



**KETERATURAN GRAF BERARAH DERAJAT  
KELUAR TIGA DENGAN ORDO KURANG DUA  
DARI BATAS MOORE**

**SKRIPSI**

Oleh

**Gembong Angger Waspodo**

**NIM 050210101049**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2010**



**KETERATURAN GRAF BERARAH DERAJAT  
KELUAR TIGA DENGAN ORDO KURANG DUA  
DARI BATAS MOORE**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh  
**Gembong Angger Waspodo**  
**NIM 050210101049**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2010**

## PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

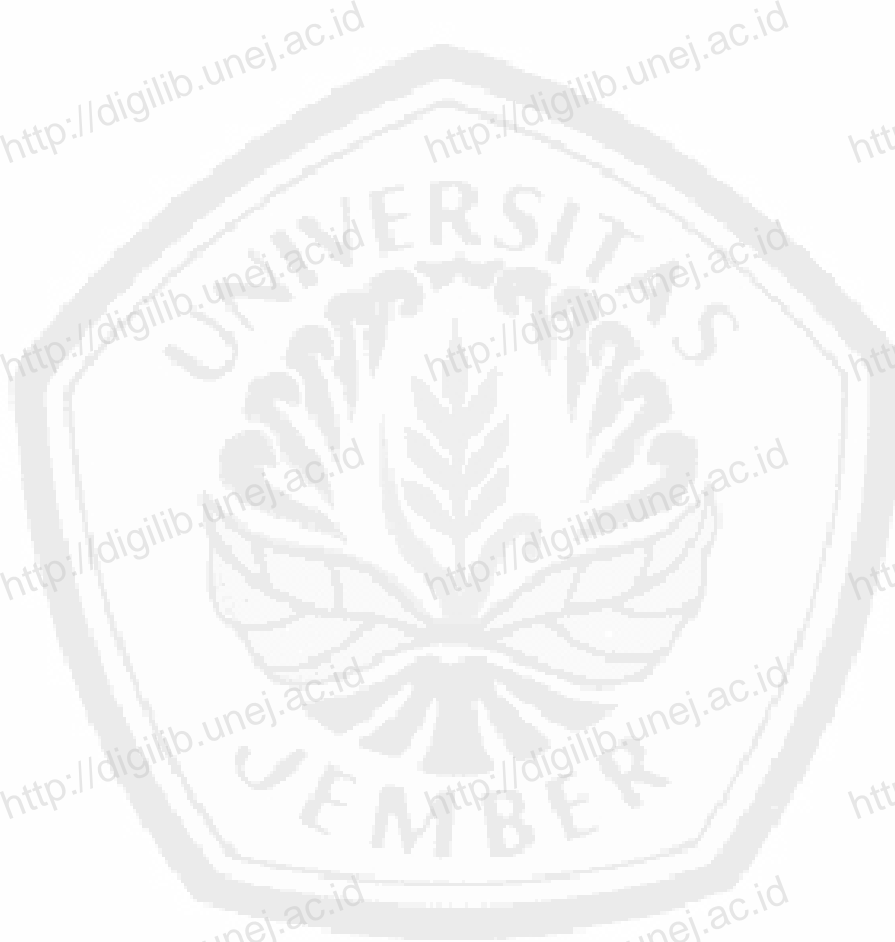
1. Ibunda Warsiningsih, Ayahanda Hafidz, dan mendiang Adikku Jauharin Nastiti;
2. Drs. Dinawati Trapsilasiwi, M.Pd., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama penulis menjadi mahasiswa;
3. Teman-temanku: Haris, Indah, Anggi, Khud, Debbi, Zainal, Ikhsan, dan Riris yang telah memberi banyak bantuan;
4. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan.



## MOTO

Many of life's failures are men who did not realize how close they were to success when they gave up.

