

# CGANT

Journal of  
Mathematics  
and Applications



# EDITORIAL TEAM

## HONORARY EDITOR

Prof, Drs Dafik, M.Sc, Ph.D, University of Jember, Indonesia

## EDITOR IN CHIEF

Zainur Rasyid Ridlo, S.Pd, M.Pd, University of Jember, Indonesia

## MANAGING EDITORS

Dr. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., University of Jember, Indonesia  
Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd., University of Jember, Indonesia  
Ridho Alfarisi, S.Pd., M.Si., University of Jember, Indonesia  
Rafiantika Megahnia Prihandini, S.Pd., M.Si., University of Jember, Indonesia  
Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si., University of Jember, Indonesia

## GRAPHICAL EDITORS

Rosanita Nisviasari, S.Si., M.Si., University of Jember, Indonesia  
Ika Nur Maylisa, S.Pd., M.Pd., University of Jember, Indonesia

## LAYOUTING EDITORS

Elsa Yuli Kurniawati, S.Pd., M.Si., University of Jember, Indonesia  
Dwi Agustin Retno Wardani, S.Si., M.Si., University of Jember, Indonesia  
Rifki Ilham Baihaqi, S.Si, M.Mat, University of Jember, Indonesia

## VOL 2, NO 1 (2021)










## CGANT JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

DOI: <https://doi.org/10.25037/cgantjma.v2i1>

Available Online Since June 2021

## TABLE OF CONTENTS

## ARTICLES

<p><b>Pewarnaan Sisi <math>r</math>-Dinamis pada Graf Khusus dan Graf Operasi Sakel</b></p> <p> DOI : <a href="https://doi.org/10.25037/cgantjma.v2i1.47">10.25037/cgantjma.v2i1.47</a>    Abstract views : 117 times</p> <p><i>Viqedina Rizky Noviyanti, Kusbudiono Kusbudiono, Ika Hesti Agustin, Dafik Dafik</i></p>	PDF 
<p><b>Metric Dimension dan Non-Isolated Resolving Number pada Beberapa Graf</b></p> <p> DOI : <a href="https://doi.org/10.25037/cgantjma.v2i1.48">10.25037/cgantjma.v2i1.48</a>    Abstract views : 94 times</p> <p><i>Wahyu Nikmatu Sholihah, Dafik Dafik, Kusbudiono Kusbudiono</i></p>	PDF 
<p><b>Pewarnaan Ketakteraturan Lokal Inklusif pada Keluarga Graf Pohon Tree</b></p> <p> DOI : <a href="https://doi.org/10.25037/cgantjma.v2i1.49">10.25037/cgantjma.v2i1.49</a>    Abstract views : 125 times</p> <p><i>Umi Azizah Anwar, Arika Indah Kristiana, Arif Fatahillah, Dafik Dafik, Ridho Alfarisi</i></p>	PDF 
<p><b>Analisa Antimagicness Super dari Shackle Graf Parasut dan Aplikasinya pada Polyalphabetic Cipher</b></p> <p> DOI : <a href="https://doi.org/10.25037/cgantjma.v2i1.50">10.25037/cgantjma.v2i1.50</a>    Abstract views : 87 times</p> <p><i>Riza Nurfadila, Ika Hesti Agustin, Kusbudiono Kusbudiono</i></p>	PDF 
<p><b>Analisa Pewarnaan Total <math>r</math>-Dinamis pada Graf Lintasan dan Graf Hasil Operasi</b></p> <p> DOI : <a href="https://doi.org/10.25037/cgantjma.v2i1.51">10.25037/cgantjma.v2i1.51</a>    Abstract views : 107 times</p> <p><i>Desi Febriani Putri, Dafik Dafik, Kusbudiono Kusbudiono</i></p>	PDF 
<p><b>Analisa Antimagic Total Covering Super pada Eksponensial Graf Khusus dan Aplikasinya dalam Mengembangkan Chipertext</b></p> <p> DOI : <a href="https://doi.org/10.25037/cgantjma.v2i1.52">10.25037/cgantjma.v2i1.52</a>    Abstract views : 92 times</p> <p><i>Hani'ah Zakin, Ika Hesti Agustin, Kusbudiono Kusbudiono, Dafik Dafik</i></p>	PDF 
<p><b>Analisis Rainbow Vertex Connection pada Beberapa Graf Khusus dan Operasinya</b></p> <p> DOI : <a href="https://doi.org/10.25037/cgantjma.v2i1.53">10.25037/cgantjma.v2i1.53</a>    Abstract views : 72 times</p> <p><i>Ida Ariska, Dafik Dafik, Ika Hesti Agustin</i></p>	PDF 
<p><b>Konstruksi Rak Penataan Gelas Air Minum Menggunakan Hasil Deformasi Benda-Benda Geometri dan Kurva Bezier</b></p> <p> DOI : <a href="https://doi.org/10.25037/cgantjma.v2i1.54">10.25037/cgantjma.v2i1.54</a>    Abstract views : 70 times</p> <p><i>Hikmah Ardiantika Sari, Bagus Juliyanto, Firdaus Ubaidillah</i></p>	

