Pelabelan Total Super *(a,d)*-Sisi Antimagic pada Graf Roda Tank $(Tw_{m,n})$ (*Super (a,d)-Edge-antimagic Total Labeling of Tank Wheel Graph* $(Tw_{m,n})$)

Sindy Putri Amalia Ma'rufah, Dafik, Slamin
Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember (UNEJ)
Jln. Kalimantan 37, Jember 68121
e-mail: d.dafik@gmail.com

Abstrak

Sebuah graf G memiliki order p dan size q dikatakan suatu pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic jika memiliki fungsi bijektif f : V(G) ∪ E(G) ke *{1,2,...,p+q}* yang memiliki total sisi, *w(uv)=f(u)+f(v)+f(uv)*, uv ∈ E (G), membentuk barisan aritmatika yang memiliki suku awal a dan beda d. Dengan begitu graf G dikatakan super apabila kemungkinan label terkecil ada pada titiknya . Pada artikel ini, akan dipelajari tentang pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic yang konektif dengan menggunakan aksioma deduktif dan metode pendektesian pola. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pada Graf Roda Tank berlaku pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic untuk *d={0,1,2}*.

Kata Kunci: Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic, Graf Roda Tank

Abstract

A graph G of order p and size q is called an (a,d)-edge-antimagic total if there exist a bijection f : V(G) ∪ *E(G) to {1,2,...,p+q} such that the edge-weights, w(uv)=f(u)+f(v)+f(uv), uv in E(G), form an arithmetic sequence with first term a and common difference d. Such a graph G is called super if the smallest possible labels appear on the vertices. In this paper we learn about super edge-antimagic total labelings properties of connective* $(Tw_{m,n})$ *using deductive axiomatic and the pattern recognition method. The result shows that a connected Tank Wheel Graph admit a super (a,d)-edge antimagic total labeling for d={0,1,2}.*

Keywords: *super (a,d)-edge-antimagic total labeling, Tank Wheel graph.*

Pendahuluan

Ilmu pengetahuan dan Teknologi semakin berkembang seiring dengan kemajuan jaman. Berbagai macam Ilmu Pengetahuan yang telah berkembang pada saat ini. Salah satu contohnya yakni matematika. Berbagai macam cabang Ilmu di dalam matematika, salah satunya yaitu matematika diskrit yang di dalamnya terdapat pokok bahasan mengenai teori graf. Teori graf banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Persoalan-persoalan ini akan lebih jelas untuk diterangkan bila dapat direpresentasikan dalam bentuk graf. Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan cacah yang disebut label. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic (SEATL), dimana *a* bobot sisi terkecil dan *d* nilai beda.

Graf Roda Tank yang dinotasikan dengan $Tw_{m,n}$ merupakan pengembangan dari graf *cycle* yang dihubungkan satu sama lainnya. Graf ini merupakan graf yang memiliki dua ekspan pada indeks *m* dan indeks *n*. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui apakah graf Roda Tank memiliki pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic.

Definisi 1. Graf Roda Tank adalah salah satu graf yang merupakan famili dari graf *cycle*. Graf ini merupakan salah satu contoh graf *Well-Defined* yang masih belum ditemukan pelabelannya. Ide munculnya graf Roda Tank ini berasal dari pengembangan graf *cycle* yang saling dihubungkan dan ditambahkan sisi pada salah satu ujungnya, sehingga sisi tersebut menghubungakan antara satu graf dengan graf lainnya. Graf Roda Tank adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan $Tw_{m,n}$ dimana:

$$V(Tw_{m,n})=\{x_{i,j};1\le i\le m, 1\le j\le n\}$$
$$E(Tw_{m,n})=\{x_{i,j}x_{i,j+1};1\le i\le m, 1\le j\le n-1\}$$
$$E(Tw_{m,n})=\{x_{i,n}x_{i,1};1\le i\le m\}$$
$$E(Tw_{m,n})=\{x_{i,j}x_{i,n-j+3};1\le i\le m, 3\le j\le \frac{n}{2}\}$$
$$E(Tw_{m,n})=\{x_{i,j}x_{i+1,n-j+1};1\le i\le m-1, 1\le j\le \frac{n}{2}\}$$
$$E(Tw_{m,n})=\{x_{1,n-j+2}x_{m,j};2\le j\le \frac{n}{2}\}$$