*(Thomas Alva Edison)*



## PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Gembong Angger Waspodo

NIM : 050210101049

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul "Keteraturan Graf Berarah Derajat Keluar Tiga dengan Ordo Kurang Dua dari Batas Moore" adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sebelumnya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 3 Maret 2010

Yang menyatakan,

Gembong Angger Waspodo

NIM 050210101049

**SKRIPSI**

**KETERATURAN GRAF BERARAH DERAJAT KELUAR TIGA  
DENGAN ORDO KURANG DUA DARI BATAS MOORE**

Oleh

Gembong Angger Waspodo

NIM 050210101049

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Pembimbing Anggota : Drs. Slamim, M.Comp.Sc., Ph.D.

## PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Keteraturan Graf Berarah Derajat Keluar Tiga dengan Ordo Kurang Dua dari Batas Moore" telah diuji dan disahkan pada:  
hari, tanggal : Rabu, 3 Maret 2010  
tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.

Drs. Slamain, M.Comp.Sc., Ph.D.

NIP 19700307 199512 2 001

NIP 19670420 199201 1 001

Anggota I,

Anggota II,

Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Drs. Antonius C. P., M.App.Sc.

NIP 19680802 199303 1 004

NIP 19690928 199302 1 001

Mengetahui,

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan  
Universitas Jember

Drs. H. Imam Muchtar, S.H., M.Hum.

NIP 19540712 198003 1 005

## RINGKASAN

**Keteraturan Graf Berarah Derajat Keluar Tiga dengan Ordo Kurang Dua dari Batas Moore**; Gembong Angger Waspodo, 050210101049; 2010: 54 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Pembimbing: (1) Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

(2) Drs. Slamain, M.Comp.Sc., Ph.D.

Dengan pesatnya perkembangan teknologi informasi, kebutuhan akan rancangan jaringan komunikasi yang besar menjadi meningkat. Jaringan komunikasi dapat dimodelkan sebagai graf atau graf berarah dengan asumsi tiap elemen pemroses pada jaringan direpresentasikan sebagai titik dan koneksi di antara dua elemen pemroses direpresentasikan sebagai sisi atau sisi berarah (pada kasus koneksi berarah).

Ada dua parameter yang mempengaruhi ordo (jumlah titik) dari graf atau graf berarah, yaitu derajat dan diameter. Derajat adalah jumlah koneksi suatu titik pada graf atau graf berarah. Diameter adalah jarak terjauh di antara sebarang dua titik. Pada kasus graf berarah, derajat sebuah titik dibedakan menjadi derajat keluar dan derajat masuk. Derajat keluar adalah jumlah koneksi yang meninggalkan sebuah titik, sedangkan derajat masuk adalah jumlah koneksi yang menuju suatu titik. Semakin besar derajat keluar atau diameter graf berarah, maka semakin besar jumlah titik yang dapat diraih. Oleh karena itu, persoalan bagaimana merancang jaringan berarah (jaringan dengan koneksi berarah) dengan skala besar adalah mencari berapa ukuran maksimal graf berarah dengan diberikan derajat keluar dan diameter tertentu yang lebih dikenal dengan sebutan  $n_{d,k}$  problem. Interval  $n_{d,k}$  (ordo graf berarah dengan derajat keluar dan diameter tertentu) dibatasi oleh batas atas Moore ( $M_{d,k}$ ) yang besarnya  $1 + d + d^2 + \dots + d^k$  dengan asumsi graf berarah yang dibicarakan adalah graf berarah dengan derajat keluar sama untuk setiap titiknya.



Salah satu upaya mendapatkan besar  $n_{d,k}$  yang optimal dan mungkin untuk dicapai adalah dengan mereduksi besarnya batas atas Moore atau membuktikan ketiadaan graf berarah dengan ordo mendekati atau sama dengan batas Moore. Namun, ada dua kemungkinan bagi keberadaan graf berarah, yaitu *diregular* (sebarang dua titik pada graf berarah memiliki derajat masuk sama dengan derajat keluar) dan *non-diregular* (ada titik pada graf berarah yang memiliki derajat masuk tidak sama dengan derajat keluar). Skripsi ini memberikan pembuktian bahwa graf berarah dengan derajat keluar  $d = 3$ , diameter  $k \geq 3$ , dan ordo  $M_{3,k} - 2$  adalah *diregular*.

