BILANGAN KROMATIK GRACEFUL PADA KELUARGA GRAF BINTANG SEBAGAI *E*-MONOGRAF

SKRIPSI

Oleh

Risma Asmiatul Cholifah
190210101076

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JEMBER
2024

BILANGAN KROMATIK GRACEFUL PADA KELUARGA GRAF BINTANG SEBAGAI *E*-MONOGRAF

SKRIPSI

Oleh

Risma Asmiatul Cholifah
190210101076

Dosen Pembimbing 1 : Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd.
Dosen Pembimbing 2 : Lioni Anka Monalisa, S.Pd., M.Pd.
Dosen Penguji 1 : Susi Setiawani, S.Si., M.Sc.
Dosen Penguji 2 : Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS JEMBER
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
JEMBER
2024

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang. Sholawat serta salam selalu tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, atas kebesaran itu kupersembahkan sebagai rasa hormat dan bahagia dalam perjalanan dan perjuangan hidupku teriring rasa terima kasihku kepada:

1. Kedua orang tua saya, Bapak Yarsono dan Ibu Siti Mudawamah, adik saya Fika Amalya Naysila dan Alderio Ilham Qodzafi serta keluarga besar saya yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, kepercayaan, dan senyuman yang selalu menguatkan disetiap perjalanan hidup saya;
2. Ibu Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd. dan Ibu Lioni Anka Monalisa, S.Pd., M.Pd. Selaku dosen pembimbing skripsi yang telah meluangkan waktu dan dengan sabar memberikan ilmu, arahan, dan bimbingan hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini;
3. Ibu Susi Setiawani, S.Si., M.Sc. dan ibu Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si. Selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
4. Bapak Ridho Alfarisi, S.Pd., M.Si. yang telah bersedia menjadi validator skripsi ini;
5. Seluruh dosen Pendidikan Matematika dan seluruh Guru beserta almamater sekolah yang telah memberikan banyak ilmu hingga saat ini;
6. Ilmiatun Nuroeni, Nurita Kusumawati, dan teman-teman seperjuangan yang selalu memberikan dukungan dan motivasi, serta sahabat saya yang selalu menemani dan memberikan kebahagiaan;
7. Almamater tercinta Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

MOTO

"Ilmu tidak akan memberimu manfaatnya, kecuali jika kamu berikan semua yang kamu miliki."

(Ahmad Abu Bakar bin Ali)

PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya yang bertanda tangan dibawah ini

Nama :Risma Asmiatul Cholifah

NIM :190210101076

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: *Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Bintang sebagai E-Monograf* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum pernah diajukan pada institusi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan skripsi ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata dikemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 28 Desember 2023

Yang menyatakan,

Risma Asmiatul Cholifah

NIM 190210101076

HALAMAN PERSETUJUAN

Skripsi berjudul *Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Bintang sebagai E-Monograf* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember pada:

Hari :

Tanggal :

Tempat : Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Pembimbing Tanda Tangan

1. Pembimbing Utama

   Nama :Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd. (.........................)

   NIP :197605022006042001

2. Pembimbing Anggota

   Nama :Lioni Anka Monalisa, S.Pd., M.Pd. (.........................)

   NIP :760014637

Penguji

1. Penguji Utama

   Nama :Susi Setiawani, S.Si., M.Sc. (.........................)

   NIP :197003071995122001

2. Penguji Anggota

   Nama :Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si. (.........................)

   NIP : 199220731201903201

ABSTRACT

A proper coloring $c: V(G) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, k\}$, $k \geq 2$ of graph G is called a graceful k-coloring if the induced edge coloring $c': V(G) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, k-1\}$defined by $c'(uv) = |c(u) - c(v)|$ for each edge uv of G is also proper. The minimum integer k for wich G has a graceful k-coloring is the graceful chromatic number $\chi_g(G)$. This study uses exploratory research types with axiomatic deductive methods and pattern detection methods. There are four new theorems produced in this study. The graceful chromatic number for a few variants of star graphs are investigated in this study. There are four new theorems produced in this study. Graceful chromatic number on broom graph $(B_{n,m})$ for $n \geq 3$ is $\chi_g(B_{n,m}) = n + 2$. Graceful chromatic number on centipede graph $(S_{3,n}P_m)$ for untuk n $\geq$ 3,$m \geq 5$ is $\chi_g(S_{3,n}P_m) = n + 2$. Graceful chromatic number on M-Star graph (MS_n) for $n \geq 3$ is $\chi_g(MS_n) = n + 2$. Graceful chromatic number on H-Star graph Bintang $\chi_g(HS_n) = 6$ for $n = 3$ and $\chi_g(HS_n) = n + 2$ for $n \geq 4$. Addition to these four theorems, this study produced E-monograph based learning media that can be accessed online.

RINGKASAN

Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Bintang sebagai *E*-Monograf; Risma Asmiatul Cholifah, 190210101076; 2023; 39 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Salah satu topik pada pewarnaan graf yang dijadikan sebagai kajian pada penelitian ini adalah topik pewarnaan graceful. Pewarnaan graf dibagi menjadi tiga, yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah. Pewarnaan simpul yaitu pemberian warna pada simpul graf dengan syarat simpul yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Pewarnaan sisi yaitu pemberian warna pada sisi graf dengan syarat sisi yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Pewarnaan wilayah adalah pemberian warna pada bagian atau wilayah pada graf dengan syarat wilayah atau bagian yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Salah satu contoh pewarnaan simpul yaitu pewarnaan graceful, yang merupakan topik yang dibahas pada penelitian ini.

Pewarnaan k-graceful pada graf G tak kosong adalah pewarnaan titik proper $c: V(G) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, k\}$ dimana $k \geq 2$ yang menginduksi pada pewarnaan sisi proper $c': V(G) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, (k-1)\}$ dan didefinisikan dengan $c'(uv) = |c(u) - c(v)|$. Banyaknya jumlah warna minimum pewarnaan graceful pada graf disebut bilangan kromatik. Penelitian ini fokus mencari bilangan kromatik graceful pada keluarga graf bintang, meliputi graf sapu, graf kelabang, graf M-Bintang, dan graf H-Bintang.

Penelitian ini termasuk kedalam jenis penelitian eksploratif, karena penelitian bertujuan untuk menemukan hal baru dan memberikan gambaran dasar mengenai topik ini agar lebih tergeneralisasi. Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode duduktif aksiomatik dan pendeteksian pola dalam menentukan nilai dari bilangan kromatik graceful pada keluarga graf bintang.

Dari hasil penelitian diperoleh empat teorema diantaranya sebagai berikut.

1. **Teorema 1.** Bilangan kromatik graceful pada graf sapu $B_{n,m}$ untuk $n \geq 3$ adalah $\chi_g(B_{n,m}) = n + 2$

2. **Teorema 2.** Bilangan kromatik graceful pada graf kelabang $S_{3,n}P_m$ untuk n $\geq 3, m \geq 5$ adalah $\chi_g\left(S_{3,n}P_m\right) = n + 2$
3. **Teorema 3.** Bilangan kromatik graceful pada graf M-Bintang MS_n untuk n ≥ 3 adalah $\chi_g(MS_n) = n + 2$
4. **Teorem 4.** Bilangan kromatik graceful pada graf H-Bintang ($HS_{\ n}$) untuk n ≥ 3 adalah $\chi_g(HS_n) = \begin{cases} 6, untuk\ n = 3 \\ n + 2, untuk\ n \geq 4 \end{cases}$

Selain empat teorema baru yang diperoleh, dilakukan desiminasi mengenai pewarnaan graceful. Desiminasi ini dilakukan dengan membuat media pembelajaran berbentuk *E*-Monograf. Media pembelajaran berbentuk *E*-Monograf ini dapat dengan mudah diakses oleh masyarakat umum karena berbasis online.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga dapat terselesaikan skripsi yang berjudul "Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Bintang sebagai *E*-Monograf". skripsi ini diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana pada Pendidikan pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuandan bimbingan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ibu Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd. dan Ibu Lioni Anka Monalisa, S.Pd., M.Pd. selaku dosen pembimbing skripsi yang telah meluangkan waktu dan dengan sabar memberikan ilmu, arahan, dan bimbingan hingga terselesaikannya penulisan skripsi ini;
4. Ibu Susi Setiawani, S.Si., M.Sc. dan ibu Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
5. Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing dan memberikan ilmu;
6. Dosen dan karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan;
7. Teman seperjuangan mahasiswa Program studi Pendidikan Matematika Angkatan 2019 dan teman teman ASJAR Bondowoso;
8. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini;

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR NOTASI

$\lvert V(G)\rvert$	= Banyaknya simpul pada graf G (*order*)
$\lvert E(G)\rvert$	= Banyaknya sisi pada graf G (*size*)
$c'(uv)$	= Pewarnaan sisi proper
$\chi_g(G)$	= Bilangan kromatik graceful
k	= Banyaknya warna pada pewarnaan graf G
S_n	= Graf Bintang dengan $n + 1$ simpul
$S_{n,m}$	= Graf Bintang ganda dengan $n + m + 2$ simpul
$B_{n,m}$	= Graf Sapu dengan $n + m$ simpul
$S_{3,n}P_m$	= Graf Kelabang dengan $3n + m$ simpul
MS_n	= Graf M-Bintang dengan $2n + 5$ simpul
HS_n	= Graf H-Bintang dengan $4n + 7$ simpul

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang merupakan akar dari beberapa ilmu pengetahuan lain. Banyak ilmu pengetahuan yang berakar dari imu matematika. Peran ilmu matematika dalam kehidupan sehari-hari juga tak kalah penting seiring dengan perkembangan zaman. Beberapa teori dan konsep matematika marak dikembangkan untuk memenuhi kebutuhan teknologi manusia yang semakin kompleks. Salah satu cabang ilmu matematika yang memiliki banyak manfaat ialah teori graf.

Teori graf yang ditemukan pertama kali digunakan untuk menyelesaikan permasalahan Konigsberg pada tahun 1736 (Afriantini et al., 2019). Seiring berkembangnya zaman, teori graf mengalami perkembangan yang begitu pesat. Penerapan teori graf pada berbagai bidang, mulai dari kimia, ekologi, genetika, olahraga, transportasi, pemetaan, jaringan komputer dan sebagainya. Salah satu pembahasan dalam teori graf adalah pewarnaan graf.

Pewarnaan graf merupakan salah satu cara pelabelan pada graf dengan memberikan warna pada simpul, sisi, atau wilayah yang bertetangga. Suatu graf G dikatakan terwarnai bila setiap simpulnya diasosiasikan dengan suatu warna. Pewarnaan tersebut dikatakan teratur (*properly colored*) bila tidak ada dua simpul yang *adjacent* mendapatkan warna yang sama (Rahadi, 2019). Dengan kata lain setiap dua simpul yang *adjacent* haruslah diberi warna yang berbeda. Adapun dalam pembagiannya, pewarnaan graf terbagi dalam tiga jenis, diantaranya pewarnaan simpul (*vertex coloring*), pewarnaan sisi (*edge coloring*), dan pewarnaan daerah (*region coloring*).

Topik pewarnaan graf terdapat banyak macamnya, akan tetapi topik yang dipilih dalam penelitian ini adalah pewarnaan graceful. Alasan memilih pewarnaan graceful dikarenakan minim penelitian yang menggunakan topik pewarnaan graceful, selain itu pewarnaan graceful juga termasuk salah satu topik pewarnaan graf yang masih baru. Pewarnaan graceful pertama kali dikenal pada tahun 2015. Beberapa penelitian pewarnaan graceful telah dilakukan yaitu, Zhang (2016) mendefinisikan pewarnaan graceful pada graf dan memperoleh bilangan kromatik graceful dari beberapa graf.

