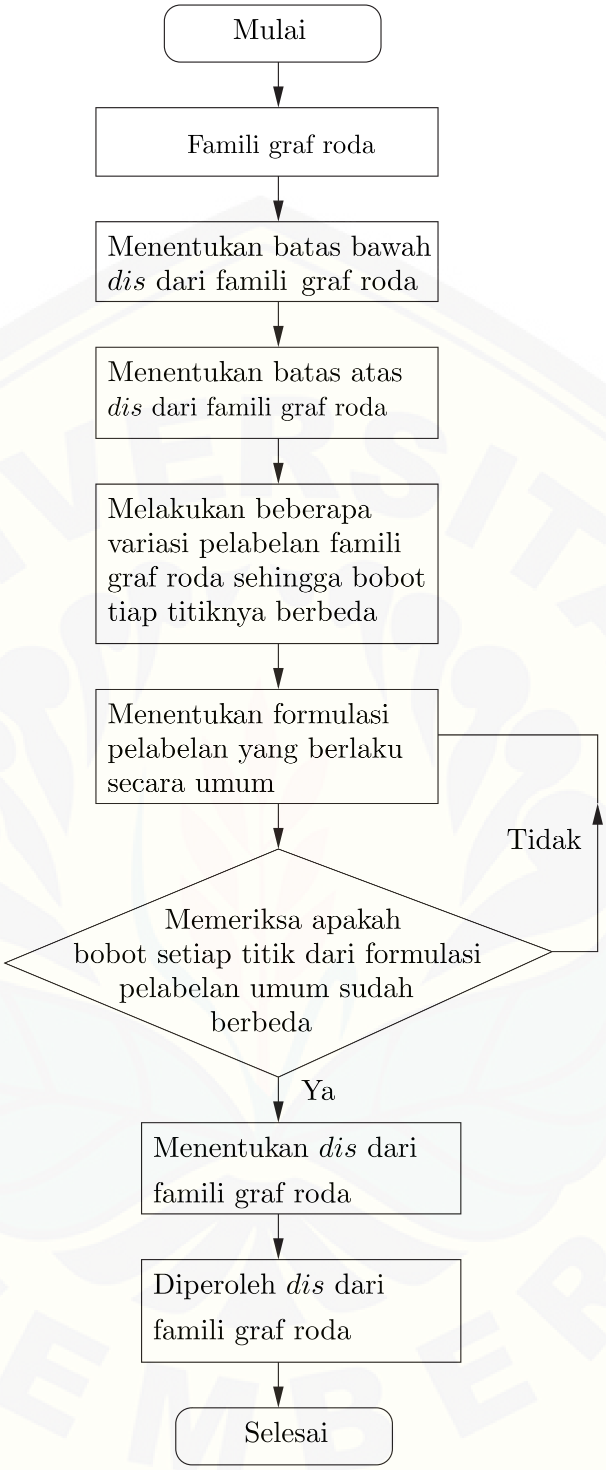
(b) menentukan formulasi dari pelabelan yang berupa fungsi yang memetakan himpunan titik pada bilangan asli;

(c) memeriksa kembali dengan menggunakan formulasi yang sudah ditentukan apakah bobot setiap titiknya sudah berbeda.

3. menentukan nilai dis dari famili graf roda untuk $n \geq 3$ (kecuali pada graf kipas, untuk $n \geq 4$) dengan menggunakan batas bawah dan batas atas yang sudah diperoleh;

4. melakukan prosedur yang sama seperti langkah-langkah di atas untuk menentukan nilai dis dari famili graf roda.

Langkah-langkah penelitian tersebut dapat disajikan dalam sebuah diagram alir pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dipaparkan hasil penelitian dari pelabelan ketakteraturan jarak pada famili graf roda yang meliputi graf friendship, graf helm, graf bunga, dan graf kipas. Hasil penelitian ini berupa teorema tentang nilai ketakteraturan jarak (dis) dari famili graf roda dan graf matahari. Berikut akan disajikan beberapa teorema yang merupakan hasil penelitian ini.

4.1 Nilai Ketakteraturan Jarak dari Famili Graf Roda

Pada bagian ini akan dimulai dengan penentuan nilai ketakteraturan jarak dari graf friendship seperti teorema berikut.

◊ **Teorema 4.1.** *Graf friendship* f_n *memiliki* $dis(f_n) = 2n$.

Bukti. Graf friendship f_n adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(f_n) = \{c\} \cup \{x_i, 1 \le i \le n\} \cup \{y_i, 1 \le i \le n\}$, serta memiliki himpunan sisi $E(f_n) = \{cx_i, 1 \le i \le n\} \cup \{x_iy_i, 1 \le i \le n\} \cup \{cy_i, 1 \le i \le n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = 2n + 1$ dan banyaknya sisi $|E| = 3n$. Pada graf friendship memiliki derajat terkecil $\delta = 2$ dan derajat terbesar $\Delta = 2n$. Berdasarkan Lemma 2.1, maka

$$\begin{aligned} dis(f_n) &\ge \left\lceil \frac{|V| + \delta - 1}{\Delta} \right\rceil \\ &\ge \left\lceil \frac{2n + 1 + 2 - 1}{2n} \right\rceil \\ &\ge \left\lceil \frac{2n + 2}{2n} \right\rceil \end{aligned}$$

Namun demikian, batas bawah ini dapat ditingkatkan sesuai dengan struktur dari graf friendship menjadi $dis(f_n) \ge 2n$. Untuk menunjukkan $dis(f_n) \ge 2n$ cukup ditunjukkan bahwa setiap label titik tepi x_i, y_i untuk $i = 1 \le i \le n$ tidak boleh sama. Kita bagi menjadi 2 kasus.

1. Kedua titik bertetangga, yaitu x_i dan y_i. Karena setiap pasangan simpul dari f_n saling bertetangga dengan pasangan dan titik pusat, maka $N(x_i) - y_i = N(y_i) - x_i$ Menurut observasi 2.2 $\lambda(x_i) \neq \lambda(y_i)$ karena kalau $\lambda(x_i) = \lambda(y_i)$, maka bobot kedua titik tersebut akan sama, sebuah kontradiksi.

2. Kedua titik tidak bertetangga, yaitu x_j dan y_i, dimana $i \neq j$. Andaikan $\lambda(x_j) = \lambda(y_i)$, dimana $i \neq j$. Maka, $w(x_i) = \lambda(c) + \lambda(y_i)$ dan $w(y_j) = \lambda(c) + \lambda(x_j)$. Karena $\lambda(x_j) = \lambda(y_i)$, maka $\omega(x_i) = \omega(y_j)$, juga kontradiksi dengan pengertian pada Definisi 2.3.

Dengan demikian setiap titik tepi x_i, y_i untuk $i = 1 \leq i \leq n$ tidak boleh sama, sehingga:

$$dis(f_n) \geq 2n \tag{1}$$

Untuk menunjukkan bahwa $dis(f_n) \leq 2n$ label titik dari graf friendship sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_1(c) = &\ 1 \\ \lambda_1(x_i) = &\ 2i; \quad i = 1 \leq i \leq n \\ \lambda_1(y_i) = &\ 2i - 1; \quad i = 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dari pelabelan tersebut diperoleh bobot:

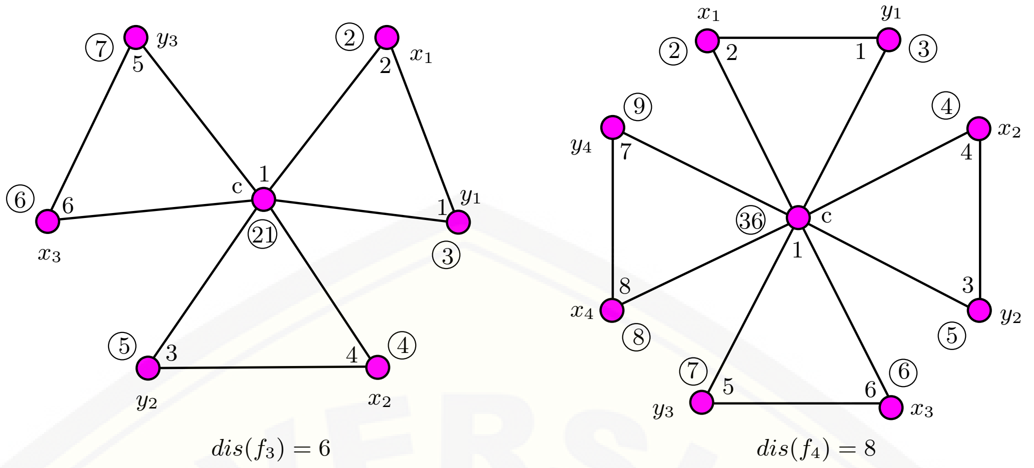
$$\begin{aligned} \omega_1(c) = &\ \tfrac{2n(2n+1)}{2} \\ \omega_1(x_i) = &\ 2i; \quad i = 1 \leq i \leq n \\ \omega_1(y_i) = &\ 2i + 1; \quad i = 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian bobot setiap titik adalah berbeda, sehingga:

$$dis(f_n) \leq 2n \tag{2}$$

Dari batas kedua pada (1) dan (2) tersebut dapat disimpulkan bahwa $dis(f_n)$ $= 2n$. □

Gambar 4.1 mengilustrasikan contoh pelabelan ketakteraturan jarak dari graf friendship untuk $dis(f_3) = 6$ dan $dis(f_4) = 8$.



Gambar 4.1 Pelabelan jarak pada graf friendship

Selanjutnya pada graf helm akan dimulai dengan penentuan nilai ketakteraturan jarak seperti pada teorema berikut.