Pelabelan Total Super *(a,d)*-Sisi Antimagic. Sebuah pemetaan satu-satu *f* dari *V(G)* ke himpunan bilangan bulat *{1,2,3,...,p}* disebut pelabelan titik *(a,d)*-sisi antimagic jika himpunan bobot sisinya *w(uv) = f(u)+f(v)* pada semua sisi *G* adalah *{a, a+d, a+2d,...,a+(q-1)d}* untuk *a>0* dan $d \leq 0$ keduanya adalah bilangan bulat, sedangkan Pelabelan total *(a,d)*-sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu *f* dari $V(G) \cup E(G)$ ke bilangan bulat *{1,2,3,...,p+q}* sehingga himpunan bobot sisinya *w(t)(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)* pada semua sisi *G* adalah *{a, a+d, a+2d,...,a+(q-1)d}* untuk *a>0* dan $d \leq 0$ keduanya bilangan bulat. Sebuah pelabelan total *(a,d)*-sisi antimagic disebut pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic jika *f(V) = {1,2,3,...p}* dan *f(E) = {p+1,p+2,...p+q}*.

Dengan kata lain, pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic pada sebuah graf *G = (V,E)* adalah pelabelan titik dengan bilangan bulat *{1,2,3,...p}* dan pelabelan sisi dengan bilangan bulat *{p+1,p+2,...p+q}* dari sebuah graf *G* dimana *p* adalah banyaknya titik dan *q* adalah banyaknya sisi pada graf *G*, sedemikian hingga himpunan bobot dari sisinya adalah $W=\{w(x,y) | xy \in E(G)\} = \{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(q-a)d\}$ untuk *a>0* dan $d \leq 0$, dimana $\alpha(u)$ adalah label dari titik $\alpha(v)$ adalah label dari titik *v* dan $\alpha(uv)$ adalah label dari sisi *uv*. Untuk mencari batas atas nilai beda *d* pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic dapat ditentukan dengan lemma berikut ini [2];

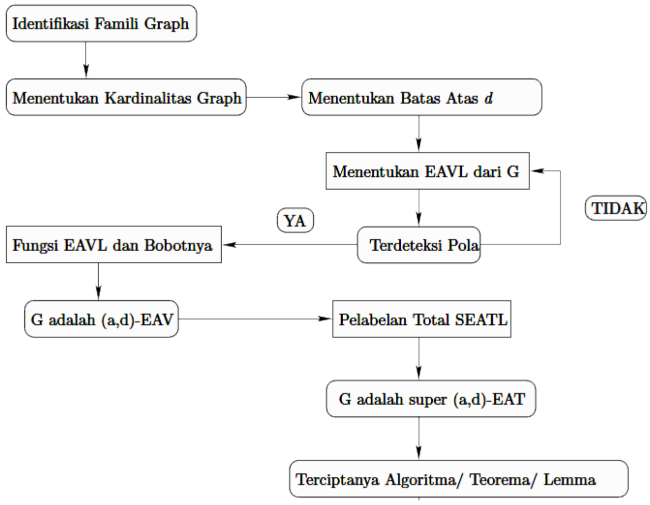
Lemma 1. Jika sebuah graf *(p,q)* adalah pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic maka $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$

Hasil *Super Edge Antimagic Total Labelling* (SEATL) konektif yang mempunyai beda $d \in \{0,1,2\}$ pada Graf *Well-Defined* adalah:

1. Graf Ulat Sutra (Sw_n) : Dian, A.H,2014
2. Graf Rantai Pentagon $(B\zeta_n)$: Ermita, A.R,2014
3. Graf Tribun $(\Im_n)$: Muhlisatul, M,2014
4. Graf Lampion $(£_{m,n})$: Robiyatul, A,2014
5. Graf Siput (S_n) : Dewi, N.R,2013
6. Graf Tunas Kelapa $(CR_{n,m})$: Lestari, I.L,2013
7. Graf UFO $(U_{m,n})$: Umilasari, R,2013
8. Graf Diamond (Dl_n) : Sya'diyah, L, 2011
9. Graf Tangga (St_n) : Aprilia, I, 2011
10. Graf Buku Segitiga (Bt_n) : Chandra, F.E, 2011

Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf Roda Tank, jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan total super sisi antimagic maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola *(pattern recognition)*. Adapun langkah-langkah penelitian yang tersaji pada diagram alur penelitian berikut:



Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui Untuk mengetahui batas atas pelabelan total super *(a,d)* - sisi antimagic pada graf Roda Tank konektif dan untuk mengetahui pelabelan total super *(a,d)* - EATL pada graf Roda Tank konektif. Hasil penelitian untuk pelabelan super (a,d)-sisi antimmagic pada graf Roda Tank, yakni:

Batas Atas *d* Graf Roda Tank. Diketahui jumlah titik pada graf Roda Tank adalah mn dan jumlah sisi $2mn-2m-1$. Dengan demikian batas atas nilai beda *d* tersebut adalah:

$$
\begin{aligned}
d &\leq \frac{2p+q-5}{q-1} \\
&= \frac{2(mn)+2(mn)-2m-1-5}{2(mn)-2m-1-1} \\
&= \frac{4(mn)-2m-6}{2(mn)-2m-2} \\
&= 2+\frac{2m-2}{2(mn)-2m-2} \\
&\leq 2
\end{aligned}
$$

Karena pelabelan *SEAT* selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai $d \geq 0$ dan *d* adalah bilangan bulat, sehingga $d \in \{0,1,2\}$. Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan total super *(a,d)* - sisi antimagic akan disesuaikan dengan nilai *d* yang telah ditetapkan.

Lemma 1. Ada pelabelan titik $(m+2,1)$ -sisi antimagic pada graf graf Roda Tank jika $n \leq 8, n\, genap\, dan\, m \leq 2$.

Bukti. Labeli titik graf Roda Tank dengan sebuah fungsi f_1 , definisikan pelabelan $f_1 : V(Tw_{m,n}) \rightarrow \{1,2,\ldots,mn\}$ maka pelabelan f_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

- untuk $f_1(x_{i,j})$

$$
\begin{array}{ll}
i; & (i)\, sembarang,\, j=1 \\
2mn+m+2i-2mj-1; & (i)\, sembarang,\, \frac{n+4}{2} \leq j \leq n \\
2mj+2i-3m; & (i)\, sembarang,\, 2 \leq j \leq \frac{n}{2} \\
mn-m+i; & (i)\, sembarang,\, j=\frac{n+2}{2}
\end{array}
$$

Pelabelan titik pada f_1 adalah fungsi bijektif yang memetakan $Tw_{m,n}$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,2,\dots,mn\}$. Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik f_1 dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian, maka fungsi bijektif w_{f_1} dapat ditentukan melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika sebagai berikut:

- untuk $W_{f_1}(x_{i,j}x_{i,j+1})$

$$\begin{array}{ll} m+3i\,; & (i)\, sembarang\,,\, j=1 \\ 2mn-4m+3i-1\,; & (i)\, sembarang\,,\, j=\frac{n+2}{2} \\ 2mn-4m+3i\,; & (i)\, sembarang\,,\, j=\frac{n}{2} \\ 4mn-4mj+4i-2\,; & (i)\, sembarang\,,\, \frac{n+4}{2}\leq j\leq n \\ 4i+4mj-4m\,; & (i)\, sembarang\,, 2\leq j\leq\frac{n-2}{2} \end{array}$$

- untuk $W_{f_1}(x_{i,n}x_{i,1})$

$$\begin{array}{ll} m+3i-1\,; & (i)\, sembarang \end{array}$$

- untuk $W_{f_1}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})$

$$\begin{array}{ll} m+3i+1\,; & 1\leq i\leq m-1\,,\, j=1 \\ 4i+4mj-4m+1\,; & 1\leq i\leq m-1\,,\, j=\frac{n}{2} \\ 2mn-4m+3i+1\,; & 1\leq i\leq m-1, 2\leq j\leq\frac{n-2}{2} \end{array}$$

- untuk $W_{f_1}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})$

$$\begin{array}{ll} 4mj-4m+1\,; & 2\leq j\leq\frac{n}{2} \end{array}$$

- untuk $W_{f_1}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})$

$$\begin{array}{ll} 4i+4mj-8m-1\,; & (i)\, sembarang\,, 3\leq j\leq\frac{n}{2} \end{array}$$

Berdasarkan bobot sisi EAV ini, bobot sisi terkecil terletak pada $w_{f_1}(x_{i,n}x_{i,1})$ yaitu $m+2$ untuk $i=1$. Dan bobot sisi terbesar terletak pada $w_{f_1}(x_{i,j}x_{i,j+1})$ yaitu $2\text{mn}-m$ untuk $i=m$ dan $j=\frac{n}{2}$.