Pewarnaan graf banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah pada kejadian nyata. Pada teori pewarnaan graf, jumlah minimum yang digunakan untuk mewarnai titik suatu graf disebut bilangan kromatik yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Pada pewarnaan sisi, warna minimum yang digunakan untuk mewarnai sisi suatu graf disebut indeks kromatik yang dinotasikan dengan $\chi'(G)$.

Penelitian ini mengkaji bilangan kromatik pada keluarga graf bintang. Graf bintang digunakan sebagai bahan penelitian dikarenakan proses generalisasi, sehingga dengan penelitian ini maka pewarnaan graceful menjadi lebih umum dan luas. Penelitian akan menghasilkan teorema mengenai bilangan kromatik graceful pada keluarga graf bintang, sehingga topik pewarnaan graceful tergeneralisasi dan dapat memberikan gambaran untuk mengembangkan pada topik ini. Setelah mendapatkan teorema, selanjutnya membuktikan kebenaran teorema yang telah ditemukan menggunakan batas atas dan batas bawah. Selain menciptakan teorema baru, pada penelitian ini juga menyusun artikel bilangan graceful pada keluarga graf bintang yang kemudian dijadikan sebagai media pembelajaran berbasis E-monograf. E-Monograf yaitu bentuk singkat laporan hasil penelitian pada bidang atau subjek tertentu. Pada penelitian ini peneliti memberikan judul **"Bilangan Kromatik Graceful pada Keluarga Graf Bintang sebagai *E*-Monograf".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian yang telah disampaikan diatas, rumusan masalah yang diambil pada penelitian ini adalah berapa bilangan kromatik graceful pada graf sapu $B_{n,m}$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$, graf kelabang $S_{3,n}P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 5$, graf M-Bintang MS_n untuk $n \geq 3$, dan graf H-Bintang HS_n untuk $n \geq 3$?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang diambil, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menemukan bilangan kromatik graceful pada graf sapu $B_{n,m}$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$, graf kelabang $S_{3,n}P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 5$, graf M-Bintang MS_n untuk $n \geq 3$, dan graf H-Bintang HS_n untuk $n \geq 3$.

1.4 Manfaat Penelitian

Beberapa manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian pengembangan bilangan kromatik graceful ini pada teori graf adalah :

a. untuk meningkatkan pengetahuan dan wawasan baru dalam pengembangan bilangan kromatik graceful pada teori graf.
b. konsep pewarnaan graceful yang diambil dalam penelitian ini dapat diterapkan pada graf lain.
c. hasil penelitian dapat digunakan untuk landasan kajian dalam mengembangkan ilmu dan pengetahuan yang berkaitan dengan pewarnaan graceful dan graf yang telah diambil, yaitu pada keluarga graf bintang.

1.5 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan, maka bilangan kromatik graceful diambil adalah keluarga graf bintang yaitu: graf sapu $B_{n,m}$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$, graf kelabang $S_{3,n}P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 5$, graf M-Bintang MS_n untuk $n \geq 3$, dan graf H-Bintang HS_n untuk $n \geq 3$.

1.6 Kebaruan Penelitian

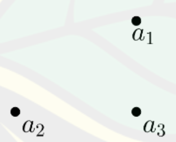
Kebaruan penelitian ini adalah pengembangan topik pada bilangan kromatik graceful. Penelitian ini hanya dibatasi pada graf sapu $B_{n,m}$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$, graf kelabang $S_{3,n}P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 5$, graf M-Bintang MS_n untuk $n \geq 3$, dan graf H-Bintang HS_n untuk $n \geq 3$.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

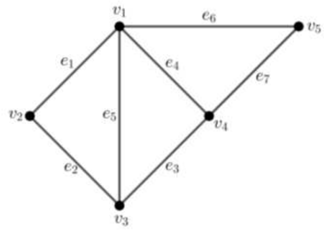
Graf dalam cabang ilmu matematika digunakan untuk menyajikan objek-objek diskrit dan hubungan antar diskrit tersebut. Secara geometris graf juga digambarkan dengan menyatakan objek sebagai noktah, bulatan atau titik yang disebut dengan simpul, sedangkan hubungan antar objek dinyatakan dengan sisi.

Graf G adalah pasangan dari himpunan (V, E) dimana V tidak kosong dan E (himpunan boleh kosong) dari pasangan tak terurut dari dua elemen yang berbeda dari V(Rudi dkk., 2023). Elemen dari V disebut simpul (*vertex*) pada graf G dan elemen dari E disebut sisi (*edge*) pada graf G. Graf G dinotasikan sebagai berikut: $G = (V, E)$ atau $G = \{V(G), E(G)\}$ dengan $V = V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots v_n\}$ dan $E = E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots e_n\}$. V merupakan himpunan dari simpul yang tidak kosong, sedangkan E merupakan himpunan sisi yang boleh kosong. Dari definisi graf, dapat diartikan bahwa graf harus memiliki simpul, namun memiliki kemungkinan untuk tidak memiliki sisi. Banyaknya simpul pada graf disebut *order* yang dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan banyaknya sisi pada graf disebut *size* yang dinotasikan dengan $|E(G)|$. Graf yang hanya memiliki titik namun tidak memiliki sisi disebut graf kosong. Adapun contoh graf pada Gambar 2.1 dan Gambar 2.2.



Gambar 2.1 Graf Kosong

Gambar 2.1, gambar graf tersebut disebut graf kosong, karena memiliki himpunan simpul, namun tidak memiliki sisi. Diketahui himpunan simpul $V = \{a_1, a_2, a_3\}$ dan himpunan simpul pada graf tersebut merupakan himpunan kosong $E = \{\ \}$.



Gambar 2.2 Graf G

Pada Gambar 2.2 graf G memiliki simpul maupun sisi dengan jumlah simpul (*order*) $|V(G)| = 5$ dan jumlah sisi (*size*) $|E(G)| = 7$ dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$.

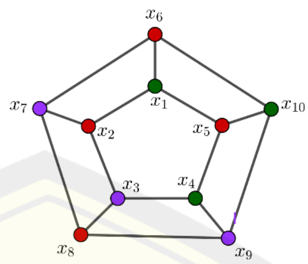
Dua simpul pada graf dikatakan bertetangga (*adjacent*) apabila kedua simpul dihubungkan oleh jalur yang disebut sisi. Jika simpul v_i bertetangga dengan simpul v_j maka $(v_i v_j)$ merupakan sisi pada suatu graf tak berarah G. Sisi $(v_i v_j)$ juga dikatakan bersisian dengan simpul v_i dan simpul v_j karena sisi $(v_i v_j)$ menghubungkan simpul v_i dan simpul v_j. Derajat titik adalah banyaknya titik pada graf G yang bertetangga dengan V dan dinotasikan dengan $d(v)$. Himpunan titik pada graf G yang bertetangga dengan V disebut persekitaran, dinotasikan dengan $N(v)$.

2.2 Pewarnaan graf

Pewarnaan graf G adalah pemetaan warna pada simpul, sisi, atau wilayah pada graf sedemikian sehingga setiap simpul, sisi atau wilayah pada graf yang bertetangga memiliki warna yang berbeda (Afriantini et al., 2019). Jumlah warna minimum pada pewarnaan simpul dan pewarnaan wilayah pada graf G disebut bilangan kromatik. Sedangkan jumlah minimum pewarnaan sisi pada graf G disebut indeks kromatik. Pewarnaan pada graf terbagi mejadi 3 yaitu :

a. Pewarnaan Simpul

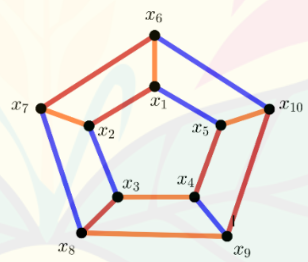
Pewarnaan simpul pada graf G adalah pemberian warna pada himpunan simpul $V(G)$ dengan aturan setiap simpul diberi satu warna dan dua simpul yang bertetangga diberi warna yang berbeda (Rudi et al., 2023). Contoh pewarnaan simpul dengan $\chi(G) = 3$ dapat dilihat pada Gambar 2.3



Gambar 2.3 Pewarnaan Simpul

b. Pewarnaan Sisi

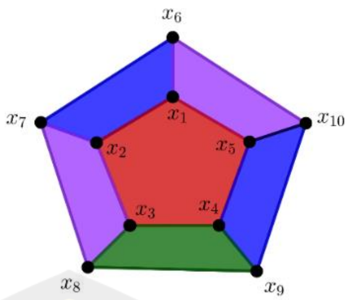
Pewarnaan sisi pada graf G adalah pemberian warna pada himpunan sisi $E(G)$ dengan setiap sisi hanya memiliki satu warna dan sisi yang bertumpuan pada satu simpul yang sama memiliki warna yang berbeda (Daswa & Riyadi, 2017). Contoh pewarnaan sisi dengan $\chi'(G) = 3$ dapat dilihat pada Gambar 2.4



Gambar 2.4 Pewarnaan Sisi

c. Pewarnaan Wilayah

Pewarnaan wilayah pada graf G adalah pemberian warna pada wilayah graf G dengan syarat wilayah yang bertetangga tidak boleh memiliki warna yang sama (Afriantini et al., 2019). Contoh pewarnaan wilayah dengan $\chi(G) = 4$ dapat dilihat pada Gambar 2.5



Gambar 2.5 Pewarnaan Wilayah

2.3 Pewarnaan graceful

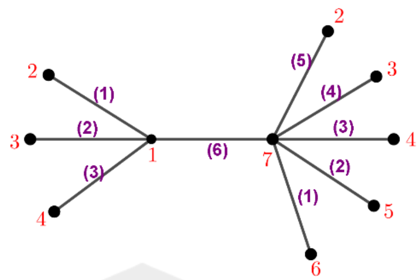
Pewarnaan graceful merupakan salah satu teori pada pewarnaan graf, pewarnaan graceful tergolong dalam pewarnaan simpul pada graf. Beberapa definisi dan lemma pada pewarnaan graceful sebagai berikut

Definisi 2.3.1. Pewarnaan k-graceful pada graf G tak kosong adalah pewarnaan titik proper $c: V(G) \to \{1,2,3, \dots, k\}$ dimana $k \geq 2$ yang menginduksi pada pewarnaan sisi proper $c': V(G) \to \{1,2,3, \dots, (k-1)\}$ dan didefinisikan dengan $c'(uv) = |c(u) - c(v)|$ (Kristiana et al., 2023).

Definisi 2.3.2. Bilangan kromatik graceful yaitu jumlah minimum pewarnaan graceful pada graf G dan dinotasikan dengan $\chi_g(G)$ (Khoirunnisa et al., 2021).

Lemma 2.3.1. $\chi_g(G) \geq \Delta(G) + 1$ (Masruro et al., 2023).

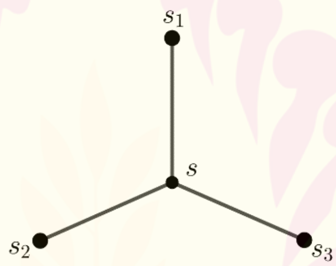
Dari definisi 2.3.1, diketahui bahwa pewarnaan sisi graceful pada graf G didapat dari jumlah selisih simpul graf G yang bertetangga, dan sisi yang bersisihan dengan kedua simpul dan dinotasikan dengan kurung pada graf. Warna simpul dan sisi yang digunakan pada pewarnaan graceful dinyatakan dengan bilangan asli yang boleh berulang, dengan syarat setiap simpul dan sisi yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Pewarnaan sisi pada pewarnaan graceful ditandai dengan tanda kurung. Berikut contoh pewarnaan graceful pada graf bintang ganda $S_{3,5}$ pada Gambar 2.6



Gambar 2.6 Pewarnaan Graceful

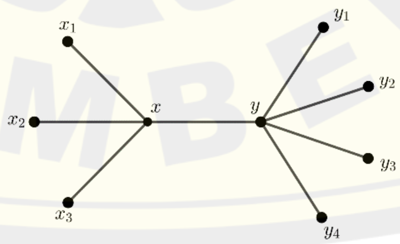
2.4 Keluarga graf bintang

Graf bintang S_n merupakan keluarga dari graf pohon. Graf bintang terbentuk dari satu simpul pusat yang memiliki beberapa n daun. Graf bintang S_n memiliki jumlah simpul $n + 1$ dan n sisi (Bangkit & Rahadjeng, 2022).