Manfaat dari hasil penelitian ini adalah dihasilkannya jaminan tentang keteraturan dari graf berarah dengan derajat keluar  $d = 3$ , diameter  $k \geq 3$ , dan ordo  $M_{3,k} - 2$ . Kriteria keteraturan ini selanjutnya akan digunakan untuk membuktikan ketiadaan graf berarah.

## PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah Swt. atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Keteraturan Graf Berarah Derajat Keluar Tiga dengan Ordo Kurang Dua dari Batas Moore". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Dosen Pembimbing I dan Dosen Pembimbing II yang telah memberikan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
6. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Maret 2010

Penulis

## DAFTAR ISI

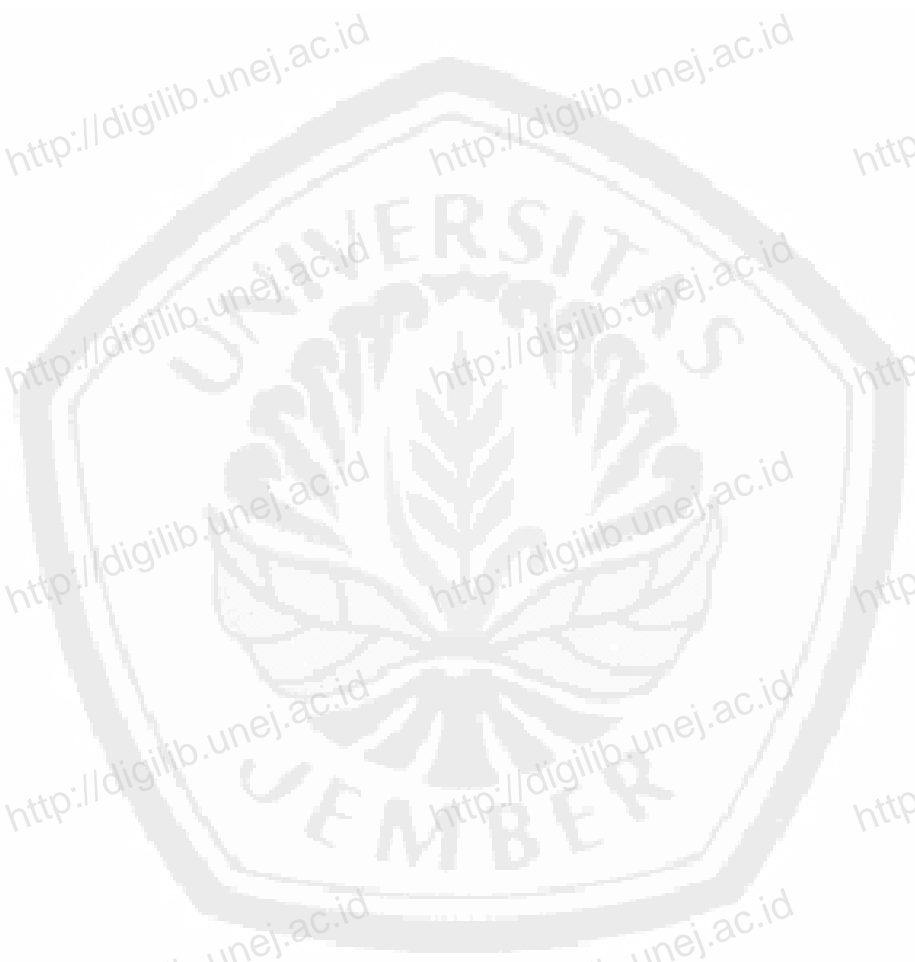
HALAMAN JUDUL . . . . .	i
HALAMAN PERSEMBAHAN . . . . .	ii
HALAMAN MOTO . . . . .	iii
HALAMAN PERNYATAAN . . . . .	iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN . . . . .	v
HALAMAN PENGESAHAN . . . . .	vi
RINGKASAN . . . . .	vii
PRAKATA . . . . .	ix
DAFTAR ISI . . . . .	xi
DAFTAR GAMBAR . . . . .	xiii
DAFTAR TABEL . . . . .	xiv
DAFTAR LAMBANG . . . . .	xv
<b>1 PENDAHULUAN . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	5
1.3 Batasan Masalah . . . . .	5
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	5
1.5 Manfaat Penelitian . . . . .	6
<b>2 TINJAUAN PUSTAKA . . . . .</b>	<b>7</b>
2.1 Aplikasi Graf . . . . .	7
2.2 Graf dan Graf Berarah . . . . .	8
2.3 Graf Berarah . . . . .	8
2.4 Konsep <i>Repeat</i> . . . . .	11
2.5 Graf Berarah Moore . . . . .	12
2.6 Keteraturan Graf Berarah Moore . . . . .	13
2.7 Keteraturan Graf Berarah dengan Ordo Mendekati Batas Moore . . . . .	14
2.7.1 Keteraturan Graf Berarah $G \in \mathcal{G}(d, k, 2)$ . . . . .	16
2.7.2 Keteraturan Graf Berarah $G \in \mathcal{G}(3, k, 2)$ . . . . .	18
<b>3 METODOLOGI PENELITIAN . . . . .</b>	<b>24</b>

