



**PENERAPAN MATRIKS *LAPLACIAN* UNTUK MENENTUKAN
BANYAKNYA POHON RENTANG PADA GRAF KINCIR,
GRAF BUKU DAN GRAF MATAHARI**

SKRIPSI

Oleh
Wahyu Yakin Subroto
NIM 071810101110

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2012



**PENERAPAN MATRIKS *LAPLACIAN* UNTUK MENENTUKAN
BANYAKNYA POHON RENTANG PADA GRAF KINCIR,
GRAF BUKU DAN GRAF MATAHARI**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh
Wahyu Yakin Subroto
NIM 071810101110

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2012

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Ibunda Nasihani dan Ayahanda Astamin yang tercinta, yang selalu memberikan do'a dan semangat yang tiada terkira hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini;
2. adik-adik yang tersayang, Makmur Wahana Sudrajat (Alm), Sri Astuti, Reni Puspita Ayu, David Saputra, dan Niken Wahyu Handayani yang selalu memberikan support, semangat, dan keceriaan dalam hidupku;
3. guru-guruku sejak taman kanak-kanak sampai dengan perguruan tinggi;
4. Almamater Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTO

“Orang-orang yang berhenti belajar akan menjadi pemilik masa lalu. Orang-orang yang masih terus belajar, akan menjadi pemilik masa depan. *)

*) Teguh, M. 2006. *Becoming A Star*. Jakarta: PT. Syaamil Cipta Media.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

nama : Wahyu Yakin Subroto

NIM : 071810101110

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul “Penerapan Matriks *Laplacian* untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Kincir, Graf Buku dan Graf Matahari” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 2012

Yang menyatakan,

Wahyu Yakin Subroto
NIM 071810101110

SKRIPSI

**PENERAPAN MATRIKS *LAPLACIAN* UNTUK MENENTUKAN
BANYAKNYA POHON RENTANG PADA GRAF KINCIR,
GRAF BUKU DAN GRAF MATAHARI**

Oleh

Wahyu Yakin Subroto
071810101110

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Kiswara Agung Santoso, M.Kom.

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul “Penerapan Matriks *Laplacian* untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Kincir, Graf Buku dan Graf Matahari” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji:

Ketua,

Sekretaris,

Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.
NIP 197408132000032004

Kiswara Agung Santoso, M.Kom
NIP 197209071998031003

Penguji I,

Penguji II,

Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si.
NIP 196908281998021001

Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., MSi.
NIP 19740719 2000121001

Mengesahkan

Dekan,

Prof. Drs. Kusno, DEA, Ph.D.
NIP 196101081986021001

RINGKASAN

Penerapan Matriks *Laplacian* untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Kincir, Graf Buku dan Graf Matahari; Wahyu Yakin Subroto, 071810101110; 2012: 38 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Graf berlabel pada titik adalah graf yang setiap titiknya diberi label. Untuk menentukan banyaknya unsur graf berlabel dapat dilakukan dengan membedakan mana graf yang tidak identik. Sehingga jumlah graf berlabel lebih banyak daripada jumlah graf yang tidak berlabel. Sebuah pohon yang terbentuk dari graf sederhana yang terhubung, dimana memuat semua titik pada graf tersebut dinamakan pohon rentang. Pohon rentang dari sebuah graf tidaklah tunggal. Dengan kata lain sebuah graf dapat mempunyai satu atau lebih pohon rentang. Untuk menentukan pohon rentang digunakan graf berlabel. Sedangkan untuk menentukan banyaknya pohon rentang pada graf kincir $K_n^{(m)}$, graf buku B_n dan graf matahari S_n menggunakan matriks *laplacian*. Dimana matriks *laplacian* didapat dari pengurangan matriks derajat dengan matriks *adjacent*. Tujuan penelitian adalah mengetahui cara mencari rumus umum untuk menentukan banyaknya pohon rentang pada graf kincir $K_n^{(m)}$, graf buku B_n dan graf matahari S_n dengan menggunakan matriks *laplacian*.

Penelitian dilakukan dalam beberapa langkah. Langkah pertama adalah menentukan matriks *laplacian* dari graf kincir $K_n^{(m)}$, graf buku B_n dan graf matahari S_n dengan. Langkah kedua adalah menghapus baris pertama dan kolom pertama pada matriks *laplacian*. Langkah ketiga adalah menghitung determinan dari matriks yang telah dihapus baris pertama dan kolom pertama.