## Analisa Pewarnaan Total $r$ -Dinamis pada Graf Lintasan dan Graf Hasil Operasi

Desi Febriani Putri<sup>1,2</sup>, Dafik<sup>1,3</sup>, Kusbudiono<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>CGANT - Universitas Jember

<sup>2</sup>Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember

<sup>3</sup>Program Studi Matematika FKIP Universitas Jember

desifebriani.putri@yahoo.com, d.dafik@unej.ac.id, Kusbudiono@unej.ac.id

### Abstract

Graph coloring began to be developed into coloring dynamic. One of the developments of dynamic coloring is  $r$ -dynamic total coloring. Suppose  $G = (V(G), E(G))$  is a non-trivial connected graph. Total coloring is defined as  $c : (V(G) \cup E(G)) \rightarrow 1, 2, \dots, k, k \in \mathbb{N}$ , with condition two adjacent vertices and the edge that is adjacent to the vertex must have a different color.  $r$ -dynamic total coloring defined as the mapping of the function  $c$  from the set of vertices and edges  $(V(G) \cup E(G))$  such that for every vertex  $v \in V(G)$  satisfy  $|c(N(v))| = \min[r, d(v) + |N(v)|]$ , and for each edge  $e = uv \in E(G)$  satisfy  $|c(N(e))| = \min[r, d(u) + d(v)]$ . The minimal  $k$  of color is called  $r$ -dynamic total chromatic number denoted by  $\chi''(G)$ . The 1-dynamic total chromatic number is denoted by  $\chi''(G)$ , chromatic number 2-dynamic denoted with  $\chi''_d(G)$  and  $r$ -dynamic chromatic number denoted by  $\chi''_r(G)$ . The graph that used in this research are path graph, *shackle* of book graph (*shack*( $B_2, v, n$ )) and *generalized shackle* of graph *friendship* *gshack*( $\mathbf{F}_4, e, n$ ).

**Keywords :**  $r$ -dynamic total coloring,  $r$ -dynamic total chromatic number, path graph, graph operation

Mathematics Subject Classification: 05C15

### Pendahuluan

Sebuah graf  $G$  merupakan pasangan himpunan  $(V(G), E(G))$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan  $E(G)$  adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut  $(u, v)$  yang disebut sisi [5]. Sebuah graf  $G$  dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi harus memiliki titik minimal satu. Sebuah graf yang tidak memiliki sisi tetapi memiliki sebuah titik saja disebut dengan graf trivial [3]. Banyaknya titik pada suatu graf disebut kardinalitas titik dinotasikan dengan  $|V|$  sedangkan banyaknya sisi pada suatu graf disebut kardinalitas sisi dinotasikan dengan  $|E|$  [4]. Salah satu kajian dalam teori graf adalah pewarnaan graf. Pewarnaan graf merupakan suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur graf (titik dan sisi) ke suatu sembarang himpunan. Jika daerah asal adalah sebuah sisi disebut dengan pewarnaan sisi. Jika daerah asal adalah titik maka disebut dengan pewarnaan titik. Jika daerah asal titik dan sisi disebut pewarnaan total. Pewarnaan total adalah pemetaan fungsi  $c$  dari  $(V(G), E(G))$  ke himpunan warna sedemikian hingga untuk setiap dua titik yang bertetangga, dan setiap dua sisi yang bertetangga serta setiap titik yang bersisian dengan sembarang sisi memiliki warna yang berbeda. Penggunaan warna yang minimum disebut dengan bilangan kromatik, dan selalu memenuhi

Hipotesis 1 sebagai berikut:

**Hipotesis 1.** Menurut Behzad dan Vizing bilangan kromatik total untuk setiap graf  $G$  harus memenuhi  $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$  [2]