Gambar 2. 10 Graf Bintang S_3

Graf bintang ganda $S_{n,m}$ merupakan graf bintang yang memiliki dua simpul pusat x dan y, dengan banyak daun $n + m$ dimana n merupakan jumlah daun yang bertetangga dengan simpul x, serta m merupakan jumlah banyak daun yang bertetangga dengan simpul y (Bangkit & Rahadjeng, 2022).

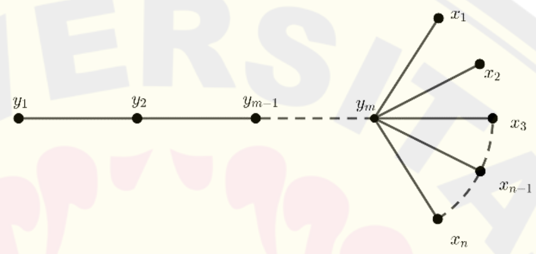


Gambar 2.11 Graf Bintang Ganda

Beberapa contoh dari keluarga graf bintang, graf sapu $B_{n,m}$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$, graf kelabang $S_{3,n}P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 5$, graf M-Bintang MS_n untuk $n \geq 3$, dan graf H-Bintang HS_n untuk $n \geq 3$. Berikut penjelasan dari masing masing keluarga graf bintang sebagai berikut :

a. Graf Sapu

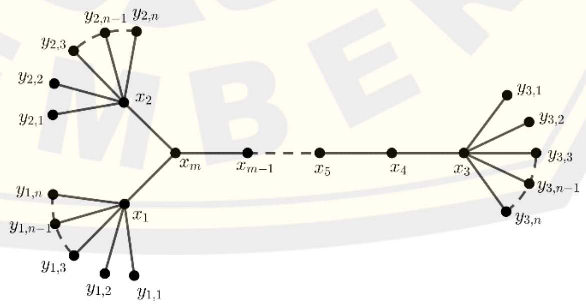
Graf sapu $B_{n,m}$ adalah graf khusus dari graf caterpillar dimana sejumlah m titik hanya dihubungkan pada satu titik ujung dari tulang belakang S_n (Bangkit & Rahadjeng, 2022).



Gambar 2.12 Graf Sapu

b. Graf Kelabang

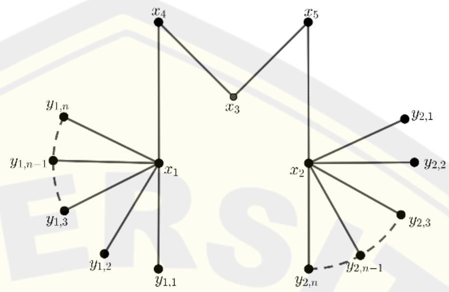
Graf kelabang $S_{3,n}P_m$ merupakan graf modifikasi dari graf ilalang yaitu graf yang terbentuk dari graf bintang S_n sejumlah r, kemudian diberikan simpul pusat c pada setiap graf bintang sebanyak r, dan sisi yang menghubungkan setiap simpul c kepada simpul pusat S_n. Graf kelabang terbentuk dari graf ilalang dengan mengekspand salah satu busurnya dengan memperpanjang salah satu sisi yang bersisihan dengan simpul pusat graf G (Amri & Harahap, 2017).



Gambar 2.13 Graf Kelabang

c. Graf M-Bintang

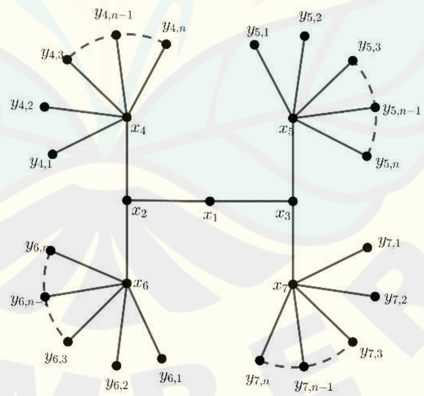
Berawal dari graf A-Bintang dan graf H-Bintang, yang kemudian terbentuk graf M-Bintang MS_n yaitu graf yang terbentuk dari perpaduan antara graf berbentuk huruf alfabet M dengan graf bintang S_n sebagai daun-daunnya.



Gambar 2.14 Graf M-Bintang

d. Graf H-Bintang

Graf H-Bintang HS_n adalah graf yang terbentuk dari graf bentuk alfabet H dan graf bintang, dengan simpul pada graf H yang berderajat satu merupakan pusat simpul graf bintang sebagai daun-daunnya (Amri & Harahap, 2017).



Gambar 2.15 Graf H-Bintang

2.5 E-Monograf

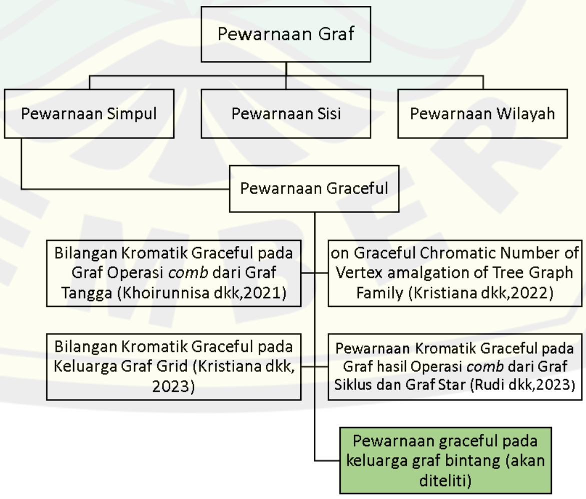
Kata monograf berasal dari bahasa yunani yaitu (*monograph*). Monograf berasal dari dua kata yaitu *mono* yang berarti tunggal dan *graph* yang artinya menulis. Bentuk singkat dari hasil laporan penelitian yang telah dilakukan seseorang pada bidang atau subjek tertentu disebut monograf (Fatmawati, 2020). Karakteristik monograf yang benar (Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat, 2021) yaitu:

a. Sumber pembuatan buku dari hasil penelitian
b. Isi buku disusun sesuai alur logika atau urutan kelimuan. Terdapat peta kelimuan
c. Gaya penyajian formal
d. Diterbitkan (disebarluaskan) dan berISBN
e. Substansi pembahasan hanya satu hal dalam bidang keilmuan
f. Proses pembelajaran terbimbing
g. Lingkup penggunaan untuk penelitian dan pengajaran
h. Dapat dibuat sitasi dan ditulis dalam daftar referensi karya ilmiah

Sedangkan E-monograf sendiri merupakan singkatan dari *electronic* monograf yang berisi tulisan pada suatu topik tertentu yang dikhususkan pada hasil penelitian satu subjek bidang tertentu dan dapat diakses secara digital. Pada penelitian ini E-monograf yang dibuat berisi penjelasan dan teorema baru bilangan kromatik graceful khususnya pada keluarga graf bintang.

2.6 Penelitian yang relevan

Disajikan peta konsep dari beberapa hasil penelitian yang telah dilakukan pada pewarnaan graceful dan dapat digunakan sebagai acuan penelitian.



Gambar 2.16 Penelitian Pewarnaan Graceful

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan jenis penelitian eksploratif dikarenakan jenis penelitian ini menggali informasi atau permasalahan yang masih baru dan belum pernah menjadi kajian pada peneliti sebelumnya. Penelitian eksploratif adalah penelitian yang dilakukan secara luas dan mendalam untuk menyelidiki, menganalisis, ataupun menemukan hal-hal baru yang dapat digunakan sebagai acuan pada kajian penelitian. Tujuan penelitian ini untuk memperkenalkan hal baru, serta memberikan penjelasan dasar dan pengembangan teori-teori yang dapat diperbarui dan dikembangkan oleh peneliti selanjutnya.

3.2 Metode Penelitian

Penelitan ini menggunakan dua metode penelitian yaitu, metode deduktif aksiomatik dan metode pendeteksian pola. Metode deduktif aksiomatik adalah metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma dan teorema-teorema yang telah ada dan diterapkan dalam pewarnaan graceful pada kelurga graf bintang. Metode pendeteksian pola adalah metode penelitian yang digunakan untuk mencari serta menemukan pola pewarnaan dan bilangan kromatik, sedemikian sehingga diperoleh bilangan kromatik graceful pada keluarga graf bintang.

3.3 Definisi Operasional

Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran sistematis dalam penelitian dan menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Beberapa definisi operasional dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut :

a. Pewarnaan Graceful

Pewarnaan k-graceful pada graf G tak kosong adalah pewarnaan titik proper $c: V(G) \rightarrow \{1,2,3,\dots,k\}$ dimana $k \geq 2$ yang menginduksi pada pewarnaan sisi proper $c': V(G) \rightarrow \{1,2,3,\dots,(k-1)\}$ dan didefinisikan dengan $c'(uv) = |c(u) - c(v)|$. Bilangan kromatik graceful yaitu jumlah minimum pewarnaan graceful pada graf G dan dinotasikan dengan $\chi_g(G)$.

Pewarnaan sisi graceful pada graf G didapat dari jumlah selisih simpul graf G yang bertetangga, dan sisi yang bersisihan dengan kedua simpul.

b. Keluarga Graf Bintang

Keluarga graf adalah graf yang dikelompokkan dengan karakteristik dan ciri yang sama (Akbar et al., 2022). Keluarga graf bintang yang diambil pada penelitian ini memiliki unsur penyusun utama yaitu graf bintang dengan penyusun pendukungnya yaitu graf lintasan.

c. *E*-Monograf

E-monograf sendiri merupakan singkatan dari *electronic* monograf yang berisi tulisan pada suatu topik tertentu yang dikhususkan pada hasil penelitian satu subjek bidang tertentu dan dapat diakses secara digital.