3.1	Jenis Penelitian . . . . .	24
3.2	Metode Penelitian . . . . .	24
3.2.1	Metode Deduktif Aksiomatik . . . . .	24
3.2.2	Metode Induktif . . . . .	24
3.3	Definisi Operasional . . . . .	24
3.4	Rancangan Penelitian . . . . .	25
<b>4</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN . . . . .</b>	<b>28</b>
4.1	Bentuk Graf Berarah Berderajat Keluar Tiga yang Dihasilkan Teknik Konstruksi Graf Berarah Kautz atau Teknik Konstruksi Pengha- pusan Titik . . . . .	28
4.2	Struktur <i>Repeat</i> Graf Berarah <i>Non-diregular</i> $G \in \mathcal{G}(3, k, 2)$ . . . . .	31
4.2.1	Struktur <i>Repeat</i> Graf Berarah $G \in \mathcal{G}(3, k, 2)$ dengan <i>Inde- gree Sequence</i> $(2, 2, 2, 3, \dots, 3, 4, 5)$ . . . . .	33
4.2.2	Struktur <i>Repeat</i> Graf Berarah $G \in \mathcal{G}(3, k, 2)$ dengan <i>Inde- gree Sequence</i> $(2, 2, 2, 3, \dots, 3, 6)$ . . . . .	36
4.3	Keteraturan Graf Berarah $G \in \mathcal{G}(3, k, 2)$ . . . . .	39
<b>5</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN . . . . .</b>	<b>54</b>
5.1	Kesimpulan . . . . .	54
5.2	Saran . . . . .	54
	<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>	<b>55</b>
	<b>LAMPIRAN . . . . .</b>	<b>57</b>