Dengan mensubstitusikan fungsi yang bergerak, $1\leq i\leq m$ dan $1\leq j\leq n$ maka didapatkan nilai-nilai berurutan yang akan membentuk himpunan $w_{f_1}=\{m+2, m+3, m+4,\dots, 2\text{mn}-m\}$. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa f_1 adalah suatu pelabelan titik *(m+2,1)*.

Teorema 1. Ada pelabelan total super *(3mn-m+1,0)*-sisi antimagic pada graf Roda Tank jika $m\geq 3$ dan $n\geq 8, n\, genap$.

Bukti. Gunakan pelabelan titik f_1 untuk melabeli titik graf Roda Tank $Tw_{m,n}$, kemudian definisikan label sisi $f_2: E(Tw_{m,n})\rightarrow\{m+2, m+3,\dots, 2\text{mn}-m\}$, sehingga label sisi f_2 untuk pelabelan total super *(a,0)*-sisi antimagic pada graf $Tw_{m,n}$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

- untuk $f_2(x_{i,j}x_{i,j+1})$

$$\begin{array}{ll} m+3i\,; & (i)\, sembarang\,,\, j=1 \\ mn+3m-3i+2\,; & (i)\, sembarang\,,\, j=\frac{n+2}{2} \\ mn+3m-3i+1\,; & (i)\, sembarang\,,\, j=\frac{n}{2} \\ 4mj-mn-m-4i+3\,; & (i)\, sembarang\,,\, \frac{n+4}{2}\leq j\leq n \\ 3mn+3m-4mj-4i+1\,; & (i)\, sembarang\,, 2\leq j\leq\frac{n-2}{2} \end{array}$$

- untuk $f_2(x_{i,n}x_{i,1})$

$$\begin{array}{ll} 3mn-2m+3i+2\,; & (i)\, sembarang \end{array}$$

- untuk $f_2(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})$

$$\begin{array}{ll} 3mn-2m-3i\,; & 1\leq i\leq m-1\,,\, j=1 \\ mn+3m-3i\,; & 1\leq i\leq m-1\,,\, j=\frac{n}{2} \\ 3mn+3m-4mj-4i\,; & 1\leq i\leq m-1, 2\leq j\leq\frac{n-2}{2} \end{array}$$

- untuk $f_2(x_{1,n-j+2}x_{m,j})$

$$\begin{array}{ll} 3mn+3m-4mj\,; & 2\leq j\leq\frac{n}{2} \end{array}$$

- untuk $f_2(x_{i,j}x_{i,n-j+3})$

$$\begin{array}{ll} 3mn+7m-4mj-4i+2\,; & (i)\, sembarang\,, 3\leq j\leq\frac{n}{2} \end{array}$$

Jika W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total graf Roda Tank berdasarkan penjumlahan bobot sisi dengan label sisinya maka W_{f_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot sisi EAVL W_{f_1} dan rumus label sisi f_2 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

- untuk $W_{f_2}(x_{i,j}x_{i,j+1})$

$$\begin{array}{ll} 3mn-m+1\,; & (i)\, sembarang\,,\, j=1 \\ 3mn-m+1\,; & (i)\, sembarang\,,\, j=\frac{n+2}{2} \\ 3mn-m+1\,; & (i)\, sembarang\,,\, j=\frac{n}{2} \\ 3mn-m+1\,; & (i)\, sembarang\,,\, \frac{n+4}{2}\leq j\leq n \\ 3mn-m+1\,; & (i)\, sembarang\,, 2\leq j\leq\frac{n-2}{2} \end{array}$$

- untuk $W_{f_2}(x_{i,n}x_{i,1})$

$$3mn-m+1; \quad (i)\,sembarang$$

- untuk $W_{f_2}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})$

$$\begin{array}{ll} 3mn-m+1; & 1\le i\le m-1,\ j=1 \\ 3mn-m+1; & 1\le i\le m-1,\ j=\frac{n}{2} \\ 3mn-m+1; & 1\le i\le m-1, 2\le j\le\frac{n-2}{2} \end{array}$$

- untuk $W_{f_2}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})$

$$3mn-m+1; \quad 2\le j\le\frac{n}{2}$$

- untuk $W_{f_2}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})$

$$3mn-m+1; \quad (i)\,sembarang, 3\le j\le\frac{n}{2}$$

Berdasarkan hasil diatas, dapat dilihat bahwa setiap bobot sisi nilainya *3mn-m+1*. Sehingga himpunan bobot sisi untuk W_{f_2} dapat ditulis W_{f_2} = {3mn-m+1, 3mn-m+1, … , 3mn-m+1}. Dapat disimpulkan bahwa graf Roda Tank $Tw_{m,n}$ mempunyai pelabelan total super (a,d) -sisi antimagic dengan a = 3mn-m+1 dan d=0, dengan kata lain graf Roda Tank $Tw_{m,n}$ mempunyai pelabelan total super (3mn-m+1,0) -sisi antimagic.