Salah satu kajian dalam teori graf adalah pewarnaan total  $r$ -dinamis yang dikembangkan dari pewarnaan titik dan sisi  $r$ -dinamis. Pewarnaan  $k$ -warna total  $r$ -dinamis merupakan pewarnaan total untuk setiap  $v \in V(G)$  sedemikian sehingga  $|c(N(v))| \geq \min[r, d(v) + |N(v)|]$ , dan setiap sisi  $e = uv \in E(G)$  sedemikian sehingga  $|c(N(e))| \geq \min[r, d(v) + d(u)]$  dimana  $N(v)$  merupakan ketetanggaan dari  $v$  dan  $c(N(v))$  merupakan warna yang digunakan oleh titik ketetanggaan dari  $v$  serta  $N(e)$  merupakan ketetanggaan dari sisi  $e$  dan  $c(N(e))$  merupakan warna yang digunakan oleh sisi ketetanggaan dari sisi  $e$ . Nilai  $k$  yang minimal sehingga graf  $G$  memenuhi pewarnaan  $k$ -warna total  $r$ -dinamis disebut dengan bilangan kromatik total  $r$ -dinamis yang dinotasikan dengan  $\chi''(G)$ . Berikut beberapa definisi operasi graf yang dipakai dalam penelitian ini.

**Definisi 1.** Shackle dari graf  $H$  dinotasikan dengan  $G = shack(H, v, n)$  adalah graf  $G$  yang dibangun dari graf non trivial  $H_1, H_2, \dots, H_n$  sedemikian hingga untuk setiap  $1 \leq s, t \leq n$ ,  $H_s$  dan  $H_t$  tidak memiliki titik penghubung dimana  $|s - t| \geq 2$  dan untuk setiap  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $H_i$  dan  $H_{i+1}$  memiliki tepat satu titik bersama  $v$ , disebut dengan titik penghubung dan  $k - 1$  titik penghubung tersebut adalah berbeda. Jika  $G = shack(H, v, n)$  titik penghubung digantikan dengan subgraf  $K \subset H$  disebut dengan generalized shackle, dan dinotasikan dengan  $G = gshack(H, K \subset H, n)$  [1].

## Hasil Penelitian

Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah definisi dan teorema baru terkait pewarnaan total  $r$ -dinamis. Definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis dapat dilihat pada Definisi 2. Teorema tersebut tentang pewarnaan total  $r$ -dinamis pada graf lintasan, shackle graf buku ( $shack(B_2, v, n)$ ) dan graf operasi generalized shackle graf friendship  $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$ .

**Definisi 2.** Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi pada  $G$  ke himpunan warna. Pewarnaan total  $r$ -dinamis pada suatu graf  $G$  didefinisikan sebagai pemetaan  $c$  dari  $(V(G) \cup E(G))$  ke  $D$  sedemikian hingga memenuhi kondisi berikut :

1.  $\forall v \in V(G), |c(N(v))| \geq \min[r, d(v) + |N(v)|]$  dan
2.  $\forall e = uv \in E(G), |c(N(e))| \geq \min[r, d(v) + d(u)]$

**Observasi 1.** Misalkan  $\Delta(G)$  adalah derajat maksimum dari graf  $G$  maka berlaku  $\chi''(G) \leq \chi''_d(G) \leq \chi''_3(G) \leq \dots \leq \chi''_{\Delta(G)}(G)$ .

**Teorema 1.** Misal  $G$  adalah suatu graf lintasan  $P_n$ . Untuk  $n \geq 3$ , bilangan kromatik total  $r$ -dinamis pada graf  $G$  adalah

$$\chi''_r(P_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 2 \\ 4, & \text{untuk } r = 3 \\ 5, & \text{untuk } r \geq 4 \end{cases}$$

**Bukti.** Berdasarkan Observasi 4.1.2 himpunan titik dan himpunan sisi dari graf lintasan untuk  $n \geq 3$  adalah  $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan  $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ , sehingga  $|V(P_n)| = n$  dan  $|E(P_n)| = n - 1$  serta  $\Delta(G) = 2$ .

**Kasus 1.** Berdasarkan Dugaan 1 bahwa  $\Delta(G) + 1 \leq \chi''_r(G) \leq \Delta(G) + 2$ , sehingga  $\chi''(P_n) \geq 3$ . Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 1, 2-dinamis dari graf lintasan  $(P_n)$  adalah 3, maka perlu dibuktikan  $\chi''(P_n) \geq 3$  dan  $\chi''(P_n) \leq 3$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi''(P_n) \leq 3$  dengan fungsi pewarnaan  $c_1$ . Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_1$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_1 : (V(P_n) \cup E(P_n)) \rightarrow D$ . Untuk  $n \geq 3$ , fungsi pewarnaan  $c_1$  adalah sebagai berikut:

$$c_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i) = \begin{cases} 132 \dots 132, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 132 \dots 132 1, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 132 \dots 132 13, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

$$c_1(x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, \dots, x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 213 \dots 213, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 213 \dots 213 2, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 213 \dots 213 21, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_1$  terlihat bahwa bilangan kromatik total pada graf lintasan adalah  $\chi''(P_n) \leq 3$ . Karena  $\chi''(P_n) \leq 3$  dan  $\chi''(P_n) \geq 3$  maka  $\chi''(P_n) = 3$ , sehingga  $\chi''(P_n) = \chi''_d(P_n) = 3$  untuk  $n \geq 3$ .