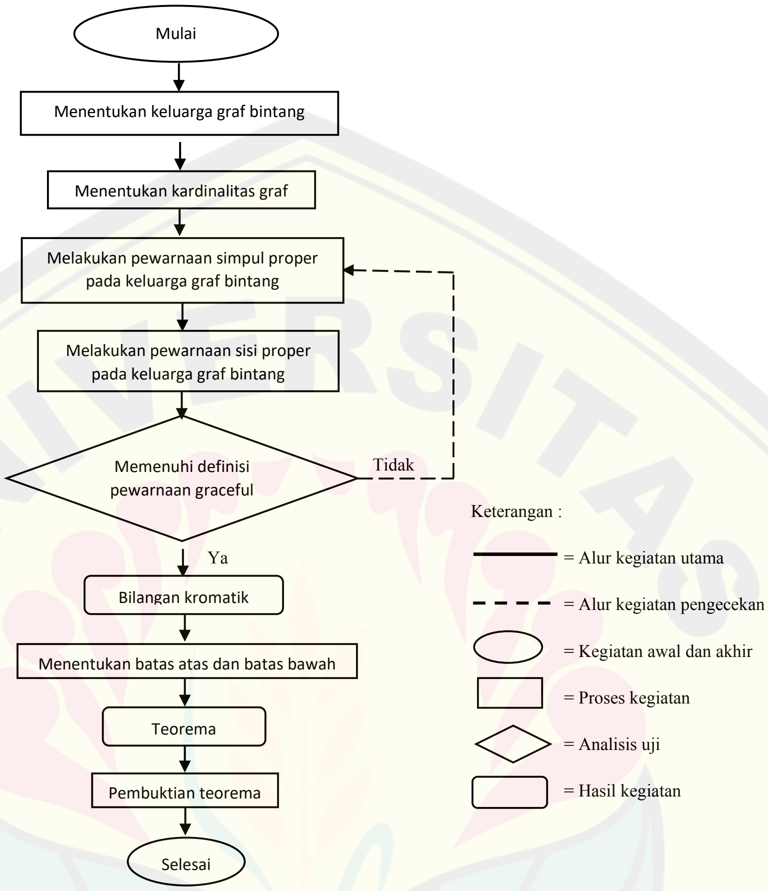
3.4 Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian yang digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis terhadap penelitian yang telah dilakukan sesuai dengan tujuan awal penelitian. Berikut merupakan prosedur penelitian yang akan digunakan yaitu :

a. Menentukan kardinalitas graf sapu;
b. Melakukan pewarnaan simpul proper pada setiap simpul graf sapu;
c. Melakukan pewarnaan sisi proper pada setiap sisi graf sapu sesuai dengan definisi dari pewarnaan graceful;
d. Mengecek pewarnaan yang telah dilakukan ,apakah sudah sesuai dengan definisi pewarnaan graceful, apabila tidak maka kembali ke tahap melakukan pewarnaan simpul proper pada graf, apabila sesuai lanjut ke langkah berikutnya ;
e. Menentukan bilangan kromatik graceful pada graf sapu;
f. Menentukan batas atas dan batas bawah pewarnaan graceful pada graf sapu
g. Menentukan teorema hasil pewarnaan graceful pada graf sapu;
h. Membuktikan teorema yang telah didapatkan pada graf sapu;

i. Mengulangi langkah (a) sampai langkah (h) untuk graf kelabang, graf M-Bintang, dan graf H-Bintang.

Secara umum, prosedur penelitian disajikan dalam Gambar 3.1



Gambar 3.1 Prosedur Penelitian

3.5 Observasi Awal Penelitian

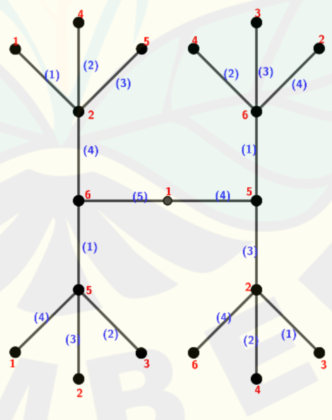
Observasi awal dilakukan dengan menentukan kardinalitas pada keluarga graf bintang yang disajikan pada Tabel 3.1 berikut :

Tabel 3.1 Kardinalitas Keluarga Graf Bintang

Graf	Kardinalitas
Graf sapu $(B_{n,m})$	• $V(B_{n,m}) = \{x\_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y\_j; 1 \leq j \leq m\}$ • $E(B_{n,m}) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, j = m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m\}$ • $\lvert V(B_{n,m}) \rvert = m + n$ • $\lvert E(B_{n,m}) \rvert = m + n - 1$

Graf	Kardinalitas
Graf kelabang $(S_{3,n}P_m)$	• $V(S_{3,n}P_m) = \{x_i; 1 \le i \le m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \le i \le 3, 1 \le j \le n\}$ • $E(S_{3,n}P_m) = \{x_i x_m; 1 \le i \le 2\} \cup \{x_i x_{i+1}; 3 \le i \le m-1\} \cup \{x_i y_{i,j}; 1 \le i \le 3, 1 \le j \le n\}$ • $\lvert V(S_{3,n}P_m)\rvert = 3m + n$ • $\lvert E(S_{3,n}P_m)\rvert = 3m + (n-1)$
Graf M-Bintang (MS_n)	• $V(MS_n) = \{x_i; 1 \le i \le 5\} \cup \{y_{i,j}; 1 \le i \le 2, 1 \le j \le n\}$ • $E(MS_n) = \{x_i x_{i+1}; i = 3\} \cup \{x_i x_{i+2}; i = 3\} \cup \{x_i x_{i+3}; 4 \le i \le 5\} \cup \{x_i y_{i,j}; 1 \le i \le 2; 1 \le j \le n\}$ • $\lvert V(MS_n)\rvert = 2n + 5$ • $\lvert E(MS_n)\rvert = 2n + 4$
Graf H-Bintang (HS_n)	• $V(HS_n) = \{x_i; 1 \le i \le 7\} \cup \{y_{i,j}; 4 \le i \le 7, 1 \le j \le n\}$ • $E(HS_n) = \{x_i x_{i+1}; i = 1\} \cup \{x_i x_{i+2}; 1 \le i \le 3\} \cup \{x_i x_{i+4}; 2 \le i \le 3\} \cup \{x_i y_{i,j}; 4 \le i \le 7, 1 \le j \le n\}$ • $\lvert V(HS_n)\rvert = 4n + 7$ • $\lvert E(HS_n)\rvert = 4n + 6$

Sebelum penelitian dilakukan untuk graf lain, telah dilakukan observasi awal pada graf H-Bintang. Hal ini dilakukan untuk menduga pewarnaan graceful dan pola pewarnaannya. Tahapan dan hasil observasi awal pewarnaan graceful pada graf H-Bintang ditunjukkan Gambar 3.2



Gambar 3.2 Pewarnaan Graceful $\chi_g(HS_3) = 6$

Pada observasi awal, bilangan kromatik graceful pada graf H-Bintang $\chi_g(HS_3) = 6$. Sehingga dapat dilanjutkan observasi selanjutnya.

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil penelitian mengenai pewarnaan graceful pada keluarga graf bintang dijelaskan secara rinci pada bab ini. Hasil dari penelitian ini adalah teorema pewarnaan graceful pada keluarga graf bintang. Penelitian ini diawali dengan menentukan graf khusus pada keluarga graf bintang yaitu, graf sapu $B_{n,m}$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$, graf kelabang $S_{3,n}P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 5$, graf M-Bintang MS_n untuk $n \geq 3$, dan graf H-Bintang HS_n untuk $n \geq 3$. Kemudian menentukan kardinalitas dari masing masing graf khusus pada keluarga graf bintang. Selanjutnya melakukan pewarnaan simpul proper dan pewarnaan sisi proper pada graf yang telah ditentukan dengan memenuhi definisi pewarnaan graceful.

Pada penelitian ini didapatkan empat teorema baru terkait pewarnaan graceful pada keluarga graf bintang. Format penyajian teorema penelitian pada bab ini diawali dengan pernyataan teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema. Setelah membuktikan kebenaran setoap teorema yang ditemukan, langkah selanjutnya yaitu proses desiminasi. Proses desiminasi pada penelitian ini dilakukan dengan membuat artikel sebagai media pembelajaran berbasis E-Monograf yang siap dipublikasi. Berikut ini adalah tahapan teorema sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan pada Bab 1.

4.1 Hasil Penelitian Pewarnaan Graceful pada Keluarga Graf Bintang

Penelitian ini menghasilkan beberapa teorema bilangan kromatik graceful pada keluarga graf bintang yaitu graf sapu $B_{n,m}$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$, graf kelabang $S_{3,n}P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 5$, graf M-Bintang MS_n untuk $n \geq 3$, dan graf H-Bintang HS_n untuk $n \geq 3$. Pewarnaan graceful dilakukan dengan memberikan warna pada setiap simpul dan sisi sedemikian hingga simpul dan sisi yang bertetangga tidak memiliki warna yang sama, dimana warna sisi diperoleh dari selisih dua simpul yang bersisian dengan sisi tersebut. Banyaknya warna minimum dari pewarnaan graceful disebut bilangan kromatik graceful yang dinotasikan dengan $\chi_g(G)$.Bilangan k terkecil pada pewarnaan graceful adalah jumlah warna minimum yang digunakan untuk mewarnai graf G.

Teorema 4.1.1. Bilangan kromatik graceful pada graf sapu $B_{n,m}$ untuk $n \geq 3$ adalah $\chi_g(B_{n,m}) = n + 2$

Bukti. Graf sapu $(B_{n,m})$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ memiliki himpunan simpul dan sisi sebagai berikut:

Graf sapu $(B_{n,m})$ memiliki himpunan simpul $V(B_{n,m}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(B_{n,m}) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq n, j = m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m\}$. Selain memiliki himpunan simpul dan sisi, Graf sapu $(B_{n,m})$ juga memiliki kardinalitas simpul dan sisi . kardinalitas simpul graf sapu $(B_{n,m})$ yaitu $|V(B_{n,m})| = m + n$ dan kardinalitas sisi graf sapu $(B_{n,m})$ yaitu $|E(B_{n,m})| = m + n - 1$ dengan derajat tertinggi graf sapu $(B_{n,m})$ yaitu $\Delta(B_{n,m}) = n + 1$

Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik graf sapu $\chi_g(B_{n,m}) = n + 2$, harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa batas bawah $\chi_g(B_{n,m}) \geq n + 2$ dan batas atas $\chi_g(B_{n,m}) \leq n + 2$. Berdasarkan **Lemma 2.3.1**, $\chi_g(G) \geq \Delta(G) + 1$; pada graf $B_{n,m}$, $\Delta(G) = n + 1$. Sehingga $\chi_g(B_{n,m}) \geq (n + 1) + 1 = n + 2$, dapat disimpulkan bahwa batas bawah dari $\chi_g(B_{n,m}) \geq n + 2$.

Selanjutnya, dibuktikan batas atas bilangan kromatik graceful pada graf sapu $B_{n,m}$ untuk $n \geq 3$ adalah $\chi_g(B_{n,m}) \leq n + 2$. Terdapat 3 kasus pewarnaan proper pada graf sapu

Kasus 1. $m \equiv 0 \ (mod\ 3)$

Pewarnaan proper graf sapu untuk $m \equiv 0 (mod\ 3)$

Berdasarkan **Definisi 2.3.1** pewarnaan simpul proper didefinisikan dengan

$c: V(B_{n,m}) \rightarrow \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, n+2\}$

$c(x_i) = i + 1, untuk\ 1 \leq i \leq n$

$$c(y_j) = \begin{cases} 1, untuk\ j = m \\ n + 2, untuk\ j = (m - 1) \\ n - 1, untuk\ j \equiv 0\ (mod\ 3), 1 \leq j \leq (m - 2) \\ n, untuk\ j \equiv 1\ (mod\ 3), 1 \leq j \leq (m - 2) \\ n + 1, untuk\ j \equiv 2 (mod\ 3), 1 \leq j \leq (m - 2) \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pewarnaan graceful dan pewarnaan simpul diatas diperoleh

$c': E(B_{n,m}) \rightarrow \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, n+1\}$

$c'(x_i y_m) = i, untuk\ 1 \leq i \leq n$

$$c'(y_j y_{j+1}) = \begin{cases} n+1, untuk\ j = (m-1) \\ 2, untuk\ j \equiv 0 (mod\ 2), 1 \leq j \leq (m-2) \\ 1, untuk\ j \equiv 1 (mod\ 2), 1 \leq j \leq (m-2) \end{cases}$$

Berdasarkan definisi bilangan kromatik graceful diperoleh $\chi_g(B_{n,m}) \leq n+2$ untuk $m \equiv 0 (mod\ 3)$

Kasus 2. $m \equiv 1 (mod\ 3)$

Pewarnaan proper graf sapu untuk $m \equiv 1 (mod\ 3)$

Berdasarkan **Definisi 2.3.1** pewarnaan simpul proper didefinisikan dengan

$c: V(B_{n,m}) \rightarrow \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, n+2\}$