Teorema 2. Ada pelabelan total super (mn+m+3,2)-sisi antimagic pada graf Roda Tank $Tw_{m,n}$ jika $m\ge 2$ dan $n\ge 8$, n genap.

Bukti. Untuk mencari pelabelan sisi untuk d=2 menggunakan hasil pelabelan sisi dari d=0 dan menggunakan jumlah sisi dan jumlah titik. Sebagai berikut : $f_3(y)=2|V|+|E|+1-f_2(y)$. Jadi dengan rumus tersebut berlaku untuk semua label sisi d=2 dengan mensubstitusikan nilai $f_2(y)$ yang sesuai. Berikut hasil fungsi label sisi untuk d=2 :

- untuk $f_3(x_{i,j}x_{i,j+1})$

$$\begin{array}{ll} mn+3i-1; & (i)\,sembarang,\ j=1 \\ 3mn-5m+3i-2; & (i)\,sembarang,\ j=\frac{n+2}{2} \\ 3mn-5m+3i-1; & (i)\,sembarang,\ j=\frac{n}{2} \\ 5mn-m-4mj+4i-3; & (i)\,sembarang, \frac{n+4}{2}\le j\le n \\ mn-5m+4mj+4i-1; & (i)\,sembarang, 2\le j\le\frac{n-2}{2} \end{array}$$

- untuk $f_3(x_{i,n}x_{i,1})$

$$mn+3i-2; \quad (i)\,sembarang$$

- untuk $f_3(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})$

$$\begin{array}{ll} mn+3i-1; & 1\le i\le m-1,\ j=1 \\ 3mn-5m+3i; & 1\le i\le m-1,\ j=\frac{n}{2} \\ mn-5m+4mj+4i; & 1\le i\le m-1, 2\le j\le\frac{n-2}{2} \end{array}$$

- untuk $f_3(x_{1,n-j+2}x_{m,j})$

$$mn-5m+4mj; \quad 2\le j\le\frac{n}{2}$$

- untuk $f_3(x_{i,j}x_{i,n-j+3})$

$$mn-9m+4mj+4i-2; \quad (i)\,sembarang, 3\le j\le\frac{n}{2}$$

Untuk mencari bobot total d=2 dengan menjumlahkan bobot sisi dan fungsi label sisi d=2. Dengan mensubstitusikan nilai f_3 yang sesuai. Sehingga dapat diperoleh bobot total sebagai berikut:

- untuk $W_{f_3}(x_{i,j}x_{i,j+1})$

$$\begin{array}{ll} mn+m+6i-1; & (i)\,sembarang,\ j=1 \\ 5mn-9m+6i-3; & (i)\,sembarang,\ j=\frac{n+2}{2} \\ 5mn-9m+6i-1; & (i)\,sembarang,\ j=\frac{n}{2} \\ 9mn-m-8mj+8i-5; & (i)\,sembarang, \frac{n+4}{2}\le j\le n \\ mn-9m+8mj+8i-1; & (i)\,sembarang, 2\le j\le\frac{n-2}{2} \end{array}$$

- untuk $W_{f_3}(x_{i,n}x_{i,1})$

$$mn+m+6i-3; \quad (i)\,sembarang$$

- untuk $W_{f_3}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})$

$$\begin{array}{ll} mn+m+6i+1; & 1\le i\le m-1,\ j=1 \\ 5mn-9m+6i+1; & 1\le i\le m-1,\ j=\frac{n}{2} \\ mn-9m+8mj+8i+1; & 1\le i\le m-1, 2\le j\le\frac{n-2}{2} \end{array}$$