◊ **Teorema 4.2.** *Graf helm H_n memiliki $dis(H_n) = n$.*

Bukti. Graf helm H_n adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(H_n) = \{c\} \cup \{u_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i, 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(H_n) = \{cv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_iv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = 2n + 1$ dan banyaknya sisi $|E| = 3n$. Graf helm dengan simpul $n \geq 3$ memiliki derajat terkecil $\delta = 1$ dan derajat terbesar $\Delta = n$, berdasarkan Lemma 2.1, maka

$$\begin{aligned} dis(H_n) &\geq \left\lceil \frac{|V| + \delta - 1}{\Delta} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{2n + 1 + 1 - 1}{n} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{2n + 1}{n} \right\rceil \end{aligned}$$

Namun demikian, batas bawah ini dapat ditingkatkan sesuai dengan struktur dari graf helm dimana pada graf tersebut memiliki bandul berderajat satu sehingga $dis(H_n) \geq n$. Pada titik bandul berderajat satu sehingga bobot tergantung pada label u_i dimana $i = 1 \leq i \leq n$. Karena tetangga dari setiap titik v_i

adalah satu titik yaitu u_i untuk $i = 1 \leq i \leq n$, maka label titik v_i merupakan bobot dari titik u_i, sehingga label setiap titik v_i harus berbeda, kalau tidak maka bobot u_i akan sama, yang menunjukkan kontradiksi dengan Definisi 2.3. Dengan demikian,

$$dis(H_n) \geq n \tag{3}$$

Untuk menunjukkan bahwa $dis(H_n) \leq n$ label titik dari graf helm sebagai berikut:

$$\lambda_2(c) = \lambda_1(c) = 1$$

Untuk $n = 3, 4$:

$$\lambda_2(v_{1,i}) = i; \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Untuk $n = 5, 6, ..., n$:

$$\lambda_2(v_{1,i}) = \begin{cases} 2i - 1; & i = 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2(n + 1 - i); & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Untuk $n = 3$:

$$\lambda_2(u_{1,i}) = 1; \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Untuk $n = 4$:

$$\lambda_2(u_{1,i}) = \begin{cases} 3 - i; & i = 1 \leq i \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ i - 2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Untuk $n = 5$:

$$\lambda_2(u_{1,i}) = \begin{cases} n - 4; & i = 1 \\ n - 2i + 1; & i = 2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 3; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(i - 1) - n; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \leq i \leq n - 1 \\ n - 3; & i = n \end{cases}$$

Untuk n ganjil dimana $n \geq 7$:

$$\lambda_2(u_{1,i}) = \begin{cases} n-5; & i = 1 \\ n-2l+1; & i = 2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 3; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(i-1)-n; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \leq i \leq n-1 \\ n-3; & i = n \end{cases}$$

Untuk n genap dimana $n \geq 6$:

$$\lambda_2(u_{1,i}) = \begin{cases} n-5; & i = 1 \\ n-2i+1; & i = 2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 3; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(i-1)-n; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \leq i \leq n-1 \\ n-3; & i = n \end{cases}$$

Dari pelabelan tersebut diperoleh bobot:

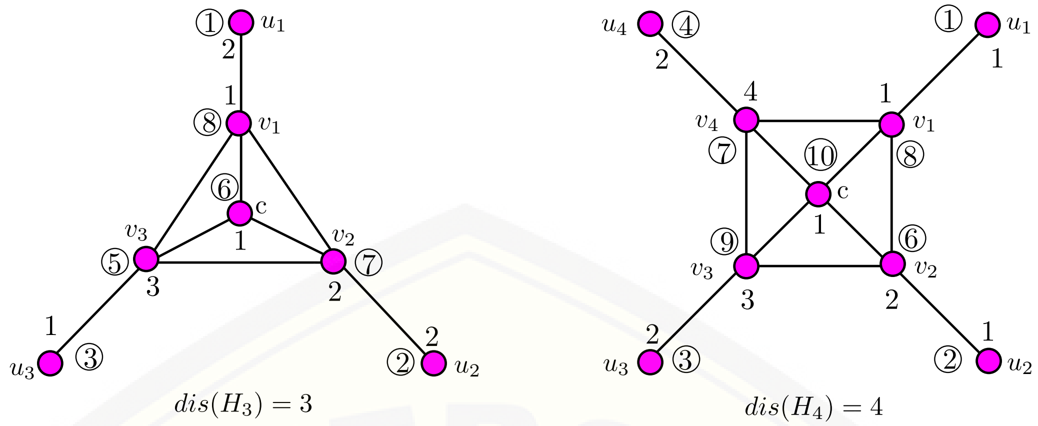
$$\begin{aligned} \omega_2(c) = &\ \tfrac{n(n+1)}{2} \\ \omega_2(u_i) = &\ \lambda(v_i); \quad i = 1 \leq i \leq n \\ \omega_2(v_i) = &\ \lambda(c) + \lambda(u_i) + \lambda(v_{i+1}) + \lambda(v_{i-1}); \quad i = 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian bobot setiap titik adalah berbeda, sehingga:

$$dis(H_n) \leq n \tag{4}$$

Dari batas kedua pada (3) dan (4) tersebut dapat disimpulkan bahwa $dis(H_n)$ $= n$. □

Gambar 4.2 mengilustrasikan contoh pelabelan ketakteraturan jarak dari graf helm untuk $dis(H_3) = 3$ dan $dis(H_4) = 4$.



Gambar 4.2 Pelabelan jarak pada graf helm

Graf bunga merupakan hasil penambahan satu sisi yang menghubungkan titik c dengan titik u_i dari graf helm, sehingga nilai ketakteraturan jarak dari graf bunga sama dengan nilai ketakteraturan jarak dari graf helm seperti pada teorema berikut.

◊ **Teorema 4.3.** *Graf bunga* Fl_n *memiliki* $dis(Fl_n) = n$.

Bukti. Graf bunga Fl_n adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(Fl_n) = \{c\} \cup \{u_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i, 1 \leq i \leq n\}$, serta himpunan sisi $E(Fl_n) = \{cv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{cu_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_iv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = 2n+1$ dan banyaknya sisi $|E| = 4n$. Pada graf bunga memiliki derajat terkecil $\delta = 2$ dan derajat terbesar $\Delta = n$. Berdasarkan Lemma 2.1, maka

$$\begin{aligned} dis(Fl_n) &\geq \left\lceil \frac{|V| + \delta - 1}{\Delta} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{2n + 1 + 2 - 1}{n} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{2n + 2}{n} \right\rceil \end{aligned}$$

Namun demikian, batas bawah ini dapat ditingkatkan sesuai dengan struktur dari graf bunga menjadi $dis(Fl_n) \geq n$. Titik bandul u_i berderajat dua sehingga bobot tergantung pada label c dan label v_i dimana $i = 1 \leq i \leq n$. Karena tetangga dari setiap titik v_i adalah c dan u_i untuk $i = 1 \leq i \leq n$ maka label setiap titik v_i harus berbeda. Jadi label terbesar yang minimal dari graf bunga adalah n. Maka,

$$dis(Fl_n) \geq n \tag{5}$$

Untuk menunjukkan bahwa $dis(Fl_n) \leq n$ label titik dari graf bunga sebagai berikut:

$$\lambda_3(c) = \lambda_2(c) = \ 1$$

Untuk $n = 3, 4$:

$$\lambda_3(v_{1,i}) = \lambda_2(v_{1,i}) = \ i; \ \ i = 1 \leq i \leq n$$

Untuk $n \geq 5$:

$$\lambda_3(v_{1,i}) = \lambda_2(v_{1,i}) = \begin{cases} 2i - 1; & i = 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2(n + 1 - i); & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \leq i \leq n \end{cases}$$

Untuk $n = 3$:

$$\lambda_3(u_{1,i}) = \lambda_2(u_{1,i}) = \ 1; \ \ i = 1 \leq i \leq n$$

Untuk $n = 4$:

$$\lambda_3(u_{1,i}) = \begin{cases} 2; & i = 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 1; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \leq i \leq n \end{cases}$$

Untuk n ganjil dimana $n \geq 5$:

$$\lambda_3(u_{1,i}) = \begin{cases} n - 4; & i = 1 \\ n - 2i + 1; & i = 2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 3; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(i - 1) - n; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \leq i \leq n - 1 \\ n - 3; & i = n \end{cases}$$

Untuk n genap dimana $n \geq 6$:

$$\lambda_3(u_{1,i}) = \begin{cases} n-4; & j = 1 \\ n-2i+1; & j = 2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 3; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(i-1)-n; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \leq i \leq n-1 \\ n-3; & i = n \end{cases}$$

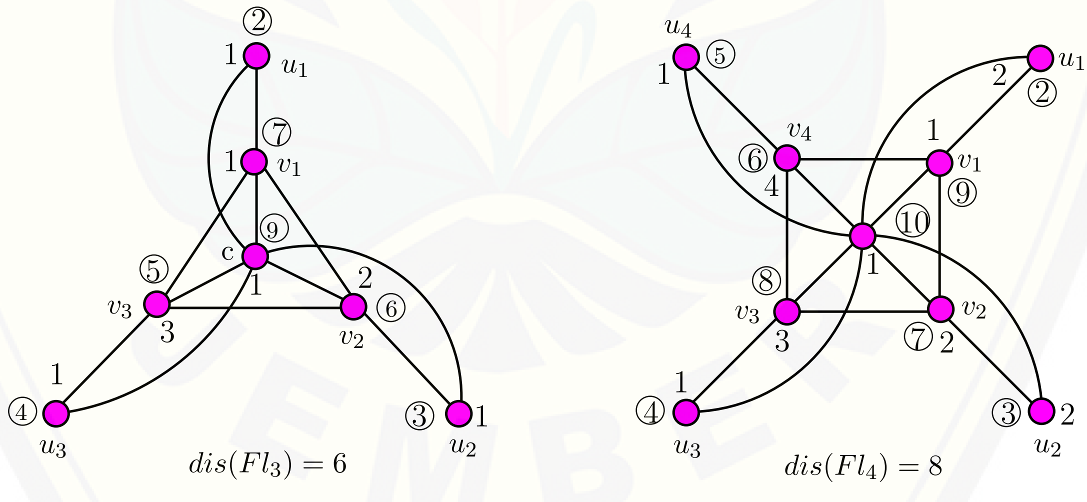
Dari pelabelan tersebut diperoleh bobot:

$$\begin{aligned} \omega_3(c) = & \ \lambda(u_i) + \lambda(v_{i+1}); \quad i = 1 \leq i \leq n \\ \omega_3(u_i) = & \ \lambda(c) + \lambda(v_i) + \lambda(u_{i+1}) + \lambda(u_{i-1}); \quad i = 1 \leq i \leq n \\ \omega_3(v_i) = & \ \lambda(c) + \lambda(u_i); \quad i = 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dengan demikian bobot setiap titik adalah berbeda, sehingga:

$$dis(Fl_n) \leq n \tag{6}$$

Dari batas kedua pada (5) dan (6) tersebut dapat disimpulkan bahwa dis $(Fl_n) = n$. □