$c(x_i) = i+1, untuk\ 1 \leq i \leq n$

$$c(y_j) = \begin{cases} 1, untuk\ j = m \\ n+2, untuk\ j = (m-1) \\ n+1, untuk\ j \equiv 0 (mod\ 3), 1 \leq j \leq (m-2) \\ n-1, untuk\ j \equiv 1 (mod\ 3), 1 \leq j \leq (m-2) \\ n, untuk\ j \equiv 2 (mod\ 3), 1 \leq j \leq (m-2) \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pewarnaan graceful dan pewarnaan simpul diatas diperoleh

$c': E(B_{n,m}) \rightarrow \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, n+1\}$

$c'(x_i y_m) = i, untuk\ 1 \leq i \leq n$

$$c'(y_j y_{j+1}) = \begin{cases} n+1, untuk\ j = (m-1) \\ 2, untuk\ j \equiv 0 (mod\ 2), 1 \leq j \leq (m-2) \\ 1, untuk\ j \equiv 1 (mod\ 2), 1 \leq j \leq (m-2) \end{cases}$$

Berdasarkan definisi bilangan kromatik graceful diperoleh $\chi_g(B_{n,m}) \leq n+2$ untuk $m \equiv 1 (mod\ 3)$

Kasus 3. $m \equiv 2 (mod\ 3)$

Pewarnaan proper graf sapu untuk $m \equiv 2 (mod\ 3)$

Berdasarkan **Definisi 2.3.1** pewarnaan simpul proper didefinisikan dengan

$c: V(B_{n,m}) \rightarrow \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, n+2\}$

$c(x_i) = i+1, untuk\ 1 \leq i \leq n$

$$c(y_j) = \begin{cases} 1, untuk\ j = m \\ n+2, untuk\ j = (m-1) \\ n, untuk\ j \equiv 0(mod\ 3), 1 \leq j \leq (m-2) \\ n+1, untuk\ j \equiv 2(mod\ 3), 1 \leq j \leq (m-2) \\ n-1, untuk\ j \equiv 3(mod\ 3), 1 \leq j \leq (m-2) \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pewarnaan graceful dan pewarnaan simpul diatas diperoleh

$c': E(B_{\ n,m}) \to \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, n+1\}$

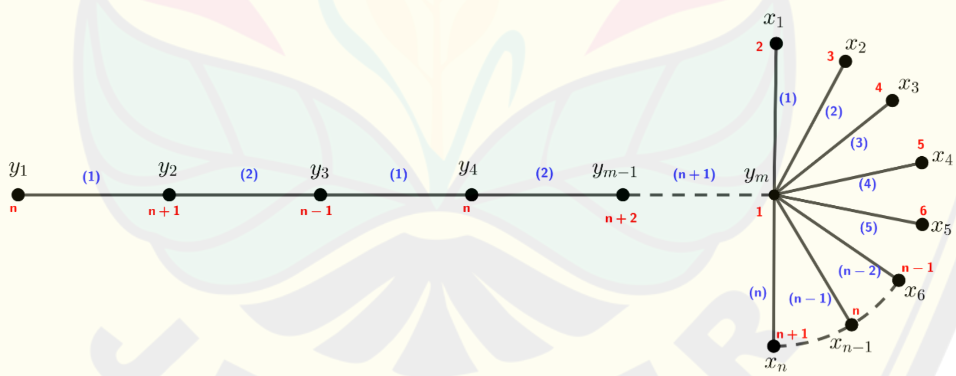
$c'(x_i y_m) = i, untuk\ 1 \leq i \leq n$

$$c'(y_j y_{j+1}) = \begin{cases} n+1, untuk\ j = (m-1) \\ 1, untuk\ j \equiv 0(mod\ 2), 1 \leq j \leq (m-2) \\ 2, untuk\ j \equiv 1(mod\ 2), 1 \leq j \leq (m-2) \end{cases}$$

Berdasarkan definisi bilangan kromatik graceful diperoleh $\chi_g(B_{\ n,m}) \leq n+2$ untuk $m \equiv 2(mod\ 3)$

Diperoleh batas bawah dan batas atas bilangan kromatik graceful pada graf sapu untuk $n \geq 3$ adalah $\chi_g(B_{\ n,m}) \geq n+2$ dan $\chi_g(B_{\ n,m}) \leq n+2$. Berdasarkan batas bawah dan batas atas diperoleh $n+2 \leq \chi_g(B_{\ n,m}) \leq n+2$, dengan kata lain $\chi_g(B_{\ n,m}) = n+2$. ■

Berikut Gambar 4.1 sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema.



Gambar 4.1 Pewarnaan Graceful pada Graf Sapu

Teorema 4.1.2. Bilangan kromatik graceful pada graf kelabang $S_{3,n}P_m$ untuk $n \geq 3, m \geq 5$ adalah $\chi_g(S_{3,n}P_m) = n+2$

Bukti. Graf kelabang $(S_{3,n}P_m)$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 5$ memiliki himpunan simpul dan himpunan sisi sebagai berikut:

Graf kelabang $(S_{3,n}P_m)$ memiliki himpunan simpul $V(S_{3,n}P_m) = \{x_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(S_{3,n}P_m) = \{x_i x_m; 1 \leq i \leq 2\} \cup \{x_i x_{i+1}; 3 \leq i \leq m-1\} \cup \{x_i y_{i,j}; 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq n\}$. Selain memiliki himpunan simpul dan himpunan sisi , graf kelabang $(S_{3,n}P_m)$ juga memiliki kardinalitas simpul dan sisi. Kardinalitas simpul graf kelabang $(S_{3,n}P_m)$ yaitu $|V(S_{3,n}P_m)| = 3m + n$ dan kardinalitas sisi graf kelabang $(S_{3,n}P_m)$ yaitu $|E(S_{3,n}P_m)| = 3m + (n-1)$ dengan derajat tertinggi graf kelabang $(S_{3,n}P_m)$ yaitu $\Delta(S_{3,n}P_m) = n + 1$

Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik graf kelabang $\chi_g(S_{3,n}P_m) = n + 2$, harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa batas bawah $\chi_g(S_{3,n}P_m) \geq n + 2$ dan batas atas $\chi_g(S_{3,n}P_m) \leq n + 2$. Berdasarkan **Lemma 2.3.1**, $\chi_g(G) \geq n + 1$, paga graf kelabang $\chi_g(S_{3,n}P_m)$, $\Delta(G) = n + 1$. Sehingga $\chi_g(S_{3,n}P_m) \geq (n+1) + 1 = n + 2$ dapat disimpulkan bahwa batas bawah dari $\chi_g(S_{3,n}P_m) \geq n + 2$.

Selanjutnya, dibuktikan batas atas bilangan kromatik graceful pada graf kelabang $S_{3,n}P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 5$ adalah $\chi_g(S_{3,n}P_m) \leq n + 2$. Terdapat 4 kasus pewarnaan proper pada graf kelabang

Kasus 1. $m \equiv 0(mod\ 4), m \geq 5$

Pewarnaan proper untuk $m \equiv 0(mod\ 4), m \geq 5$

Berdasarkan **Definisi 2.3.1** pewarnaan simpul proper didefinisikan dengan

$c: V(S_{3,n}P_m) \to \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, n+2\}$

$$c(x_i) = \begin{cases} n+2, untuk\ i = 1 \\ 1, untuk\ 2 \leq i \leq 3 \\ 4, untuk\ i = 4 \\ 2, untuk\ i \equiv 0(mod\ 4), 5 \leq i \leq m \\ 3, untuk\ i \equiv 1(mod\ 4), 5 \leq i \leq m \\ 5, untuk\ i \equiv 2(mod\ 4) 5 \leq i \leq m \\ 4, untuk\ i \equiv 3(mod\ 4), 5 \leq i \leq m \end{cases}$$

$$c(y_{1,j}) = \begin{cases} j, untuk\ j = 1 \\ j+1, untuk\ 2 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$c(y_{2,j}) = j + 2, untuk\ 1 \leq j \leq n$$

$$c(y_{3,j}) = \begin{cases} j+1, untuk\ 1 \le j \le 2 \\ j+2, untuk\ 3 \le j \le n \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pewarnaan graceful dan pewarnaan simpul diatas diperoleh

$$c': E(S_{3,n}P_m) \to \{1,2,3,4, \dots, n, n+1\}$$

$$c'(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 3, untuk\ i = 3 \\ 1, untuk\ i \equiv 0 (mod\ 2), 4 \le i \le (m-1) \\ 2, untuk\ i \equiv 1 (mod\ 2), 4 \le i \le (m-1) \end{cases}$$

$$c'(x_i x_m) = \begin{cases} n, untuk\ i = 1 \\ 1, untuk\ i = 2 \end{cases}$$

$$c'(x_1 y_{1,j}) = \begin{cases} 1, untuk\ j = n \\ 2, untuk\ j = n-1 \\ 3, untuk\ j = n-2 \\ n-2, untuk\ j = 3 \\ n-1, untuk\ j = 2 \\ n+1, untuk\ j = 1 \end{cases}$$

$$c'(x_2 y_{2,j}) = j+1, untuk\ 1 \le j \le n$$

$$c'(x_3 y_{3,j}) = \begin{cases} j, untuk\ 1 \le j \le 2 \\ j+1, untuk\ 3 \le j \le n \end{cases}$$

Berdasarkan definisi bilangan kromatik graceful diperoleh $\chi_g(S_{3,n}P_m) \le n + 2$ untuk $m \equiv 0(mod\ 4), m \ge 5$

Kasus 2. $m \equiv 1(mod\ 4), m \ge 5$

Pewarnaan proper graf kelabang untuk $m \equiv 1(mod\ 4), m \ge 5$

Berdasarkan **Definisi 2.3.1** pewarnaan simpul proper didefinisikan dengan

$$c: V(S_{3,n}P_m) \to \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, n+2\}$$

$$c(x_i) = \begin{cases} n+2, untuk\ i = 1 \\ 1, untuk\ 2 \le i \le 3 \\ 4, untuk\ i \equiv 0(mod\ 4), m \le i \le 4 \\ 2, untuk\ i \equiv 1(mod\ 4), m \le i \le 4 \\ 3, untuk\ i \equiv 2(mod\ 4), m \le i \le 4 \\ 5, untuk\ i \equiv 3(mod\ 4), m \le i \le 4 \end{cases}$$

$$c(y_{1,j}) = \begin{cases} j, untuk\ j = 1 \\ j+1, untuk\ 2 \le j \le n \end{cases}$$

$$c(y_{2,j}) = j+2, untuk\ 1 \le j \le n$$

$$c(y_{3,j}) = \begin{cases} j+1, untuk\ 1 \le j \le 2 \\ j+2, untuk\ 3 \le j \le n \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pewarnaan graceful dan pewarnaan simpul diatas diperoleh

$c': E(S_{3,n}P_m) \rightarrow \{1,2,3,4, \dots, n, n+1\}$

$$c'(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 3, untuk\ j = 3 \\ 2, untuk\ j \equiv 0 (mod\ 2), 4 \leq j \leq (m-1) \\ 1, untuk\ j \equiv 1 (mod\ 2), 4 \leq j \leq (m-1) \end{cases}$$

$$c'(x_i x_m) = \begin{cases} n, untuk\ i = 1 \\ 1, untuk\ i = 2 \end{cases}$$

$$c'(x_1 y_{1,j}) = \begin{cases} 1, untuk\ j = n \\ 2, untuk\ j = n-1 \\ 3, untuk\ j = n-2 \\ n-2, untuk\ j = 3 \\ n-1, untuk\ j = 2 \\ n+1, untuk\ j = 1 \end{cases}$$

$$c'(x_2 y_{2,j}) = j + 1, untuk\ 1 \leq j \leq n$$

$$c'(x_3 y_{3,j}) = \begin{cases} j, untuk\ 1 \leq j \leq 2 \\ j+1, untuk\ 3 \leq j \leq n \end{cases}$$