## DAFTAR GAMBAR

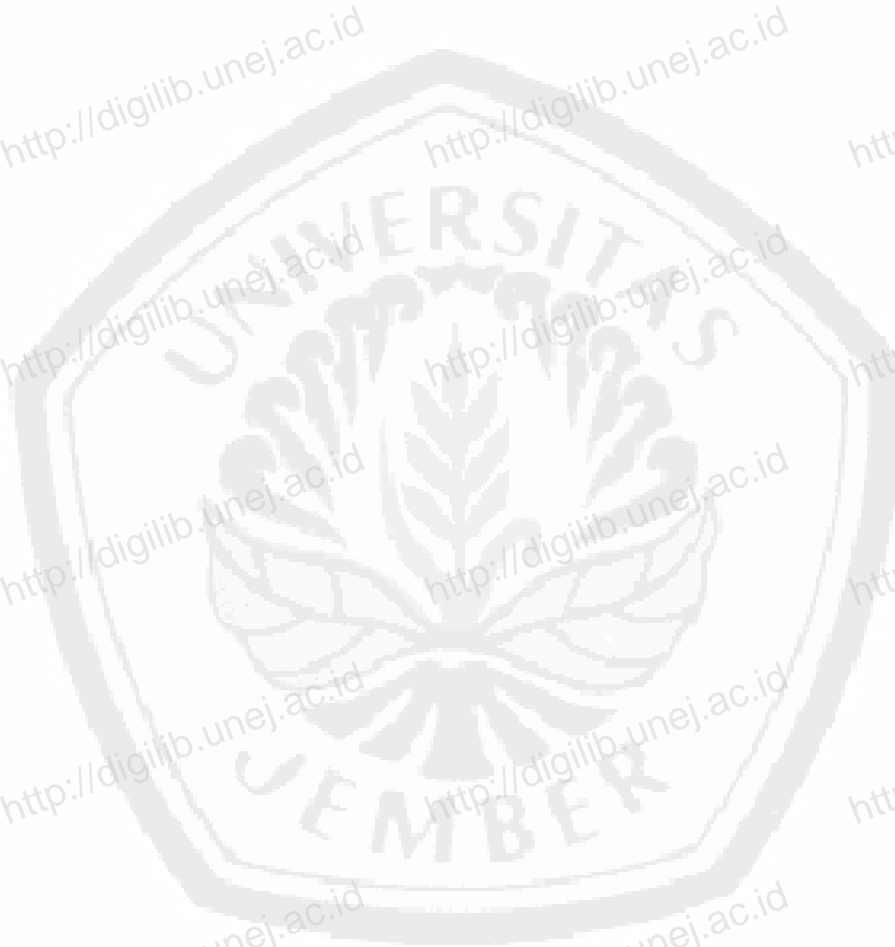
1.1	Ilustrasi perangkat digital yang terintegrasi pada suatu jaringan . . . . .	2
2.1	Contoh graf berarah . . . . .	9
2.2	Graf berarah dan matrik ketetanggaannya . . . . .	9
2.3	Contoh graf berarah <i>diregular</i> dan <i>non-diregular</i> . . . . .	10
2.4	Isomorfisma pada graf berarah . . . . .	11
2.5	<i>Multiset</i> $T_k^+(u)$ . . . . .	12
2.6	Ilustrasi diagram graf berarah Moore . . . . .	13
2.7	Graf berarah $G_2 \in \mathcal{G}(2,2,2)$ dan $G_3 \in \mathcal{G}(3,2,3)$ . . . . .	14
2.8	Graf berarah Kautz $G \in \mathcal{G}(2, 2, 1)$ . . . . .	16
2.9	Empat graf berarah <i>non-diregular</i> yang <i>non-isomorphic</i> $G \in \mathcal{G}(3, 2, 2)$ . . . . .	19
2.10	Graf berarah <i>diregular</i> $G \in \mathcal{G}(3, 2, 2)$ . . . . .	20
2.11	Ilustrasi Lemma 2.8 . . . . .	23
3.1	Prosedur penelitian permasalahan pertama . . . . .	26
3.2	Prosedur penelitian permasalahan kedua . . . . .	26
3.3	Prosedur penelitian permasalahan ketiga . . . . .	27
4.1	Graf berarah Kautz $G_1 \in \mathcal{G}(3, 2, 1)$ dan graf berarah $G_2 \in \mathcal{G}(3, 2, 2)$ yang dihasilkan melalui penerapan teknik konstruksi penghapusan titik pada graf berarah $G_1$ . . . . .	30
4.2	Graf berarah Kautz versi aljabar $G \in \mathcal{G}(3, 3, 4)$ . . . . .	32
4.3	Ilustrasi Lemma 4.1 . . . . .	34
4.4	Ilustrasi Lemma 4.2 . . . . .	35
4.5	Ilustrasi Lemma 4.5 . . . . .	36
4.6	Ilustrasi Lemma 4.6 . . . . .	37
4.7	Ilustrasi Lemma 4.7 . . . . .	38
4.8	Ilustrasi Lemma 4.8 . . . . .	40
4.9	Ilustrasi Lemma 4.12 . . . . .	41
4.10	Ilustrasi Lemma 4.13 . . . . .	42