Gambar 4.3 Pelabelan jarak pada graf bunga

Pada Gambar 4.3 diatas mengilustrasikan contoh pelabelan ketakteraturan jarak dari graf bunga untuk $dis(Fl_3) = 3$ dan $dis(Fl_4) = 4$.

Graf kipas merupakan hasil dari operasi jumlah $K_1 + P_n$, sehingga nilai ketakteraturan jarak dari graf kipas sama dengan nilai ketakteraturan jarak dari graf lintasan P_n seperti teorema berikut.

◊ **Teorema 4.4.** *Graf kipas* F_n *memiliki* $dis(F_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Bukti. Graf kipas F_n adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(F_n) = \{c\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = n+2$ dan himpunan sisi $E(F_n) = \{cv_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 2n + 1$. Pada graf bunga memiliki derajat terkecil $\delta = 2$ dan derajat terbesar $\Delta = n$. Berdasarkan Lemma 2.1, maka

$$
\begin{aligned}
dis(Fl_n) &\geq \left\lceil \frac{|V| + \delta - 1}{\Delta} \right\rceil \\
&\geq \left\lceil \frac{n + 2 + 2 - 1}{n} \right\rceil \\
&\geq \left\lceil \frac{n + 3}{n} \right\rceil
\end{aligned}
$$

Namun demikian, batas bawah ini dapat ditingkatkan sesuai dengan struktur dari graf kipas, sehingga $dis(F_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Pada titik bandul memiliki derajat dua sehingga bobot tergantung pada label u_i dimana $i = 1 \leq i \leq n$. Karena tetangga dari setiap titik u_i adalah c dan u_{i+1} untuk $i = 1 \leq i \leq n$ maka label setiap titik u_i harus berbeda. Jadi label terbesar yang minimal dari graf kipas adalah $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, sehingga diperoleh

$$dis(F_n) \geq \lceil \tfrac{n}{2} \rceil \tag{7}$$

Untuk menunjukkan bahwa $dis(F_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ label titik dari graf kipas sebagai berikut:

$$\lambda_4(c) = \lambda_1(c) = \ 1$$

Untuk $n \equiv 0 \bmod 4$ $(n \to 4, 8, 12, \ldots)$:

$$
\lambda_4(u_i) = \begin{cases} \frac{n}{2} - 2\lfloor \frac{i}{4} \rfloor; & i = 1 \mod 2 \\ \frac{i}{2}; & i = 0 \mod 2 \end{cases}
$$

Untuk $n \equiv 2 \bmod 4$ $(n \to 6, 10, 14, \ldots)$:

$$\lambda_4(u_i) = \begin{cases} \frac{n}{2} - \lfloor \frac{i}{4} \rfloor; & i = 1, 3, 5 \\ \frac{n}{2} - 2\lfloor \frac{i}{4} \rfloor - 1; & i = 7, 9, \ldots, n-1 \\ \frac{i}{2}; & i = 2, 4, \ldots, n-2 \\ \frac{n}{2} - 1; & i = n \end{cases}$$

Untuk $n \equiv 1 \bmod 2$ $(n \to 5, 7, 13, \ldots)$:

$$\lambda_4(u_i) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} - \lfloor \frac{i+1}{4} \rfloor; & i = 1, 3, \ldots, 2\lfloor \frac{n+13}{4} \rfloor + 1 \\ \frac{n+1}{2} - \lfloor \frac{i+1}{4} \rfloor - 1; & i = 2\lfloor \frac{n+13}{4} \rfloor + 3, \ldots, n \\ \lceil \frac{i+2}{4} \rceil; & i = 2, 4, \ldots, n-5 \\ \frac{n-5}{2}; & i = n-3 \\ 2; & i = n-1 \end{cases}$$

untuk $n = 9$:

$$\lambda_4(u_i) = \begin{cases} \frac{n-5}{2}; & i = 1 \\ \lceil \frac{i+1}{5} \rceil; & i = 2, 4, 6 \\ \lceil \frac{3(i+1)}{\frac{n}{2}} \rceil; & i = 3, 5 \\ \frac{n-1}{2}; & i = 7, 8 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil; & i = n \end{cases}$$

untuk $n = 11$:

$$\lambda_4(u_i) = \begin{cases} \lceil \frac{i-1}{4} \rceil; & i = 2, 4, \ldots, n-3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil - \lceil \frac{i+2}{4} \rceil; & i = 1, 3, \ldots, n-2 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1; & i = n-1 \\ 2; & i = n \end{cases}$$

Dari pelabelan tersebut diperoleh bobot:

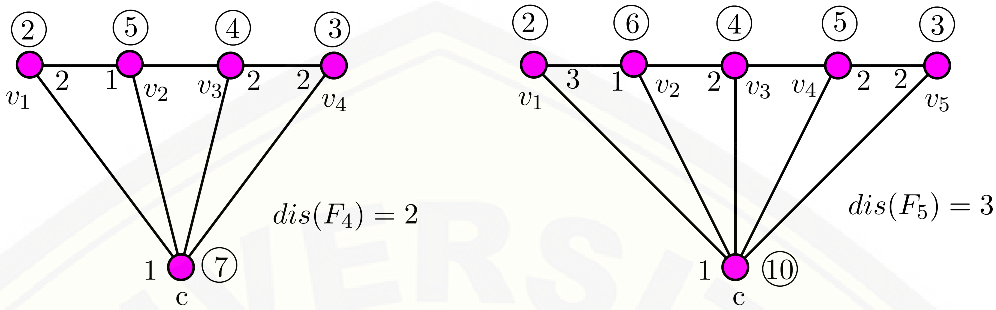
$$\omega_4(c) = \lambda(v_{i-1}) + \lambda(v_{i+1}); \quad i = 1 \leq i \leq, n$$

$$\omega_4(v_i) = \lambda(c) + \lambda(u_i + 1) + \lambda(u_i - 1); \quad i = 1 \leq i \leq, n$$

Dengan demikian bobot setiap titik adalah berbeda, sehingga:

$$dis(F_n) \leq \lceil \tfrac{n}{2} \rceil \tag{8}$$

Dari batas kedua pada (7) dan (8) tersebut dapat disimpulkan bahwa $dis(F_n)$ $= \lceil \frac{n}{2} \rceil$. □



Gambar 4.4 Pelabelan jarak pada graf kipas

Gambar 4.4 mengilustrasikan contoh pelabelan ketakteraturan jarak dari graf kipas untuk $dis(F_4) = 2$ dan $dis(F_5) = 3$.

4.2 Nilai Ketakteraturan Jarak dari Gabungan Famili Graf Roda

Gabungan famili graf roda yang akan ditentukan nilai ketakteraturan jaraknya adalah graf friendship dan graf helm seperti pada teorema berikut.

♢ **Teorema 4.5.** *Gabungan graf friendship isomorfis* $2f_n$ *memiliki* $dis(2f_n) = 2n + 1$.

Bukti. Misalkan $2f_n$ adalah gabungan saling lepas dari graf friendship untuk $n \geq 3$. Untuk menunjukkan bahwa $dis(2f_n) \geq 2n + 1$ yaitu dengan memberi label tertinggi dari $1f_n$ di titik pusat $2f_n$. Dengan demikian,

$$dis(2f_n) \geq 2n{+}1 \tag{9}$$

Untuk menunjukkan bahwa $dis(2f_n) \leq 2n + 1$ label titik pada gabungan graf friendship isomorfis sebagai berikut:

$$\lambda_5(c_1) = \lambda_1(c) = \ 1$$
$$\lambda_5(c_2) = \ 2n$$
$$\lambda_5(x_{k,i}) = \ 2i + k - 1; \quad i = 1 \leq i \leq n$$

$$\lambda_5(y_{k,i}) = \ 2i + k - 2; \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Dari pelabelan tersebut diperoleh bobot:

$$\omega_5(c) = \omega_1(c) = \ \tfrac{2n(2n+1)}{2}$$

$$\omega_5(x_i) = \omega_1(x_i) = \ 2i; \quad i = 1 \leq i \leq n$$

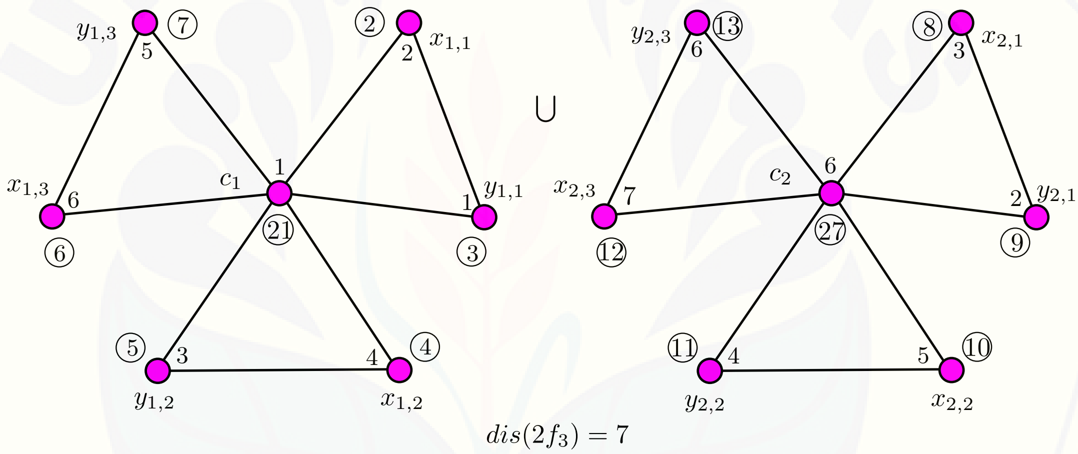
$$\omega_5(y_i) = \omega_1(y_i) = \ 2i + 1; \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian bobot setiap titik adalah berbeda, sehingga:

$$dis(2f_n) \leq 2n{+}1 \qquad (10)$$

Dari batas kedua pada (9) dan (10) dapat disimpulkan bahwa $dis(2f_n) = 2n + 1$. □