Berdasarkan definisi bilangan kromatik graceful diperoleh $\chi_g(S_{3,n}P_m) \leq n + 2$ untuk $m \equiv 1 (mod\ 4), m \geq 5$

Kasus 3. $m \equiv 2 (mod\ 4), m \geq 5$

Pewarnaan proper untuk $m \equiv 2 (mod\ 4), m \geq 5$

Berdasarkan **Definisi 2.3.1** pewarnaan simpul proper didefinisikan dengan

$c: V(S_{3,n}P_m) \rightarrow \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, n+2\}$

$$c(x_i) = \begin{cases} n+2, untuk\ i = 1 \\ 1, untuk\ 2 \leq i \leq 3 \\ 5, untuk\ i \equiv 0 (mod\ 4), 4 \leq i \leq m \\ 4, untuk\ i \equiv 1 (mod\ 4), 4 \leq i \leq m \\ 2, untuk\ i \equiv 2 (mod\ 4), 4 \leq i \leq m \\ 3, untuk\ i \equiv 3 (mod\ 4), 4 \leq i \leq m \end{cases}$$

$$c(y_{1,j}) = \begin{cases} j, untuk\ j = 1 \\ j+1, untuk\ 2 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$c(y_{2,j}) = j + 2, untuk\ 1 \leq j \leq n$$

$$c(y_{3,j}) = \begin{cases} j+1, untuk\ 1 \leq j \leq 3 \\ j+2, untuk\ 4 \leq j \leq n \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pewarnaan graceful dan pewarnaan simpul diatas diperoleh

$c': E(S_{3,n}P_m) \rightarrow \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, n+1\}$

$$c'(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 4, untuk\ i = 3 \\ 1, untuk\ i \equiv 0(mod\ 2), 4 \leq i \leq (m-1) \\ 2, untuk\ i \equiv 1(mod\ 2), 4 \leq i \leq (m-1) \end{cases}$$

$$c'(x_i x_m) = \begin{cases} n, untuk\ i = 1 \\ 1, untuk\ i = 2 \end{cases}$$

$$c'(x_1 y_{1,j}) = \begin{cases} 1, untuk\ j = n \\ 2, untuk\ j = n-1 \\ 3, untuk\ j = n-2 \\ n-2, untuk\ j = 3 \\ n-1, untuk\ j = 2 \\ n+1, untuk\ j = 1 \end{cases}$$

$$c'(x_2 y_{2,j}) = j + 1, untuk\ 1 \leq j \leq n$$

$$c'(x_3 y_{3,j}) = \begin{cases} j, untuk\ 1 \leq j \leq 3 \\ j+1, untuk\ 4 \leq j \leq n \end{cases}$$

Berdasarkan definisi bilangan kromatik graceful diperoleh $\chi_g(S_{3,n}P_m) \leq n + 2$ untuk $m \equiv 2(mod\ 4)$, $m \geq 5$

Kasus 4. $m \equiv 3(mod\ 4)$, $m \geq 5$

Pewarnaan proper untuk $m \equiv 3(mod\ 4)$, $m \geq 5$

Berdasarkan **Definisi 2.3.1** pewarnaan simpul proper didefinisikan dengan

$c: V(S_{3,n}P_m) \rightarrow \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, n+2\}$

$$c(x_i) = \begin{cases} n+2, untuk\ i = 1 \\ 1, untuk\ 2 \leq i \leq 3 \\ 2, untuk\ i = 4 \\ 3, untuk\ i \equiv 0(mod\ 4), 5 \leq i \leq m \\ 5, untuk\ i \equiv 1(mod\ 4), 5 \leq i \leq m \\ 4, untuk\ i \equiv 2(mod\ 4), 5 \leq i \leq m \\ 2, untuk\ i \equiv 3(mod\ 4), 5 \leq i \leq m \end{cases}$$

$$c(y_{1,j}) = \begin{cases} j, untuk\ j = 1 \\ j+1, untuk\ 2 \leq j \leq n \end{cases}$$

$$c(y_{2,j}) = j + 2, untuk\ 1 \leq j \leq n$$

$$c(y_{3,j}) = j + 2, untuk\ 1 \leq j \leq n$$

Berdasarkan definisi pewarnaan graceful dan pewarnaan simpul diatas diperoleh:

$c': E(S_{3,n}P_m) \rightarrow \{1,2,3,4, \dots, n, n+1, n+1\}$

$$c'(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 1, untuk\ i = 3 \\ 3, untuk\ i = 4 \\ 1, untuk\ i \equiv 0 (mod\ 2), 5 \le i \le (m-1) \\ 2, untuk\ i \equiv 1 (mod\ 2), 5 \le i \le (m-1) \end{cases}$$

$$c'(x_i x_m) = \begin{cases} n, untuk\ i = 1 \\ 1, untuk\ i = 2 \end{cases}$$

$$c'(x_1 y_{1,j}) = \begin{cases} 1, untuk\ j = n \\ 2, untuk\ j = n-1 \\ 3, untuk\ j = n-2 \\ n-2, untuk\ j = 3 \\ n-1, untuk\ j = 2 \\ n+1, untuk\ j = 1 \end{cases}$$

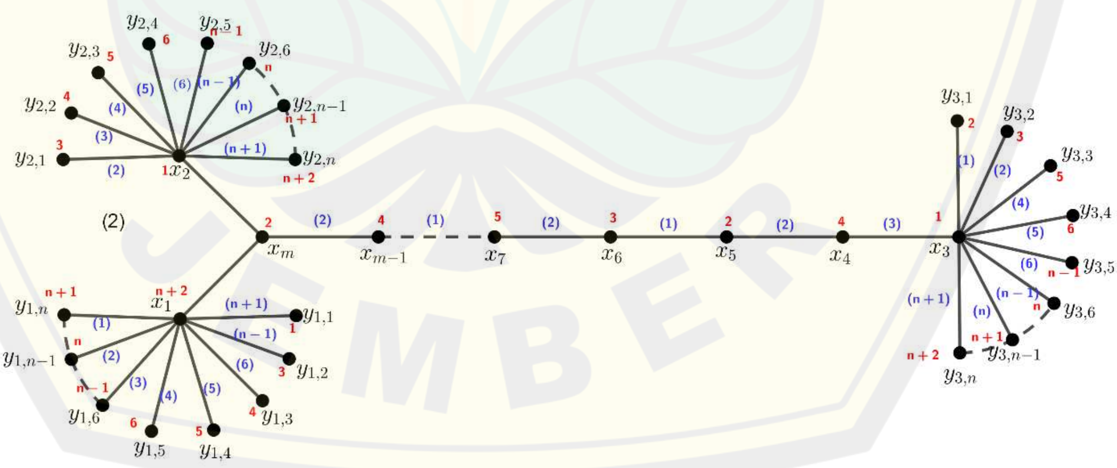
$$c'(x_2 y_{2,j}) = j + 1, untuk\ 1 \le j \le n$$

$$c'(x_3 y_{3,j}) = j + 1, untuk\ 1 \le j \le n$$

Berdasarkan definisi bilangan kromatik graceful diperoleh $\chi_g(S_{3,n}P_m) \le n + 2$ untuk $m \equiv 0(mod\ 4), m \ge 5$.

Diperoleh batas bawah dan batas atas bilangan kromatik graceful pada graf kelabang untuk $n \ge 3, m \ge 5$ adalah $\chi_g(S_{3,n}P_m) \ge n + 2$ dan $\chi_g(S_{3,n}P_m) \le n + 2$. Berdasarkan batas bawah dan batas atas diperoleh $n + 2 \le \chi_g(S_{3,n}P_m) \le n + 2$, dengan kata lain $\chi_g(S_{3,n}P_m) = n + 2$. ■

Berikut Gambar 4.2 sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema.



Gambar 4.2 Pewarnaan Graceful pada Graf Kelabang

Teorema 4.1.3. Bilangan kromatik graceful pada graf M-Bintang MS_n untuk n ≥ 3 adalah $\chi_g(MS_n) = n + 2$

Bukti. Graf M-Bintang MS_n untuk n ≥ 3 memiliki himpunan simpul dan himpunan sisi sebagai berikut:

Graf M-Bintang MS_n memiliki himpunan simpul $V(MS_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 5\} \cup \{y_{i,j}; 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(MS_n) = \{x_i x_{i+1}; i = 3\} \cup \{x_i x_{i+2}; i = 3\} \cup \{x_i x_{i+3}; 4 \leq i \leq 5\} \cup \{x_i y_{ij}; 1 \leq i \leq 2; 1 \leq j \leq n\}$. Selain memiliki himpunan simpul dan himpunan sisi, graf M-Bintang MS_n juga memiliki kardinalitas simpul dan sisi. Kardinalitas simpul graf M-Bintang MS_n yaitu $|V(MS_n)| = 2n + 5$ dan kardinalitas sisi yaitu $|E(MS_n)| = 2n + 4$ dengan derajat tertinggi graf M-Bintang MS_n yaitu $\Delta(MS_n) = n + 1$.

Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik graf M-Bintang $\chi_g(MS_n) = n + 2$, harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa batas bawah $\chi_g(MS_n) \geq n + 2$ dan batas atas $\chi_g(MS_n) \leq n + 2$. Berdasarkan **Lemma 2.3.1**, $\chi_g(G) \geq n + 1$, pada graf MS_n, $\Delta(G) = n + 1$. Sehingga $\chi_g(MS_n) \geq (n + 1) + 1 = n + 2$ dapat disimpulkan bahwa batas bawah dari $\chi_g(MS_n) \geq n + 2$.

Selanjutnya, dibuktikan batas atas bilangan kromatik graceful pada graf M-Bintang MS_n untuk $n \geq 3$ adalah $\chi_g(MS_n) \leq n + 2$.

Berdasarkan **Definisi 2.3.1** pewarnaan simpul proper didefinisikan dengan

$c: V(MS_n) \to \{1,2,3,4, \dots, n, n + 1, n + 2\}$

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, untuk\ 1 \leq i \leq 2 \\ 2, untuk\ i = 5 \\ n + 2, untuk\ i = 4 \\ n + 1, untuk\ i = 3 \end{cases}$$

$c(y_{1,j}) = j + 1, untuk\ 1 \leq j \leq n$

$c(y_{2,j}) = j + 2, untuk\ 1 \leq j \leq n$

Berdasarkan definisi pewarnaan graceful dan pewarnaan simpul diatas diperoleh

$c': E(MS_n) \to \{1,2,3,4, \dots, n, n + 1, n + 1\}$

$c'(x_i x_{i+1}) = 1, untuk\ i = 3$

$c'(x_i x_{i+2}) = (n - 1), untuk\ i = 3$

$$c'(x_i x_{i+3}) = \begin{cases} 1, untuk\ i = 2 \\ n+1, untuk\ i = 1 \end{cases}$$

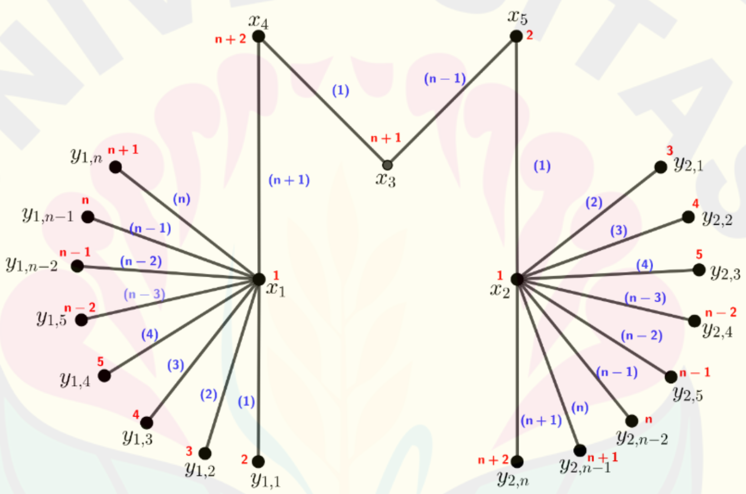
$c'(x_1 y_{1,j}) = j, untuk\ 1 \leq j \leq n$

$c'(x_2 y_{2,j}) = j+1, untuk\ 1 \leq j \leq n$

Berdasarkan definisi bilangan kromatik graceful diperoleh $\chi_g(MS_n) \leq n+2$.