Berdasarkan kajian yang telah dilakukan, didapatkan hasil bahwa dengan menghapus salah satu sisi pembuat siklus pada graf matahari maka akan didapatkan pohon rentang dari graf tersebut. Sedangkan dari perhitungan matriks *laplacian* didapatkan rumus umum untuk banyaknya pohon rentang pada graf kincir $K_n^{(m)}$ adalah n^{nm-2m} . Untuk banyaknya pohon rentang pada graf buku B_n didapat rumus umumnya adalah $(3^{n-1})(n+3)$. Sedangkan rumus umum untuk banyaknya pohon rentang pada graf matahari S_n adalah n .

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Penerapan Matriks *Laplacian* untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Kincir, Graf Buku dan Graf Matahari”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si., dan Kiswara Agung Santoso, M.Kom., selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si., dan Dr. Alfian Futuhul Hadi, S.Si., MSi., selaku dosen penguji yang telah memberi masukan dalam skripsi ini;
3. ibu dan bapak serta keluarga di rumah yang telah memberikan doa;
4. teman-teman angkatan 2007, Riski, Silvi, Wasil, Yasin, Sinta, Khorirotus, Wiji, Hamid dan Risha serta teman-teman yang lainnya, terima kasih atas kebersamaan selama waktu kuliah dan telah memberikan semangat dan motivasi;
5. semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, September 2012

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PEMBIMBINGAN	v
HALAMAN PENGESAHAN	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	3
1.4 Manfaat	3
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Definisi Graf	4
2.2 Operasi Hasil Kali Kartesius Dua Graf	7
2.3 Penyajian Graf dalam Bentuk Matriks	8
2.3.1 Matriks <i>Adjacent</i>	8
2.3.2 Matriks Derajat	8
2.3.3 Matriks <i>Incident</i>	9
2.4 Determinan Matriks	9
2.4.1 Mereduksi Baris	9
2.4.2 Ekspansi Kofaktor.....	10

2.5	Matriks Elementer	11
2.6	Rank dan Kernel	13
2.7	Kelas-kelas Graf	14
2.8	Pohon Rentang	16
2.9	Matriks <i>Laplacian</i>	17
BAB 3. METODE PENELITIAN		22
BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN		24
4.1	Hasil.....	24
4.1.1	Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Kincir	24
4.1.2	Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Buku B_n	31
4.1.3	Banyaknya Pohon Rentang pada Graf Matahari S_n	33
4.1.4	Menampilkan Pohon Rentang Graf Matahari S_n	34
4.2	Pembahasan	35
BAB 5. KESIMPULAN		37
DAFTAR PUSTAKA		38
LAMPIRAN		39

DAFTAR TABEL

	Halaman
4.1 Hasil determinan dari $m=2$ dan $n=4,5,6$	24
4.2 Hasil determinan dari $m=3$ dan $n=4,5,6$	26
4.3 Hasil determinan dari $m=4$ dan $n=4,5,6$	27
4.4 Hasil determinan untuk $n=2,3,4$, dan 5	31
4.5 Hasil determinan untuk $n=3,4,5,6$ dan 7	33

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Graf G dengan 4 titik dan 5 sisi	4
2.2 Ilustrasi graf dengan <i>loop</i> dan sisi rangkap.....	4
2.3 Graf yang memuat <i>walk</i> , <i>trail</i> , lintasan, dan sikel	5
2.4 Graf identik dan graf <i>isomorphic</i>	6
2.5 (a) Graf terhubung dan (b) Graf tak terhubung.....	7
2.6 Hasil Perkalian Kartesius dua graf	7
2.7 Graf lintasan P_6	14
2.8 (a) Graf sikel C_6 dan (b) Graf sikel C_8	14
2.9 (a) Graf lengkap K_5 dan (b) Graf kincir $K_4^{(3)}$	15
2.10 (a) Graf buku B_3 dan (b) Graf matahari S_4	16
2.11 Graf pohon T_6	16
2.12 Pohon rentang pada G dengan 4 titik dan 5 sisi	17
4.1 Menentukan graf matahari dan <i>spaning tree</i> yang akan ditampilkan	34
4.2 Hasil output program	34
4.3 Graf matahari S_4	35
4.4 Bentuk pohon rentang dari graf matahari S_4	35