Gambar 4.5 mengilustrasikan contoh pelabelan ketakteraturan jarak dari gabungan isomorfis graf friendship untuk $n = 3$ dengan $dis(2f_3) = 7$.



Gambar 4.5 Pelabelan jarak pada gabungan graf friendship isomorfis $2f_3$

◇ **Teorema 4.6.** *Gabungan graf helm isomorfis $2H_n$ memiliki $dis(2H_n) = 2n$.*

Bukti. Misalkan $2H_n$ adalah gabungan saling lepas dari graf helm untuk $n \geq 6$. Setiap titik pada bandul dari gabungan saling lepas graf helm isomorfis mempunyai derajat 1 sehingga bobotnya merupakan label dari titik yang bertetangga dengan masing-masing bandul. Berdasarkan Definisi 2.3, setiap bobot pada titik harus berbeda maka label setiap titik pada siklus (titik yang bertetangga dengan titik bandul) harus berbeda. Karena ada sebanyak $2n$ titik pada siklus, maka label tertinggi pada siklus paling sedikit adalah $2n$. Dengan demikian,

$$dis(2H_n) \geq 2n \tag{11}$$

Untuk menunjukkan bahwa $dis(2H_n) \leq 2n$ label titik pada gabungan graf helm isomorfis dimana s menyatakan banyaknya gabungan graf sebagai berikut:

$$\lambda_6(c) = k$$

$$\lambda_6(v_{k,i}) = \begin{cases} 2s(i-1)+k; & i = 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2s(n-i)+k+s; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Untuk n genap dimana $n \geq 6$:

$$\lambda_6(u_{k,i}) = \begin{cases} s(n-3)-2k; & i = 1 \text{ dan } n-1 \\ s(n-2)-2k; & i = 2 \text{ dan } n \\ 2n-4i-2k+4; & i = 3, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \\ 8-2k; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \text{ dan } \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 6-2k; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \text{ dan } \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \\ 4i-2n-2k-2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, \ldots, n-2 \end{cases}$$

Untuk n ganjil dimana $n \geq 7$:

$$\lambda_6(u_{k,i}) = \begin{cases} s(n-3)-2k; & i = 1 \text{ dan } n-1 \\ s(n-2)-2k; & i = 2 \text{ dan } n \\ 2n-4i-2k+4; & i = 3, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \\ 6-2k; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \text{ dan } \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 8-2k; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \text{ dan } \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \\ 4i-2n-2k-2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, \ldots, n-2 \end{cases}$$

Dari pelabelan tersebut diperoleh bobot:

$$\omega_6(c) = \sum \lambda(u_{k,i})$$

$$\omega_6(u_{k,i}) = \sum \lambda(v_{k,i}); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

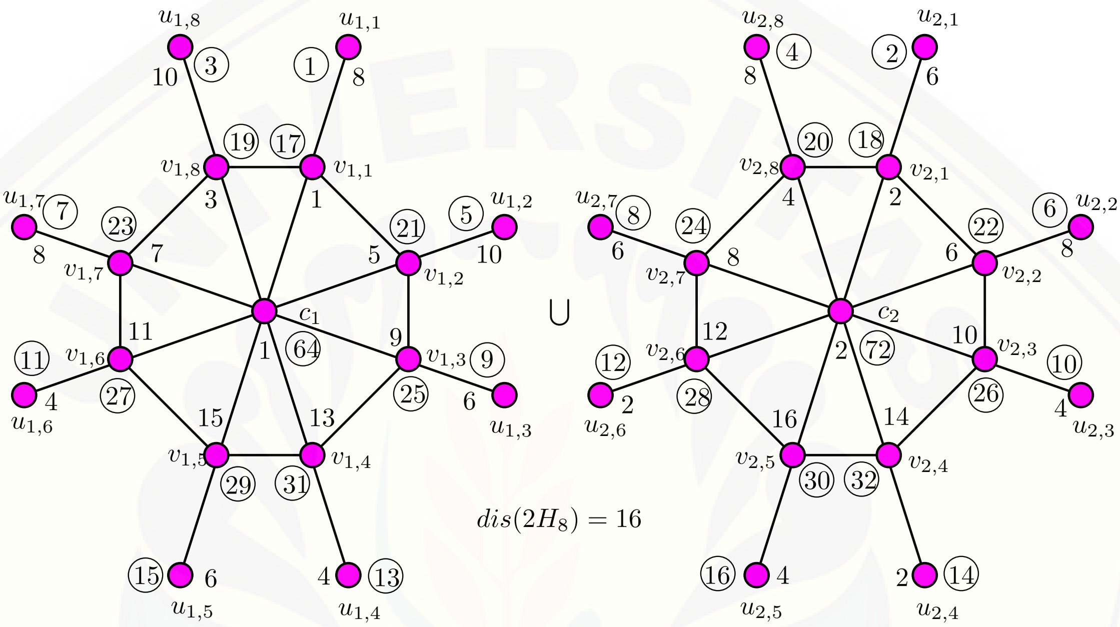
$$\omega_6(v_{k,i}) = \lambda(c) + \lambda(u_{k,i}) + \lambda(v_{k,i+1}) + \lambda(v_{k,i-1}); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian bobot setiap titik adalah berbeda, sehingga:

$$dis(2H_n) \leq 2n \tag{12}$$

Dari batas kedua pada (11) dan (12) tersebut diatas dapat disimpulkan bahwa $dis(2H_n) = 2n$. □

Pada gambar 4.6 mengilustrasikan contoh pelabelan ketakteraturan jarak dari gabungan isomorfis graf helm untuk $n = 8$ dengan $dis(2H_8) = 16$.



Gambar 4.6 Pelabelan jarak pada gabungan graf helm isomorfis $2H_8$

4.3 Nilai Ketakteraturan Jarak dari Famili Graf Roda dengan Bandul

Famili graf roda dengan bandul yang akan ditentukan nilai ketakteraturan jaraknya adalah graf friendship dan graf bunga seperti pada teorema berikut.

◊ **Teorema 4.7.** *Graf friendship dengan bandul* $\mathcal{P}f_n$ *memiliki* $dis(\mathcal{P}f_n) = 2n$.

Bukti. Graf friendship dengan bandul $\mathcal{P}f_n$ adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(f_n) = \{c\} \cup \{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_i, 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(f_n) = \{cx_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{cy_i, 1 \leq i \leq n\} \cup$

$\{x_iz_i, 1 \le i \le n\} \cup \{y_iz_i, 1 \le i \le n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = 4n + 1$ dan banyaknya sisi $|E| = 5n$. Graf friendship dengan bandul dimana $n \ge 3$ memiliki derajat terkecil $\delta = 1$ dan derajat terbesar $\Delta = 2n$. Berdasarkan Lemma 2.1, maka

$$\begin{aligned} dis(f_n) &\ge \left\lceil \frac{|V| + \delta - 1}{\Delta} \right\rceil \\ &\ge \left\lceil \frac{4n + 1 + 1 - 1}{2n} \right\rceil \\ &\ge \left\lceil \frac{4n + 1}{2n} \right\rceil \end{aligned}$$

Namun demikian, batas bawah ini dapat ditingkatkan sesuai dengan struktur dari graf friendship dengan bandul dimana $dis(\mathcal{P}f_n) \ge 2n$. Pertama akan ditunjukkan bahwa $dis(\mathcal{P}f_n) \ge 2n$. Titik bandul berderajat satu sehingga bobot tergantung pada label x_i dan y_i dimana $i = 1 \le i \le n$. Karena tetangga dari setiap titik x_i dan y_i adalah satu titik yaitu z_i untuk $i = 1 \le i \le n$, maka label titik z_i merupakan bobot dari titik x_i dan y_i, sehingga label setiap titik z_i harus berbeda, kalau tidak maka bobot x_i dan y_i akan sama, yang menunjukkan kontradiksi. Dengan demikian,

$$dis(\mathcal{P}f_n) \ge 2n \tag{13}$$

Untuk menunjukkan bahwa $dis(\mathcal{P}f_n) \le 2n$ label titik dari graf friendship sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_7(c) =&\ 2n - 1 \\ \lambda_7(x_i) = \lambda_1(x_i) =&\ 2i; \quad i = 1 \le i \le n \\ \lambda_7(y_i) = \lambda_1(y_i) =&\ 2i - 1; \quad i = 1 \le i \le n \\ \lambda_7(z_i) =&\ 1; \quad i = 1 \le i \le n \end{aligned}$$