Diperoleh batas bawah dan batas atas bilangan kromatik graceful pada graf M-Bintang untuk $n \geq 3$ adalah $\chi_g(MS_n) \geq n+2$ dan $\chi_g(MS_n) \leq n+2$. Berdasarkan batas bawah dan batas atas diperoleh $n+2 \leq \chi_g(MS_n) \leq n+2$, dengan kata lain $\chi_g(MS_n) = n+2$. ■

Berikut Gambar 4.1 sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema.



Gambar 4.3 Pewarnaan Graceful pada Graf M-Bintang

Teorema 4.1.4. Bilangan kromatik graceful pada graf H-Bintang (HS_n) untuk n ≥ 3 adalah

$$\chi_g(HS_n) = \begin{cases} 6, untuk\ n = 3 \\ n+2, untuk\ n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti. Graf H-Bintang (HS_n) untuk n ≥ 3 memiliki himpunan simpul dan himpunan sisi sebagai berikut:

Graf H-Bintang (HS_n) memiliki himpunan simpul $V(HS_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq 7\} \cup \{y_{i,j}; 4 \leq i \leq 7, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(HS_n) = \{x_i x_{i+1}; i = 1\} \cup \{x_i x_{i+2}; 1 \leq i \leq 3\} \cup \{x_i x_{i+4}; 2 \leq i \leq 3\} \cup \{x_i y_{i,j}; 4 \leq i \leq 7, 1 \leq j \leq n\}$.

Selain memiliki himpunan simpul dan sisi, graf H-Bintang (HS_n) juga memiliki kardinalitas simpul dan sisi. Kardinalitas simpul graf H-Bintang (HS_n) yaitu $|V(HS_n)| = 4n + 7$ dan kardinalitas sisi graf H-Bintang (HS_n) yaitu $|E(HS_n)| = 4n + 6$ dengan derajat tertinggi graf H-Bintang (HS_n) yaitu $\Delta(HS_n) = n + 1$

Kasus 1. $n = 3$

Berdasarkan **Lemma 2.3.1**, $\chi_g(G) \geq n + 1$; pada graf H-Bintang (HS_n), $\Delta(G) = n + 1$. Sehingga $\chi_g(HS_3) \geq 4 + 1 = 5$

Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik H-Bintang $\chi_g(HS_3) = 6$. Harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa batas bawah $\chi_g(HS_3) \geq 6$ dan batas atas $\chi_g(HS_3) \leq 6$. Kita buktikan batas bawah dari bilangan kromatik graceful pada graf H-Bintang adalah $\chi_g(HS_3) \geq 6$. Asumsikan bahwa $\chi_g(HS_3) < 6$, andaikan $\chi_g(HS_3) = 5$. Misalkan simpul x_4 diwarnai dengan 1, simpul $y_{4,1}$ diwarnai dengan 2, simpul $y_{4,2}$ diwarnai dengan 3, simpul $y_{4,3}$ diwarnai 4, dan simpul x_2 diwarnai 5. Dan pewarnaan sisi yang didapat :

$c'(x_4y_{4,1}) = |c(x_4) - c(y_{4,1})| = |1 - 2| = 1$

$c'(x_4y_{4,2}) = |c(x_4) - c(y_{4,2})| = |1 - 3| = 2$

$c'(x_4y_{4,3}) = |c(x_4) - c(y_{4,3})| = |1 - 4| = 3$

$c'(x_2x_4) = |c(x_2) - c(x_4)| = |5 - 1| = 4$

Selanjutnya menentukan warna dari $c(x_6)$. Karena $x_2x_6 \in (HS_n)$ maka $c(x_6) \neq 5$.

a. Jika $c(x_6) = 4$, maka maka kemungkinan warna simpul $c(y_{6,1}) = 1$, $c(y_{6,2}) = 2$
   - $c(y_{6,3}) \neq 3$ karena $c'(x_6y_{6,3}) = c'(x_2x_6) = 1$ dan sisi $(x_6y_{6,3})$ bertetangga dengan sisi (x_2x_6) sehingga kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.
   - $c(y_{6,3}) \neq 4$ karena $x_6y_{6,3} \in (HS_n)$ sehingga kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.

- $c(y_{6,3}) \neq 5$ karena $c'(x_6y_{6,3}) = c'(x_2x_6) = 1$ dan sisi $(x_6y_{6,3})$ bertetangga dengan sisi (x_2x_6) sehingga kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.

Dengan demikian, untuk $c(x_6) = 4$ kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.

b. Jika $c(x_6) = 3$, maka maka kemungkinan warna simpul $c(y_{6,1}) = 2$

- $c(y_{6,2}), c(y_{6,3}) \neq 1$ karena $c'(x_6y_{6,2}), c'(x_6y_{6,3}) = c'(x_2x_6) = 2$ dan sisi $(x_6y_{6,2}), (x_6y_{6,3})$ bertetangga dengan sisi (x_2x_6) sehingga kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.
- $c(y_{6,2}), c(y_{6,3}) \neq 3$ karena $(x_6y_{6,2}), (x_6y_{6,3}) \in E(HS_n)$ sehingga kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.
- $c(y_{6,2}), c(y_{6,3}) \neq 4$ karena $c'(x_6y_{6,2}), c'(x_6y_{6,3}) = c'(x_6y_{6,1}) = 1$ dan sisi $(x_6y_{6,2}), (x_6y_{6,3})$ bertetangga dengan sisi $(x_6y_{6,1})$ sehingga kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.
- $c(y_{6,2}), c(y_{6,3}) \neq 5$ karena $c'(x_6y_{6,2}), c'(x_6y_{6,3}) = c'(x_2x_6) = 2$ dan sisi $(x_6y_{6,2}), (x_6y_{6,3})$ bertetangga dengan sisi (x_2x_6) sehingga kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.

Dengan demikian, untuk $c(x_6) = 3$ kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.

c. Jika $c(x_6) = 2$, maka maka kemungkinan warna simpul $c(y_{6,1}) = 1$, $c(y_{6,2}) = 4$

- $c(y_{6,3}) \neq 2$ karena $x_6y_{6,3} \in (HS_n)$ sehingga kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.
- $c(y_{6,3}) \neq 3$ karena $c'(x_6y_{6,3}) = c'(x_6y_{6,1}) = 1$ dan sisi $(x_6y_{6,3})$ bertetangga dengan sisi $(x_6y_{6,1})$ sehingga kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.
- $c(y_{6,3}) \neq 5$ karena $c'(x_6y_{6,3}) = c'(x_2x_6) = 3$ dan sisi $(x_6y_{6,3})$ bertetangga dengan sisi (x_2x_6) sehingga kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.

Dengan demikian, untuk $c(x_6) = 2$ kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful.

d. Jika $c(x_6) = 1$, kontradiksi dengan definisi pewarnaan graceful karena $c'(x_2x_4) = c'(x_2x_6) = 4$ dan sisi (x_2x_4) bertetangga dengan sisi (x_2x_6).

Berdasarkan (a), (b), (c), (d), $X_g(HS_3) = 5$ adalah kontradiksi. Sehingga $\chi_g(HS_3) \geq 6$

Langkah selanjutnya, dibuktikan batas atas bilangan kromatik graceful pada graf H-Bintang untuk $n = 3$ adalah $\chi_g(HS_3) \leq 6$. Berdasarkan **Definisi 2.3.1** pewarnaan simpul proper didefinisikan dengan

$c: V(HS_n) \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, untuk\ i = 1 \\ 2, untuk\ i = 4\ dan\ 7 \\ 5, untuk\ i = 3\ dan\ 6 \\ 6, untuk\ i = 2\ dan\ 5 \end{cases}$$

$$c(y_{4,j}) = \begin{cases} 1, untuk\ j = 1 \\ 4, untuk\ j = 2 \\ 5, untuk\ j = 3 \end{cases}$$

$$c(y_{5,j}) = \begin{cases} 2, untuk\ j = 1 \\ 3, untuk\ j = 2 \\ 4, untuk\ j = 3 \end{cases}$$

$$c(y_{6,j}) = \begin{cases} 1, untuk\ j = 1 \\ 2, untuk\ j = 2 \\ 3, untuk\ j = 3 \end{cases}$$

$$c(y_{7,j}) = \begin{cases} 3, untuk\ j = 1 \\ 4, untuk\ j = 2 \\ 6, untuk\ j = 3 \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pewarnaan graceful dan pewarnaan simpul diatas diperoleh

$c': E(HS_n) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$

$c'(x_ix_{i+1}) = 5, untuk\ i = 1$

$$c'(x_ix_{i+2}) = \begin{cases} 4, untuk\ i = 1\ dan\ 2 \\ 1, untuk\ i = 3 \end{cases}$$

$$c'(x_ix_{i+4}) = \begin{cases} 1, untuk\ i = 2 \\ 3, untuk\ i = 3 \end{cases}$$

$$c'(x_4y_{4,j}) = \begin{cases} 1, untuk\ j = 1 \\ 2, untuk\ j = 2 \\ 3, untuk\ j = 3 \end{cases}$$

$$c'(x_5y_{5,j}) = \begin{cases} 4, untuk\ j = 1 \\ 3, untuk\ j = 2 \\ 2, untuk\ j = 3 \end{cases}$$

$$c'(x_6y_{6,j}) = \begin{cases} 4, untuk\ j = 1 \\ 3, untuk\ j = 2 \\ 2, untuk\ j = 3 \end{cases}$$

$$c'(x_7y_{7,j}) = \begin{cases} 4, untuk\ j = 1 \\ 3, untuk\ j = 2 \\ 1, untuk\ j = 3 \end{cases}$$

Berdasarkan definisi bilangan kromatik graceful, diperoleh $\chi_g(HS_3) \leq 6$.

Diperoleh batas bawah dan batas atas bilangan kromatik graceful pada graf H-Bintang untuk $n = 3$ adalah $\chi_g(HS_3) \geq 6$ dan $\chi_g(HS_3) \leq 6$. Berdasarkan batas bawah dan batas atas diperoleh $6 \leq \chi_g(HS\ _3) \leq 6$, dengan kata lain $\chi_g(HS\ _3) = 6$. ■

Kasus 2. $\chi_g(HS_n) = n + 2, untuk\ n \geq 4$

Untuk membuktikan bahwa bilangan kromatik H-Bintang $\chi_g(HS_n) = n + 2$ untuk $n \geq 4$, harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa batas bawah $\chi_g(HS_n) \geq n + 2$ dan batas atas $\chi_g(HS_n) \leq n + 2$. Berdasarkan **Lemma 2.3.1**, $\chi_g(G) \geq n + 1$; pada graf H-Bintang $HS_n, \Delta(G) = n + 1$. Sehingga $\chi_g(HS_n) \geq (n + 1) + 1 = n + 2$ dapat disimpulkan bahwa batas bawah dari $\chi_g(HS_n) \geq n + 2$.

Selanjutnya, dibuktikan batas atas bilangan kromatik graceful graf H-Bintang untuk $n \geq 4$ adalah $\chi_g(HS_n) \leq n + 2$.