- untuk $W_{f_3}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})$

$$mn-9m+8mj+1; \quad 2\le j\le\frac{n}{2}$$

- untuk $W_{f_3}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})$

$$mn-17m+8mj+8i-3; \quad (i)\,sembarang, 3\le j\le\frac{n}{2}$$

Dapat dinyatakan bahwa W_{f_3} membentuk barisan aritmatika dengan suku awal a=mn+m+3 dan beda(b)=2 yaitu W_{f_3} = {mn+m+3, mn+m+5, … ,5mn-3m-1}. Dapat disimpulkan bahwa graf Roda Tank $Tw_{m,n}$ dengan $m \geq 3$, m ganjil mempunyai pelabelan total super(a,d)-sisi antimagic dengan a = mn+m+3 dan d=2, dengan kata lain graf Roda Tank $Tw_{m,n}$ mempunyai pelabelan total super (mn+m+3,2)-sisi antimagic.

Teorema 3. Ada pelabelan total super (2mn+2,1)-sisi antimagic pada graf Roda Tank $Tw_{m,n}$ jika $m \geq 3$, m ganjil dan $n \geq 8$, n genap.

Bukti. pelabelan total super *(a,1)*-sisi antimagic pada graf $Tw_{m,n}$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

- untuk $f_4(x_{i,j}x_{i,j+1})$

$$\frac{(6-2(-1)^i)mn-(11-9(-1)^i)m-3\mathrm{i}+(\frac{3+(-1)^i}{2})}{2}; \quad (i)\, sembarang\,,\ j=1$$

$$\frac{(6-2(-1)^i)mn-(11-9(-1)^i)m-3\mathrm{i}+(\frac{3+(-1)^i}{2})}{2}; \quad (i)\, sembarang\,,\ j=\frac{n+2}{2}$$

$$\frac{(3-(-1)^i)mn+(2-(-1)^i)m-3\mathrm{i}+(\frac{3-(-1)^i}{2})}{2}; \quad (i)\, sembarang\,,\ j=\frac{n}{2}$$

$$\frac{(4mn-19m+4mj-4i+3)}{2}; \quad (i)\, sembarang\,,\ \frac{n+4}{2} \leq j \leq n$$

$$\frac{(6mn-m-4mj-4i+1)}{2}; \quad (i)\, sembarang\,,\ 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$$

- untuk $f_4(x_{i,n}x_{i,1})$

$$\frac{(6+2(-1)^i)mn-(11+9(-1)^i)m-3\mathrm{i}+(\frac{5-(-1)^i}{2})}{2}; \quad (i)\, sembarang$$

- untuk $f_4(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})$

$$\frac{(6+2(-1)^i)mn-(11+9(-1)^i)m-3\mathrm{i}+(\frac{1-(-1)^i}{2})}{2}; \quad 1 \leq i \leq m-1\,,\ j=1$$

$$\frac{(6+2(-1)^i)mn-(11+9(-1)^i)m-3\mathrm{i}+(\frac{1-(-1)^i}{2})}{2}; \quad 1 \leq i \leq m-1\,,\ j=\frac{n}{2}$$

$$\frac{(4mn-3m-4mj-4i+1)}{2}; \quad 1 \leq i \leq m-1, 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$$

- untuk $f_4(x_{1,n-j+2}x_{m,j})$

$$\frac{(4mn+3m-4mj+1)}{2}; \quad 2 \leq j \leq \frac{n}{2}$$

- untuk $f_4(x_{i,j}x_{i,n-j+3})$

$$\frac{(4mn+7m-4mj-4i+3)}{2}; \quad (i)\, sembarang\,, 3 \leq j \leq \frac{n}{2}$$

Jika W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total, berdasarkan pelabelan f_4 maka dapat d W_{f_4} iperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL da W_{f_1} n rumus label sisi f_4 dengan syarat batas i dan j yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

- untuk $W_{f_4}(x_{i,j}x_{i,j+1})$

$$\frac{(6-2(-1)^i)mn-(11-9(-1)^i)m-3\mathrm{i}+(\frac{3+(-1)^i}{2})}{2}; \quad (i)\, sembarang\,,\ j=1$$

$$\frac{(6-2(-1)^i)mn-(11-9(-1)^i)m-3\mathrm{i}+(\frac{3+(-1)^i}{2})}{2}; \quad (i)\, sembarang\,,\ j=\frac{n+2}{2}$$

$$\frac{(3-(-1)^i)mn+(2-(-1)^i)m-3\mathrm{i}+(\frac{3-(-1)^i}{2})}{2}; \quad (i)\, sembarang\,,\ j=\frac{n}{2}$$

$$\frac{(12mn-19m-4mj+4i-1)}{2}; \quad (i)\, sembarang\,,\ \frac{n+4}{2} \leq j \leq n$$

$$\frac{(6mn-m-4mj-4i+1)}{2}; \quad (i)\, sembarang\,, 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$$