Dari pelabelan tersebut diperoleh bobot:

$$\begin{aligned} \omega_7(c) = \omega_1(c) =&\ \tfrac{2n(2n+1)}{2} \\ \omega_7(x_i) =&\ 2i + 1; \quad i = 1 \le i \le n \\ \omega_7(y_i) =&\ 2i + 2; \quad i = 1 \le i \le n \end{aligned}$$

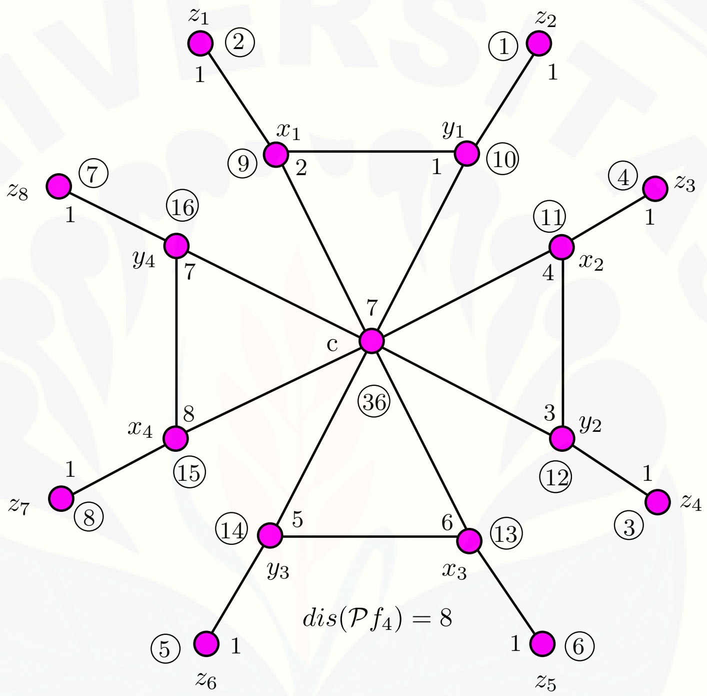
$$\omega_7(z_i) = \begin{cases} 2i; & i = 1 \leq i \leq n; \quad i \in x_i \\ 2i-1; & i = 1 \leq i \leq n; \quad i \in y_i \end{cases}$$

Dengan demikian bobot setiap titik adalah berbeda, sehingga:

$$dis(\mathcal{P}f_n) \leq 2n \tag{14}$$

Dari batas kedua pada (13) dan (14) tersebut diatas dapat disimpulkan bahwa $dis(\mathcal{P}f_n) = 2n$. $\square$

Contoh pelabelan ketakteraturan jarak dari graf friendship dengan bandul untuk $n = 4$ dengan $dis(\mathcal{P}f_4) = 8$ disajikan pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7 Pelabelan jarak pada graf friendship dengan bandul

Graf bunga dengan bandul merupakan penambahan satu sisi pada titik v_i dimana $1 \leq i \leq n$. Karena terdapat penambahan satu sisi pada titik v_i sehingga terdapat perubahan bentuk dalam graf bunga. Untuk graf bunga dengan bandul dapat dilihat pada Gambar 4.8 dengan nilai ketakteraturan jarak seperti pada teorema berikut.

$\Diamond$ **Teorema 4.8.** *Graf bunga dengan bandul $\mathcal{P}Fl_n$ memiliki $dis(\mathcal{P}Fl_n) = n$.*

Bukti. Graf bunga dengan bandul $\mathcal{P}Fl_n$ adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(Fl_n) = \{c\} \cup \{u_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i, 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(Fl_n) = \{cv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{cu_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_iv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = 3n + 1$ dan banyaknya sisi $|E| = 5n$. Graf bunga dengan bandul dimana $n \geq 3$ memiliki derajat terkecil $\delta = 1$ dan derajat terbesar $\Delta = 2n$. Berdasarkan Lemma 2.1, maka

$$\begin{aligned} dis(Fl_n) &\geq \left\lceil \frac{|V| + \delta - 1}{\Delta} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{3n + 1 + 1 - 1}{2n} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{3n + 1}{2n} \right\rceil \end{aligned}$$

Namun demikian, batas bawah ini dapat ditingkatkan sesuai dengan struktur dari graf bunga dengan bandul menjadi $dis(\mathcal{P}Fl_n) \geq n$. Titik bandul w_i berderajat satu sehingga bobot tergantung pada label v_i dimana $i = 1 \leq i \leq n$. Karena tetangga dari setiap titik v_i adalah c, u_i dan w_i untuk $i = 1 \leq i \leq n$ maka label setiap titik v_i harus berbeda. Jadi label terbesar yang minimal dari graf bunga adalah n, sehingga diperoleh

$$dis(\mathcal{P}Fl_n) \geq n \tag{15}$$

Untuk menunjukkan bahwa $dis(\mathcal{P}Fl_n) \leq n$ label titik dari graf bunga dengan bandul sebagai berikut:

$$\lambda_8(c) = \ n$$

Untuk $n = 3$:

$$\lambda_8(u_i) = \ 1; \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Untuk $n = 4$:

$$\lambda_8(u_i) = \begin{cases} 2; & i = 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 1; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Untuk $n = 5$:

$$\lambda_8(u_i) = \lambda_3(u_i) = \begin{cases} n-4; & i = 1 \\ n-2i+1; & i = 2,3,\ldots,\lceil\frac{n}{2}\rceil - 1 \\ 3; & i = \lceil\frac{n}{2}\rceil \\ 2; & i = \lceil\frac{n}{2}\rceil + 1 \\ n-3; & i = n \end{cases}$$

Untuk n ganjil dimana $n \geq 7$:

$$\lambda_8(u_i) = \begin{cases} n-5; & i = 1 \\ n-2i; & i = 2 \leq i \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil - 1 \\ 2; & i = \lceil\frac{n}{2}\rceil \\ 1; & i = \lceil\frac{n}{2}\rceil + 1 \\ 2i-n-3; & i = \lceil\frac{n}{2}\rceil + 2 \leq i \leq n-1 \\ n-4; & i = n \end{cases}$$

Untuk n genap dimana $n \geq 6$:

$$\lambda_8(u_i) = \begin{cases} n-5; & i = 1 \\ n-2i; & i = 2 \leq i \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil - 1 \\ 1; & i = \lceil\frac{n}{2}\rceil \\ 2; & i = \lceil\frac{n}{2}\rceil + 1 \\ 2i-n-3; & i = \lceil\frac{n}{2}\rceil + 2 \leq i \leq n-1 \\ n-4; & i = n \end{cases}$$

Untuk $n = 3, 4$:

$$\lambda_8(v_i) = \lambda_3(v_i) = \quad i; \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Untuk $n \geq 5$:

$$\lambda_8(v_i) = \lambda_3(v_i) = \begin{cases} 2i-1; & i = 1 \leq i \leq \lceil\frac{n}{2}\rceil \\ 2(n+1-i); & i = \lceil\frac{n}{2}\rceil + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Untuk $n = 3$:

$$\lambda_8(w_i) = \begin{cases} 1; & i = 1, 3 \\ 3; & i = 2 \end{cases}$$

Untuk $n \geq 4$:

$$\lambda_8(w_i) = \ 1; \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Dari pelabelan tersebut diperoleh bobot:

$$\omega_8(c) = \omega_3(c) = \ \lambda(u_i) + \lambda(v_i); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

$$\omega_8(u_i) = \ \lambda(c) + \lambda(v_i); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

$$\omega_8(v_i) = \ \lambda(c) + \lambda(u_i) + \lambda(w_i) + \lambda(v_{i+1}) + \lambda(v_{i-1}); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

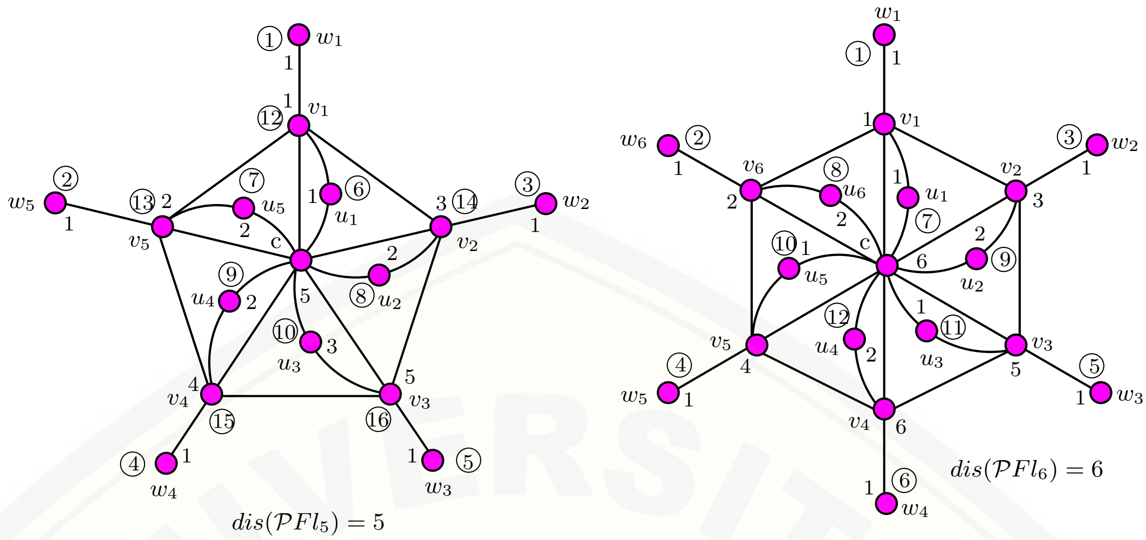
$$\omega_8(w_i) = \ \lambda(v_i); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian bobot setiap titik adalah berbeda, sehingga

$$dis(\mathcal{P}Fl_n) \leq n \tag{16}$$

Dari batas kedua pada (15) dan (16) tersebut dapat disimpulkan bahwa $dis(\mathcal{P}Fl_n) = n$. $\square$

Gambar 4.8 mengilustrasikan contoh pelabelan ketakteraturan jarak dari graf bunga dengan bandul untuk $dis(\mathcal{P}Fl_5) = 5$ dan $dis(\mathcal{P}Fl_6) = 6$.