Berdasarkan **Definisi 2.3.1** pewarnaan simpul proper didefinisikan dengan

$c: V(HS_n) \rightarrow \{1,2,3,4, \dots, n, n + 1, n + 2\}$

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, untuk\ i = 4\ dan\ 7 \\ n + 2, untuk\ 5 \leq\ i \leq 6 \\ n + 1, untuk\ i = 2 \\ n - 1, untuk\ i = 1 \\ n, untuk\ i = 3 \end{cases}$$

$$c(y_{4,j}) = \begin{cases} j + 1, untuk\ 1 \leq j \leq (n - 1) \\ j + 2, untuk\ j = n \end{cases}$$

$$c(y_{5,j}) = \begin{cases} j, untuk\ 1 \le j \le (n-1) \\ j+1, untuk\ j = n \end{cases}$$

$$c(y_{6,j}) = j, untuk\ 1 \le j \le n$$

$$c(y_{7,j}) = \begin{cases} j+1, untuk\ 1 \le j \le (n-2) \\ j+2, untuk\ (n-1) \le j \le n \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pewarnaan graceful dan pewarnaan simpul diatas diperoleh

$$c': E(HS_n) \to \{1,2,3,4, \dots, n, n+1,\}$$

$$c'(x_i x_{i+1}) = 2, untuk\ i = 1$$

$$c'(x_i x_{i+2}) = \begin{cases} 1, untuk\ i = 1 \\ 2, untuk\ i = 3 \\ n, untuk\ i = 2 \end{cases}$$

$$c'(x_i x_{i+4}) = \begin{cases} 1, untuk\ i = 2 \\ n-1, untuk\ i = 3 \end{cases}$$

$$c'(x_4 y_{4,j}) = \begin{cases} j, untuk\ 1 \le j \le n-1 \\ j+1, untuk\ j = n \end{cases}$$

$$c'(x_5 y_{5,j}) = \begin{cases} 1, untuk\ j = n \\ 3, untuk\ j = n-1 \\ 4, untuk\ j = n-2 \\ n-3, untuk\ j = 5 \\ n-2, untuk\ j = 4 \\ n-1, untuk\ j = 3 \\ n, untuk\ j = 2 \\ n+1, untuk\ j = 1 \end{cases}$$

$$c'(x_6 y_{6,j}) = \begin{cases} 2, untuk\ j = n \\ 3, untuk\ j = n-1 \\ 4, untuk\ j = n-2 \\ n-3, untuk\ j = 5 \\ n-2, untuk\ j = 4 \\ n-1, untuk\ j = 3 \\ n, untuk\ j = 2 \\ n+1, untuk\ j = 1 \end{cases}$$

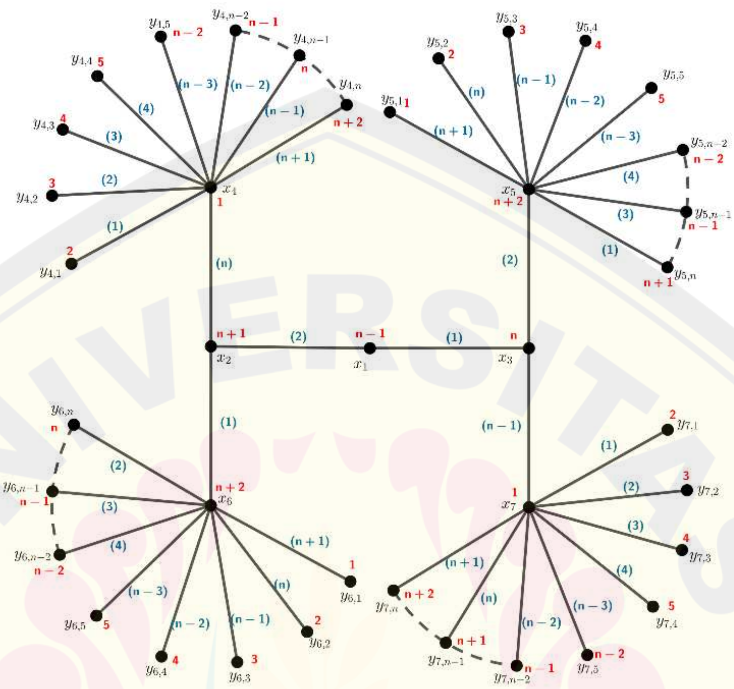
$$c'(x_7 y_{7,j}) = \begin{cases} j, untuk\ 1 \le j \le n-2 \\ j+1, untuk\ n-1 \le j \le n \end{cases}$$

Berdasarkan definisi bilangan kromatik graceful, diperoleh $\chi_g(HS_n) \le n+2$

Diperoleh batas bawah dan batas atas bilangan kromatik graceful pada graf H-Bintang untuk $n \ge 4$ adalah $\chi_g(HS_n) \ge n+2$ dan $\chi_g(HS_n) \le n+2$.

Berdasarkan batas bawah dan batas atas diperoleh $n + 2 \leq \chi_g(HS_n) \leq n + 2$, dengan kata lain $\chi_g(HS_n) = n + 2$ untuk $n \geq 4$. ■

Berikut Gambar 4.4 sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema.



Gambar 4.4 Pewarnaan Graceful pada Graf H-Bintang

4.2 Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pewarnaan graceful dan bilangan kromatik graceful pada keluarga graf bintang. Langkah awal dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan graf pada keluarga graf bintang yaitu, pada graf sapu $B_{n,m}$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$, graf kelabang $S_{3,n}P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 5$, graf M-Bintang MS_n untuk $n \geq 3$, dan graf H-Bintang HS_n untuk $n \geq 3$. Kemudian menentukan kardinalitas pada setiap graf.

Langkah selanjutnya yaitu menentukan batas bawah dan batas atas. Batas bawah bilangan kromatik untuk graf yang diteliti menggunakan **Lemma 2.3.1** $\chi_g(G) \geq \Delta(G) + 1$. Batas atas bilangan kromatik graceful pada graf yang diteliti ditentukan dari fungsi pewarnaan simpul proper dan fungsi pewarnaan sisi proper pada setiap graf yang diteliti.

Berdasarkan hasil penelitian tentang pewarnaan graceful pada keluarga graf bintang diperoleh 4 teorema. Teorema yang diciptakan merupakan teorema baru dari pewarnaan graceful dari keluarga graf bintang yang terdiri dari graf sapu $B_{n,m}$ untuk $n \geq 3, m \geq 2$, graf kelabang $S_{3,n}P_m$ untuk $n \geq 3$, $m \geq 5$, graf M-Bintang MS_n untuk $n \geq 3$, dan graf H-Bintang HS_n untuk $n \geq 3$. Cara membuktikan teorema pewarnaan graceful yaitu dengan mencari batas bawah dan batas atas pewarnaan graceful pada graf yang dieliti. Batas bawah yang digunakan pada penelitian ini yaitu dengan menggunakan Lemma 2.3.1. Kemudian mencari kontradiksi untuk membuktikan batas bawah pada graf yang tidak memenuhi Lemma 2.3.1. Pembuktian batas atas pada penelitian ini dengan menggunakan fungsi pewarnaan graceful pada setiap simpul dan sisi graf yang diteliti. Selain itu, yaitu membuat *E*-Monograf sebagai media pembelajaran dan dapat diakses pada web anyflip dengan scan barcode pada Gambar 4.2.1

Gambar 4.2.1 Barcode *E*-Monograf

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, diperoleh empat teorema baru mengenai pewarnaan graceful pada keluarga graf bintang, meliputi graf sapu, graf kelabang, graf M-Bintang, dan graf H-Bintang. Bilangan kromatik graceful pada keluarga graf bintang yang didapatkan dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Bilangan kromatik graceful graf sapu adalah $\chi_g(B_{n,m}) = n + 2$ untuk $n \geq 3$
2. Bilangan kromatik graceful pada graf kelabang adalah $\chi_g(S_{3,n}P_m) = n + 2$ untuk $n \geq 3, m \geq 5$
3. Bilangan kromatik graceful pada graf M-Bintang adalah $\chi_g(MS_n) = n + 2$ untuk $n \geq 3$
4. Bilangan kromatik graceful pada graf H-Bintang adalah $\chi_g(HS_n) = 6$ untuk $n = 3$ dan $\chi_g(HS_n) = n + 2$ untuk $n \geq 4$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian terdapat beberapa graf yang masih belum ditemukan nilai dari bilangan kromatik graceful dan sulit menemukan generalisasi rumus untuk beberapa keluarga graf, dan beberapa operasi pada graf. Contohnya pada keluarga graf roda, keluarga graf pohon, operasi corona, oprasi cartesian, operasi amalgamasi, dll.

DAFTAR PUSTAKA

Afriantini, Helmi, & Fran, F. (2019). Pewarnaan Simpul, Sisi, Wilayah Pada Graf Dan Penerapannya. *Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya*, *8*(4), 773–782.

Akbar, R. A., Dafik, D., & Prihandini, R. M. (2022). Pewarnaan Titik Ketakteraturan Lokal Refleksif pada Keluarga Graf Tangga. *Cgant Journal of Mathematics and Applications*, *3*(1).

Amri, Z., & Harahap, T. . (2017). 186-147-1-Pb. *Pelabelan Graceful, Skolem Graceful Dan Pelabelan Rho Topi Pada Graf 8 Bintang*, *0123048503*.

Bangkit, M. M. ., & Rahadjeng, B. (2022). Dekomposisi Graf Bintang, Graf Bintang Ganda, Dan Graf Sapu. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *10*(1), 218–225.

Damayanti, R. T. (2011). Automorfisme Graf Bintang dan Graf Lintasan. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni Dan Aplikasi*, *2*(1), 35–40.

Daswa, & Riyadi, M. (2017). Aplikasi Pewarnaan Graf Pada Masalah Penyusunan Jadwal Perkuliahan Di Universitas Kuningan. *JES-MAT (Jurnal Edukasi Dan Sains Matematika)*, *3*(2), 217.

English, S., & Zhang, P. (2017). On graceful colorings of trees. *Mathematica Bohemica*, *142*(1), 57–73.

Fatmawati, E. (2020). Monograf Sebagai Salah Satu Cara Publikasi Buku Dari Hasil Penelitian. *IQRA`: Jurnal Ilmu Perpustakaan Dan Informasi (e-Journal)*, *14*(1), 130.

Khoirunnisa, S., Dafik, Kristiana, A. I., Alfarisi, R., & Albirri, E. R. (2021). On graceful chromatic number of comb product of ladder graph. *Journal of Physics: Conference Series*, *1836*(1).

Kristiana, A. I., Anzori, Adawiyah, R., Slamin, & Albirri, E. R. (2023). *Graceful Chromatic Number on Grid Graph Family*. *8*(2).

Lembaga Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat. (2021). *Petunjuk Praktis Menulis Buku Monograf*. 1–5.

Masruro, Wisudaningsih, E. ., & Waluyo, E. (2023). Bilangan kromatik graceful pada subdivisi graf siklus comb graf star. *Kadikma*.

Panjaitan, D. J., & Aprilia, R. (2022). *TEORI GRAPH*.

Rahadi, A. P. (2019). Penjadwalan Mata Kuliah Menggunakan Pewarnaan Graf Dengan Algoritma Largest First. *Jurnal Padegogik Matematika*, *2*(1), 1–13.

Roza, I., Narwen, & Zulakmal. (2014). Graf Garis (Line Graph) dari Graf Siklus , Graf Lengkap, dan Graf Bintang. *Jurnal Matematika UNAND*, *3*(2), 1–4.

Rudi, M., Wahab, A., & Waluyo, E. (2023). *Pewarnaan graceful pada graf hasil operasi comb graf siklus dan graf star*.

Saleh, O. S. (2016). *Bahan Ajar Bahan Ajar Bahan Ajar*. *Mkb 7056*, 1–101.

Lampiran

Lampiran lembar validasi *E*-Monograf

e-mail: rismaasmiatul2001@gmail.com