4.11 Ilustrasi Lemma 4.14 . . . . . 45  
4.12 Ilustrasi kasus 1 pada Teorema 4.1 . . . . . 45  
4.13 Ilustrasi kasus 2.a pada Teorema 4.1 . . . . . 46  
4.14 Ilustrasi kasus 2.b pada Teorema 4.1 . . . . . 47  
4.15 Ilustrasi Teorema 4.2 . . . . . 50



## DAFTAR TABEL

1.1	Rangkuman batas atas dari ordo graf berarah . . . . .	4
4.1	Rangkuman hasil penelitian keteraturan graf berarah . . . . .	29



## DAFTAR LAMBANG

$G$	graf atau graf berarah
$C_{k+1}$	graf berarah <i>cycle</i> dengan diameter $k$ dan ordo $k + 1$
$K_{d+1}$	graf berarah <i>complete</i> dengan derajat keluar $d$ dan ordo $d + 1$
$V(G)$	himpunan titik dari graf berarah $G$
$A(G)$	himpunan sisi berarah dari graf berarah $G$
$d$	derajat keluar dari graf berarah
$k$	diameter atau jarak terjauh di antara sebarang dua titik pada graf berarah
$u$	titik pada graf berarah
$uv$	sisi berarah yang dimulai dari $u$ dan berakhir pada $v$
$N^+(u)$	himpunan semua tetangga keluar ( <i>out-neighbourhood</i> ) dari $u$
$d^+(u)$	jumlah semua tetangga keluar ( <i>out-degree</i> ) dari $u$
$N_s^+(u)$	himpunan titik yang berjarak tepat $s$ dari $u$
$T_s^+(u)$	himpunan titik (termasuk $u$ ) yang berjarak kurang dari atau sama dengan $s$ dari $u$
$N^-(u)$	himpunan semua tetangga masuk ( <i>in-neighbourhood</i> ) dari $u$
$d^-(u)$	jumlah semua tetangga masuk ( <i>in-degree</i> ) dari $u$
$N_s^-(u)$	himpunan titik yang mencapai $u$ dengan jarak tepat $s$
$T_s^-(u)$	himpunan titik (termasuk $u$ ) yang mencapai $u$ dengan jarak kurang dari atau sama dengan $s$
$M_{d,k}$	batas atas bagi ordo graf berarah yang besarnya $1 + d + d^2 + \dots + d^k$ dan disebut batas Moore
$\mathcal{G}(d, k, \delta)$	himpunan graf berarah dengan derajat keluar $d$ , diameter $k$ , dan ordo $\delta$ titik kurangnya dari batas Moore
$S$	himpunan titik dengan ukuran derajat masuk ( <i>in-degree</i> ) yang lebih kecil dari ukuran derajat keluar yang disepakati
$S'$	himpunan titik dengan ukuran derajat masuk ( <i>in-degree</i> ) yang lebih besar dari ukuran derajat keluar yang disepakati
$A \setminus B$	himpunan $A$ yang tidak beranggotakan elemen dari himpunan $B$



$\mathbb{N}$  himpunan bilangan asli

$\oplus$  operasi pada dua himpunan  $A$  dan  $B$  dengan aturan jika  $u$  muncul  $n_1$  kali pada  $A$  dan  $n_2$  kali pada  $B$ , maka  $u$  akan muncul  $n_1 + n_2$  kali pada  $A \oplus B$

$\vee$  disjungsi inklusif pada pernyataan majemuk yang bernilai salah jika hanya jika dua pernyataan mempunyai nilai kebenaran yang salah

$\nabla$  disjungsi eksklusif pada pernyataan majemuk yang bernilai benar jika hanya jika dua pernyataan mempunyai nilai kebenaran yang berlainan

$\wedge$  konjungsi pada pernyataan majemuk yang bernilai benar jika hanya jika dua pernyataan bernilai benar

$\neg$  negasi dari suatu pernyataan.