Gambar 4.8 Pelabelan jarak pada graf bunga dengan bandul

4.4 Nilai Ketakteraturan Jarak pada Operasi dari Famili Graf Roda dengan K_1

Famili graf roda dengan K_1 yang akan ditentukan nilai ketakteraturan jaraknya adalah graf friendship, graf helm, graf bunga, dan graf kipas seperti pada teorema berikut.

◊ **Teorema 4.9.** *Misalkan $f_n + K_1$ merupakan hasil dari operasi jumlah dari graf friendship f_n dengan graf komplit K_1, maka $dis(f_n + K_1) = 2n$.*

Bukti. Graf friendship f_n join graf komplit K_1 adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(f_n + K_1) = \{c\} \cup \{k\} \cup \{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i, 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(f_n+K_1) = \{ckx_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{kx_iy_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{cky_i, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = 2n+2$ dan banyaknya sisi $|E| = 5n+1$. Graf friendship memiliki derajat terkecil $\delta = 2$ dan derajat terbesar $\Delta = 2n+1$. Berdasarkan

Lemma 2.1, maka

$$\begin{aligned} dis(f_n) &\geq \left\lceil \frac{|V|+\delta-1}{\Delta} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{2n+2+2-1}{2n+1} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{2n+3}{2n+1} \right\rceil \end{aligned}$$

Namun demikian, batas bawah ini dapat ditingkatkan sesuai dengan struktur dari graf friendship join K_1 menjadi $dis(f_n + K_1) \geq 2n$. Untuk setiap titik k selalu dilabeli dengan 2, maka

$$dis(f_n{+}K_1) \geq 2n \tag{17}$$

Untuk menunjukkan bahwa $dis(f_n{+}K_1) \leq 2n$ label titik dari graf friendship join K_1 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_9(c) &= 1 \\ \lambda_9(k) &= 2 \\ \lambda_9(x_i) = \lambda_1(x_i) &= 2i; \quad i = 1 \leq i \leq n \\ \lambda_9(y_i) = \lambda_1(y_i) &= 2i-1; \quad i = 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Dari pelabelan tersebut diperoleh bobot:

$$\begin{aligned} \omega_9(c) = \omega_1(c) &= \tfrac{2n(2n+1)}{2} + \lambda(k) \\ \omega_9(x_i) &= 2i + \lambda(k); \quad i = 1 \leq i \leq n \\ \omega_9(y_i) &= 2i + \lambda(k) + 1; \quad i = 1 \leq i \leq n \\ \omega_9(k) &= \lambda(c) + \lambda(x_i) + \lambda(y_i); \quad i = 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

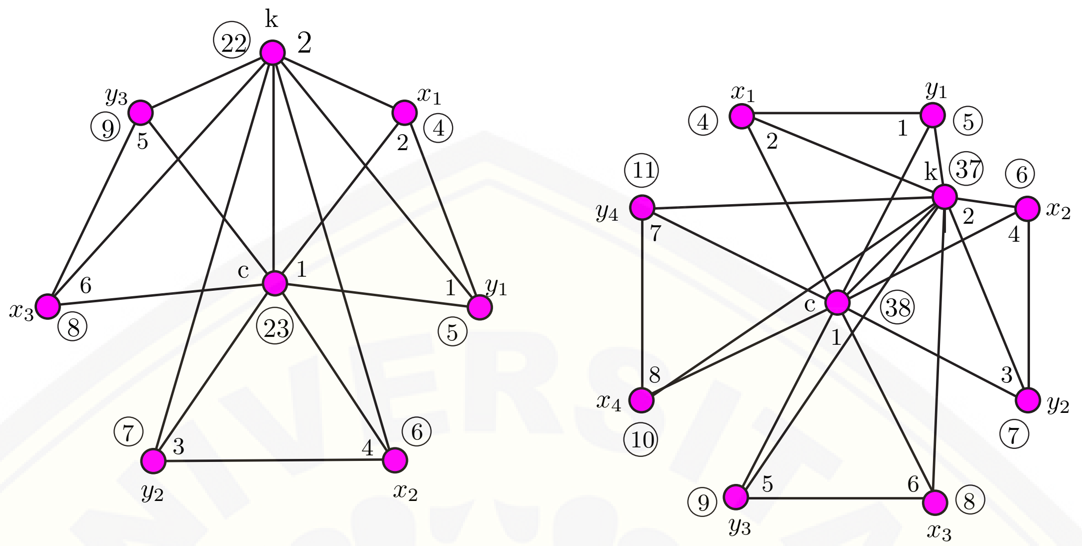
Dengan demikian bobot setiap titik adalah berbeda, sehingga diperoleh

$$dis(f_n{+}K_1) \leq 2n \tag{18}$$

Dari batas kedua pada (17) dan (18) tersebut dapat disimpulkan bahwa $dis(f_n + K_1) = 2n$. □

Gambar 4.9 mengilustrasikan pelabelan ketakteraturan jarak dari graf friendship join graf komplit K_1 untuk $n = 3$ dengan $dis(f_3 + K_1) = 6$ dan untuk $n = 4$

dengan $dis(f_4 + K_1) = 8$.



$dis(f_3 + K_1) = 6$ $\quad$ $dis(f_4 + K_1) = 8$

Gambar 4.9 Pelabelan jarak pada graf friendship join K_1

Pada graf helm join K_1 merupakan penambahan satu titik k yang terhubung dengan semua titik yang dimiliki oleh graf helm. Penentuan nilai ketakteraturan jarak dari graf helm join graf komplit K_1 diperoleh seperti pada teorema berikut.

$\Diamond$ **Teorema 4.10.** *Misalkan $H_n + K_1$ merupakan hasil dari operasi jumlah dari graf helm H_n dengan graf komplit K_1, maka $dis(H_n + K_1) = n$.*

Bukti. Graf helm H_n join graf komplit K_1 adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(H_n + K_1) = \{c\} \cup \{k\} \cup \{u_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i, 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(H_n+K_1) = \{ckv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{ku_iv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{kv_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = 2(n + 1)$ dan banyaknya sisi $|E| = 5n + 1$. Graf helm dengan simpul $n \geq 3$ memiliki derajat terkecil $\delta = 2$ dan derajat terbesar

$\Delta = 2n + 1$. Berdasarkan Lemma 2.1, maka

$$\begin{aligned} dis(H_n) &\geq \left\lceil \frac{|V| + \delta - 1}{\Delta} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{2n + 2 + 2 - 1}{2n + 1} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{2n + 3}{2n + 1} \right\rceil \end{aligned}$$

Namun demikian, batas bawah ini dapat ditingkatkan sesuai dengan struktur dari graf helm join graf komplit K_1 menjadi $dis(H_n + K_1) \geq n$. Untuk setiap titik K selalu dilabeli dengan 2, maka

$$dis(H_n + K_1) \geq n \tag{19}$$

Untuk menunjukkan bahwa $dis(H_n + K_1) \leq n$ label titik dari graf helm sebagai berikut:

$$\lambda_{10}(c) = \lambda_2(c) = 1$$
$$\lambda_{10}(k) = 2$$

Untuk $n = 3, 4$:

$$\lambda_{10}(v_{1,i}) = \lambda_2(v_{1,i}) = i; \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Untuk $n \geq 5$:

$$\lambda_{10}(v_{1,i}) = \lambda_2(v_{1,i}) = \begin{cases} 2i - 1; & i = 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2(n + 1 - i); & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Untuk $n = 3$:

$$\lambda_{10}(u_{1,i}) = \lambda_2(u_{1,i}) = 1; \quad i = 1 \leq i \geq n$$

Untuk $n = 4$:

$$\lambda_{10}(u_{1,i}) = \lambda_2(u_{1,i}) = \begin{cases} 3 - i; & i = 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ i - 2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Untuk $n = 5$:

$$\lambda_{10}(u_{1,i}) = \lambda_2(u_{1,i}) = \begin{cases} n-4; & i = 1 \\ n-2i+1; & i = 2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 3; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(i-1)-n; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \leq i \leq n-1 \\ n-3; & i = n \end{cases}$$

Untuk n ganjil dimana $n \geq 7$:

$$\lambda_{10}(u_{1,i}) = \lambda_2(u_{1,i}) = \begin{cases} n-5; & i = 1 \\ n-2i+1; & i = 2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 3; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(i-1)-n; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \leq i \leq n-1 \\ n-3; & i = n \end{cases}$$

Untuk n genap dimana $n \geq 6$:

$$\lambda_{10}(u_{1,i}) = \lambda_2(u_{1,i}) = \begin{cases} n-4; & i = 1 \\ n-2i+1; & i = 2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 3; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(i-1)-n; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \leq i \leq n-1 \\ n-3; & i = n \end{cases}$$

Dari pelabelan tersebut diperoleh bobot:

$$\omega_{10}(c) = \frac{n(n+1)}{2} + \lambda(k)$$

$$\omega_{10}(u_i) = \lambda(v_i) + \lambda(k); \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\omega_{10}(v_i) = \lambda(c) + \lambda(k) + \lambda(u_i) + \lambda(v_{i+1}) + \lambda(v_{i-1}); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