- untuk $W_{f_4}(x_{i,n}x_{i,1})$

$$\frac{(6+2(-1)^i)mn-(11+9(-1)^i)m-3\mathrm{i}+(\frac{5-(-1)^i}{2})}{2}; \quad (i)\, sembarang$$

- untuk $W_{f_4}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})$

$$\frac{(6+2(-1)^i)mn-(11+9(-1)^i)m-3\mathrm{i}+(\frac{1-(-1)^i}{2})}{2}; \quad 1 \leq i \leq m-1\,,\ j=1$$

$$\frac{(7-(-1)^i)mn-(6-(-1)^i)m+3i+(\frac{5+(-1)^i}{2})}{2};$$

$$1\le i\le m-1,\ j=\frac{n}{2}$$

$$\frac{(4mn-5m+4mj+4i+3)}{2};$$

$$1\le i\le m-1, 2\le j\le\frac{n-2}{2}$$

- untuk $W_{f_4}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})$

$$\frac{(4mn-5m+4mj+3)}{2};\quad 2\le j\le\frac{n}{2}$$

- untuk $W_{f_4}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})$

$$\frac{(4mn-9m+4mj+4i+1)}{2};$$

$$(i)\ sembarang, 3\le j\le\frac{n}{2}$$

Beda setiap rangkaian tersebut adalah 1, sehingga dapat ditulis dalam himpunan w_{f_4} = *{2mn+2, 2mn+3, ... , 4mn-2m}*. Dengan kata lain graf Roda Tank $Tw_{m,n}$ mempunyai pelabelan total super *(2mn+2,1)*-sisi antimagic.

Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Graf Roda Tank konektif $(Tw_{m,n})$ memiliki pelabelan total super *(a,d)*-sisi antimagic untuk d=0,1,2. Hasil penelitiannya telah dibuktikan bahwa ada pelabelan titik *(m+2,1)*-sisi antimagic pada graf Roda Tank $(Tw_{m,n})$ jika $n\ge6$, n genap dan $m\ge2$. Ada pelabelan total super *(3mn-m+1,0)*, dan *(mn+m+3,2)*-sisi antimagic pada graf Roda Tank $(Tw_{m,n})$ jika $m\ge3$ dan $n\ge6$, n genap. Serta ada pelabelan total super *(2mn+2,1)*-sisi antimagic pada graf Roda Tank $(Tw_{m,n})$ jika $m\ge3$, m ganjil dan $n\ge6$, n genap.

Saran

Dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran pembaca dapat melakukan penelitian pada Pelabelan total super *(a,d)* -sisi antimagic pada konektif graf Roda Tank $(Tw_{m,n})$, dengan m genap untuk d=1, pada konektif graf Roda Tank $(Tw_{m,n})$, dengan n ganjil.

Daftar Pustaka

[1] Adawiyah, R. 2014. *Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Lampion*. e-UNEJ Repository

[2] Albirri, E.R. 2014. *Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Rantai Pentagon*. e-UNEJ Repository

[3] Chandra, F.E. 2011. *Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Buku Segitiga*. e-UNEJ Repository

[4] Chartrand, G. 2009. *Introdutory Graph Theory*. United Stated of America: Dover Publication inc.

[5] Dafik, dkk. 2009. *On Super (a,d)-Edge anti magic Total Labeling of Disconnected graphs*. (Jurnal discrete mathematics jilid 309 halaman 4909-4915)

[6] Dewi, N. R 2013. *Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Siput*. e-UNEJ Repository

[7] Hadi, D. A. 2014. *Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Ulat Sutra*. e-UNEJ Repository

[8] Lestari, I. L. 2013. *Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Tunas Kelapa*. e-UNEJ Repository

[9] Mahmudah, M. 2014. *Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Tribun*. e-UNEJ Repository

[10] Munir, R. 2012. *Matematika Diskrit: Edisi kelima*. Bandung: Informatika Bandung

[11] Umilasari, R. 2013. *Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf UFO*. e-UNEJ Repository

[12] Sya'diyah, R. 2011. *Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic pada Graf Tangga Permata*. e-UNEJ Repository