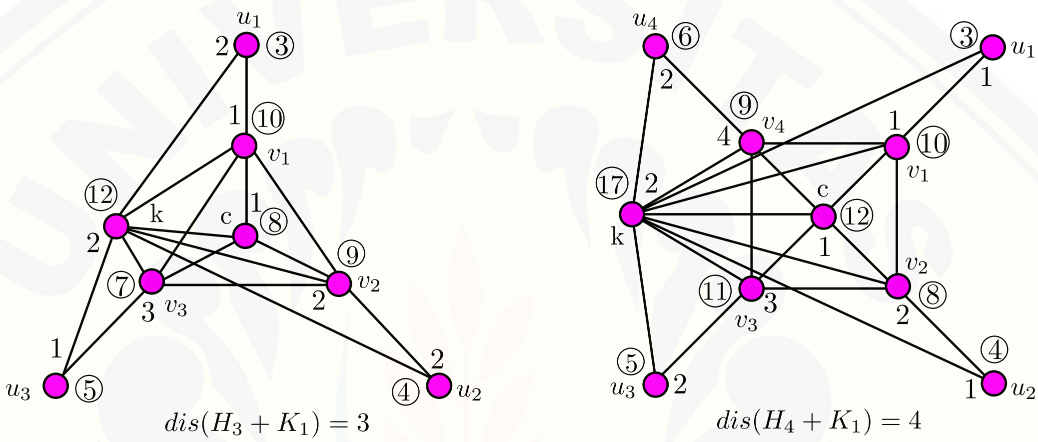
$$\omega_{10}(k) = \lambda(c) + \lambda(u_i) + \lambda(v_i); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian bobot setiap titik adalah berbeda, sehingga

$$dis(H_n+K_1) \leq n \tag{20}$$

Dari batas kedua pada (19) dan (20) tersebut dapat disimpulkan bahwa dis $(H_n + K_1) = n$. □

Gambar 4.10 mengilustrasikan pelabelan ketakteraturan jarak dari graf helm join graf komplit K_1 untuk $n = 3$ dengan $dis(H_3 + K_1) = 3$ dan untuk $n = 4$ dengan $dis(H_4 + K_1) = 4$.



Gambar 4.10 Pelabelan jarak pada graf helm join K_1

Penentuan nilai ketakteraturan jarak dari graf bunga dengan graf komplit K_1 dijabarkan seperti pada teorema berikut.

♢ **Teorema 4.11.** *Misalkan $Fl_n + K_1$ merupakan hasil dari operasi jumlah dari graf bunga dengan graf komplit K_1, maka $dis(Fl_n + K_1) = n$.*

Bukti. Graf bunga Fl_n join graf komplit K_1 adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(Fl_n+K_1) = \{c\} \cup \{k\} \cup \{u_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i, 1 \leq i \leq n\}$, himpunan sisi $E(Fl_n+K_1) = \{ckv_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{cku_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{ku_iv_i, 1 \leq i \leq n\}$ $\cup$ $\{kv_iv_{i+1}, 1 \leq i \leq n\}$ dengan banyaknya titik $|V| = 2(n+1)$ dan banyaknya sisi $|E| = 6n + 1$. Graf bunga dengan simpul $n \geq 3$ memiliki derajat terkecil $\delta = 2$

dan derajat terbesar $\Delta = 2n + 1$. Berdasarkan Lemma 2.1, maka

$$\begin{aligned} dis(Fl_n) &\geq \left\lceil \frac{|V| + \delta - 1}{\Delta} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{2n + 2 + 2 - 1}{2n + 1} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{2n + 3}{2n + 1} \right\rceil \end{aligned}$$

Namun demikian, batas bawah ini dapat ditingkatkan menjadi $dis(Fl_n + K_1) \geq n$. Untuk setiap titik K selalu dilabeli dengan 2, maka

$$dis(Fl_n + K_1) \geq n \tag{21}$$

Untuk menunjukkan bahwa $dis(Fl_n + K_1) \leq n$ label titik dari graf bunga sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_{11}(c) = \lambda_3(c) = &\ 1 \\ \lambda_{11}(k) = &\ 2 \end{aligned}$$

Untuk $n = 3, 4$:

$$\lambda_{11}(v_{1,i}) = \lambda_3(v_{1,i}) = \ i; \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Untuk $n \geq 5$:

$$\lambda_{11}(v_{1,i}) = \lambda_3(v_{1,i}) = \begin{cases} 2i - 1; & i = 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2(n + 1 - i); & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Untuk $n = 3$:

$$\lambda_{11}(u_{1,i}) = \lambda_3(u_{1,i}) = \ 1; \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Untuk $n = 4$:

$$\lambda_{11}(u_{1,i}) = \lambda_3(u_{1,i}) = \begin{cases} 2; & i = 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 1; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Untuk n ganjil dimana $n \geq 5$:

$$\lambda_{11}(u_{1,i}) = \lambda_3(u_{1,j}) = \begin{cases} n-4; & i=1 \\ n-2i+1; & i=2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 3; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(i-1)-n; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \leq i \leq n-1 \\ n-3; & i=n \end{cases}$$

Untuk n genap dimana $n \geq 6$:

$$\lambda_{11}(u_{1,i}) = \lambda_3(u_{1,i}) = \begin{cases} n-4; & i=1 \\ n-2i+1; & i=2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \\ 2; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil \\ 3; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \\ 2(i-1)-n; & i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2 \leq i \leq n-1 \\ n-3; & i=n \end{cases}$$

Dari pelabelan tersebut diperoleh bobot:

$$\omega_{11}(c) = \lambda(k) + \lambda(u_i) + \lambda(v_{i+1}); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

$$\omega_{11}(k) = \lambda(c) + \lambda(u_i) + \lambda(v_{i+1}); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

$$\omega_{11}(u_i) = \lambda(c) + \lambda(k) + \lambda(v_i) + \lambda(u_{i+1}) + \lambda(u_{i-1}); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

$$\omega_{11}(v_i) = \lambda(c) + \lambda(k) + \lambda(u_i); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

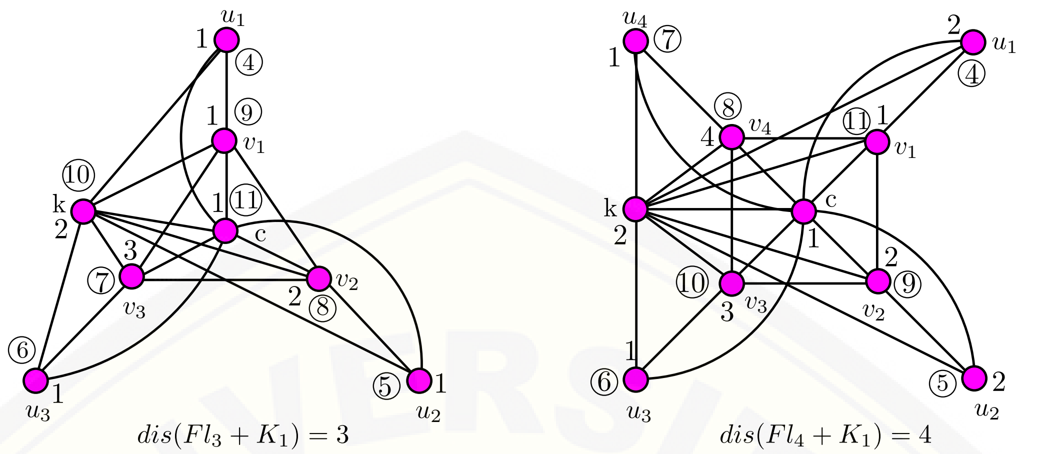
Dengan demikian bobot setiap titik adalah berbeda, sehingga:

$$dis(Fl_n + K_1) \geq n \tag{22}$$

Dari batas kedua pada (21) dan (22) tersebut dapat disimpulkan bahwa dis $(Fl_n + K_1) = n$. □

Gambar 4.11 mengilustrasikan pelabelan ketakteraturan jarak dari graf bunga join graf komplit K_1 untuk $n = 3$ dengan $dis(Fl_3 + K_1) = 3$ dan untuk $n = 4$

dengan $dis(Fl_4 + K_1) = 4$.



Gambar 4.11 Pelabelan jarak pada graf bunga join K_1

Teorema terakhir yang diperoleh dari penelitian ini adalah penentuan nilai ketakteraturan jarak dari graf kipas join graf komplit K_1 seperti pada pembahasan berikut.

◊ **Teorema 4.12.** *Misalkan $F_n + K_1$ merupakan hasil dari operasi jumlah dari graf kipas dengan graf komplit K_1, maka $dis(F_n + K_1) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Bukti. Graf kipas F_n join graf komplit K_1 adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(F_n + K_1) = \{c\} \cup \{k\} \cup \{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|V| = n + 2$ dan himpunan sisi $E(F_n + K_1) = \{ckv_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{kv_iv_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ dimana $|E| = 3n$. Graf kipas dengan simpul $n \geq 3$ memiliki derajat terkecil $\delta = 2$ dan derajat terbesar $\Delta = n + 1$. Berdasarkan Lemma 2.1, maka

$$\begin{aligned} dis(F_n) &\geq \left\lceil \frac{|V| + \delta - 1}{\Delta} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{n + 2 + 2 - 1}{n + 1} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{n + 3}{n + 1} \right\rceil \end{aligned}$$

Namun demikian, batas bawah ini dapat ditingkatkan sesuai dengan struktur dari graf kipas join graf komplit K_1 sehingga $dis(F_n + K_1) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Untuk setiap titik K selalu dilabeli dengan 2, maka

$$dis(F_n{+}K_1) \geq \lceil \tfrac{n}{2} \rceil \qquad (23)$$

Untuk menunjukkan bahwa $dis(F_n + K_1) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ label titik dari graf bunga sebagai berikut:

$$\lambda_{12}(c) = \lambda_4(c) = \ 1$$

$$\lambda_{12}(k) = \ 2$$

Untuk $n \equiv 0 \bmod 4$ $(n \rightarrow 4, 8, 12, \ldots)$:

$$\lambda_{12}(u_i) = \lambda_4(u_i) = \begin{cases} \frac{n}{2} - 2\lfloor \frac{i}{4} \rfloor; & i = 1 \mod 2 \\ \frac{i}{2}; & i = 0 \mod 2 \end{cases}$$

Untuk $n \equiv 2 \bmod 4$ $(n \rightarrow 6, 10, 14, \ldots)$:

$$\lambda_{12}(u_i) = \lambda_4(u_i) = \begin{cases} \frac{n}{2} - \lfloor \frac{i}{4} \rfloor; & i = 1, 3, 5 \\ \frac{n}{2} - 2\lfloor \frac{i}{4} \rfloor - 1; & i = 7, 9, \ldots, n-1 \\ \frac{i}{2}; & i = 2, 4, \ldots, n-2 \\ \frac{n}{2} - 1; & i = n \end{cases}$$

Untuk $n \equiv 1 \bmod 2$ $(n \rightarrow 5, 7, 13, \ldots)$:

$$\lambda_{12}(u_i) = \lambda_4(u_i) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} - \lfloor \frac{i+1}{4} \rfloor; & i = 1, 3, \ldots, 2\lfloor \frac{n+13}{4} \rfloor + 1 \\ \frac{n+1}{2} - \lfloor \frac{i+1}{4} \rfloor - 1; & i = 2\lfloor \frac{n+13}{4} \rfloor + 3, \ldots, n \\ \lceil \frac{i+2}{4} \rceil; & i = 2, 4, \ldots, n-5 \\ \frac{n-5}{2}; & i = n-3 \\ 2; & i = n-1 \end{cases}$$

untuk $n = 9$:

$$\lambda_{12}(u_i) = \lambda_4(u_i) = \begin{cases} \frac{n-5}{2}; & i = 1 \\ \lceil \frac{i+1}{5} \rceil; & i = 2, 4, 6 \\ \lceil \frac{3(i+1)}{\frac{n}{2}} \rceil; & i = 3, 5 \\ \frac{n-1}{2}; & i = 7, 8 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil; & i = n \end{cases}$$

untuk $n = 11$:

$$\lambda_{12}(u_i) = \lambda_4(u_i) = \begin{cases} \lceil \frac{i-1}{4} \rceil; & i = 2, 4, \ldots, n-3 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil - \lceil \frac{i+2}{4} \rceil; & i = 1, 3, \ldots, n-2 \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1; & i = n-1 \\ 2; & i = n \end{cases}$$

Dari pelabelan tersebut diperoleh bobot:

$$\omega_{12}(c) = \lambda(k) + \lambda(v_{i-1}) + \lambda(v_{i+1}); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

$$\omega_{12}(k) = \lambda(c) + \lambda(v_{i-1}) + \lambda(v_{i+1}); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

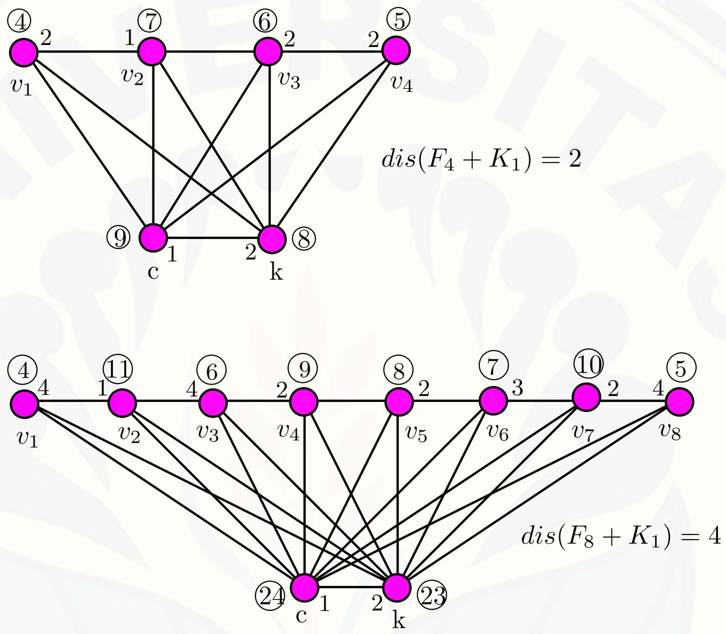
$$\omega_{12}(v_i) = \lambda(c) + \lambda(k) + \lambda(u_i + 1) + \lambda(u_i - 1); \quad i = 1 \leq i \leq n$$

Dengan demikian bobot setiap titik adalah berbeda, sehingga

$$dis(F_n + K_1) \leq \lceil \tfrac{n}{2} \rceil \tag{24}$$

Dari batas kedua pada (23) dan (24) tersebut dapat disimpulkan bahwa dis $(F_n + K_1) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. □

Gambar 4.12 mengilustrasikan pelabelan ketakteraturan jarak dari graf kipas join graf komplit K_1 untuk $n = 4$ dengan $dis(F_4 + K_1) = 2$ dan untuk $n = 8$ dengan $dis(F_8 + K_1) = 4$.



Gambar 4.12 Pelabelan jarak pada graf kipas join K_1

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. *dis* dalam pelabelan ketakteraturan jarak pada famili graf roda tunggal dari:
   (a) graf friendship $dis(f_n) = 2n$;
   (b) graf helm $dis(H_n) = n$;
   (c) graf bunga $dis(Fl_n) = n$;
   (d) graf kipas $dis(F_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ dengan $n \geq 4$.
2. *dis* dalam pelabelan ketakteraturan jarak pada gabungan isomorfis famili graf roda dari:
   (a) gabungan isomorfis graf friendship $dis(2f_n) = 2n + 1$;
   (b) gabungan isomorfis graf helm $dis(2H_n) = 2n$ dengan $n \geq 6$.
3. *dis* dalam pelabelan ketakteraturan jarak pada famili graf roda dengan bandul dari:
   (a) graf friendship dengan bandul $dis(\mathcal{P}f_n) = 2n$;
   (b) graf bunga dengan bandul $dis(\mathcal{P}Fl_n) = n$.
4. *dis* dalam pelabelan ketakteraturan jarak pada famili graf roda dengan K_1 dari:
   (a) graf friendship join graf komplit $dis(f_n + K_1) = 2n$;
   (b) graf helm join graf komplit $dis(H_n + K_1) = n$;
   (c) graf bunga join graf komplit $dis(Fl_n + K_1) = n$;
   (d) graf kipas join graf komplit $dis(F_n + K_1) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ dengan $n \geq 4$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan ketakteraturan jarak pada famili graf roda, maka peneliti memberikan saran antara lain:

1. Peneliti lain dapat melakukan penelitian tentang pelabelan ketakteraturan jarak pada anggota famili graf roda yang lain dan gabungan secara umum dari famili graf roda baik yang isomorfis maupun yang non-isomorfis;
2. peneliti lain dapat menjadikan hasil dari penelitian ini sebagai acuan dalam menentukan nilai ketakteraturan jarak (dis) pada graf-graf khusus yang lain baik tunggal maupun gabungannya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Azizah, and Nofandik. 2009. *Teori graf* Malang: UIN Malang Press.

S. Arumugam, N. Kamatchi. 2012. On (a,d)-distance antimagic graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, Vol. 54: 279-287.

M. Baća, S. Jendrol, M. Miller, J. Ryan. 2007. On irregular total labellings. *Discrete Mathematics*, Vol. 307: 1378-1388.

G. Chartrand, O. R. Oellermann. 1993. *Applied and Algoritmic Graph Theory*. MacGraw-Hill, New York.

F. Harrary. 1994. *Graph theory*. Addison: Wesley.

N. Hartsfield, Ringel. 1994. *Pearls in graph theory*. Australia: Academic Press.

N. Inayah, R. Simanjuntak, Salman. 2013. Super (a, d)-H-antimagic total labelings for shackles of a connected graph H. *Australasian Journal of Combinatorics*. Vol. 57: 127-138.

Johnsonbaugh, Richard. 2009. *Discrete Mathematics*, Seventh Edition. New Jersey: Pearson Education, Inc.

T.A. Kusmayadi. 2012. Digraf eksentrik dari graf flower. *Tidak dipublikasikan (Tesis)*.

M. Miller, C. Rodger, R. Simanjuntak. 2003. Distance magic labelings of graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, Vol. 28: 305-315.

M. Miller, Lin, Slamin, M. Baća. 2001. *On d-antimagic labelings of prisms*. Australia: The University of Newcastle.

Munir. 2010. *Matematika diskrit*. Informatika Bandung.

R.A. Priyono. 2010. *Penerapan pewarnaan graf dalam penggunaan frekuensi radio*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

R.T. Riddiyani. 2015. Nilai ketakteraturan jarak pada graf matahari dalam mengasah keterampilan berpikir tingkat tinggi. *Tidak Dipublikasikan (Skripsi)*.

Slamin. 2009. *Desain jaringan: Pendekatan teori graf.* Jember: Universitas Jember.

Slamin. 2013. Distance Irregular Labelings of Graphs. Dipresentasikan pada *Graph Master Workshop*: Universitas Islam Malang.

Slamin, Dafik, W. Winnona. 2012. Total vertex irregularity strength of the disjoint union of sun graphs. *International Journal of Combinatorics*, Vol 1:1-9.

S.K. Vaidya, C.M. Barasara. 2012. Further results on product cordial labeling. *International J.Math. Combin.)*. Vol 3: 64-71.

K. Wijaya, Slamin. 2008. Total vertex irregular labelings of wheels, fans, suns, and friendship graphs. *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing (JCMCC)*. Vol 65: 103-112.