**Kasus 2.** Berdasarkan Observasi 1 bahwa  $\chi''_3(G) \geq \chi''_2(G)$ , maka  $\chi''_3(P_n) \geq \chi''_d(P_n) = 3$ . Misal  $\chi''_3(P_n) = 3$  seperti pada fungsi pewarnaan  $c_1$ , maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis, lihat tabel 1. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 4-pewarnaan,  $\chi''_3(P_n) \geq 4$ . Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 3-

Table 1: Pewarnaan Titik  $x_i$  pada Pewarnaan Total 1, 2-dinamis graf  $P_6$

$i$	$c(x_i)$	$ c(N(x_i)) $	$r$	$d(x_i) +  N(x_i) $	$\min\{r, d(x_i) +  N(x_i) \}$	$ c(N(x_i))  \geq \min\{r, d(x_i) +  N(x_i) \}$
1	1	2	1,2,3	2	1,2,2	<b>Y,Y,Y</b>
2	3	2	1,2,3	4	1,2,3	<b>Y,Y,T</b>
3	2	2	1,2	4	1,2	<b>Y,Y</b>
4	1	2	1,2	4	1,2	<b>Y,Y</b>
5	3	2	1,2	4	1,2	<b>Y,Y</b>
6	2	2	1,2	2	1,2	<b>Y,Y</b>

dinamis dari graf lintasan  $(P_n)$  adalah 4, maka perlu dibuktikan  $\chi''_3(P_n) \geq 4$  dan  $\chi''_3(P_n) \leq 4$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi''_3(P_n) \leq 4$  dengan fungsi pewarnaan  $c_2$ . Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_2$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_2 : (V(P_n) \cup$

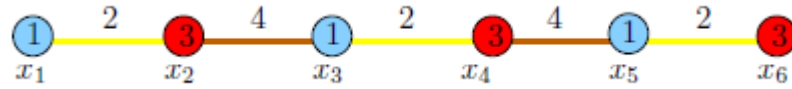


Figure 1: Pewarnaan total 3-dinamis Pada graf lintasan ( $P_n$ )

$E(P_n) \rightarrow D$ . Untuk  $n \geq 3$ , fungsi pewarnaan  $c_2$  adalah sebagai berikut:

$$c_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i) = \begin{cases} 13 \dots 13, & 1 \leq i \leq n, n \text{ genap} \\ 13 \dots 13 1, & 1 \leq i \leq n, n \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c_2(x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_ix_{i+1}) = \begin{cases} 24 \dots 24, & 1 \leq i \leq n, n \text{ ganjil} \\ 24 \dots 24 2, & 1 \leq i \leq n, n \text{ genap} \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_2$  terlihat bahwa bilangan kromatik total 3-dinamis adalah  $\chi_3''(P_n) \leq 4$ . Karena  $\chi_3''(P_n) \leq 4$  dan  $\chi_3''(P_n) \geq 4$  maka  $\chi_3''(P_n) = 4$  sehingga  $\chi_3''(P_n) = 4$  untuk  $n \geq 3$ . Sebagai ilustrasi, disajikan Figure 2 yang merupakan pewarnaan 3-dinamis dari graf lintasan ( $P_n$ ).

**Kasus 3.** Berdasarkan Observasi 1 bahwa  $\chi_4''(G) \geq \chi_3''(G)$ , maka  $\chi_4''(P_n) \geq \chi_3''(P_n) = 4$ . Misal  $\chi_3''(P_n) = 4$  seperti pada fungsi pewarnaan  $c_2$ , maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis, lihat tabel 2. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 5-pewarnaan,  $\chi_4''(P_n) \geq 5$ . Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 4-

Table 2: Pewarnaan Titik  $x_i$  pada Pewarnaan Total 3-dinamis graf  $P_6$

$i$	$c(x_i)$	$ c(N(x_i)) $	$r$	$d(x_i) +  N(x_i) $	$\min\{r, d(x_i) +  N(x_i) \}$	$ c(N(x_i))  \geq \min\{r, d(x_i) +  N(x_i) \}$
1	1	2	3,4	2	2,2	<b>Y,Y</b>
2	3	3	3,4	4	3,4	<b>Y,T</b>
3	1	3	3	4	3	<b>Y</b>
4	3	3	3	4	3	<b>Y</b>
5	1	3	3	4	3	<b>Y</b>
6	3	2	3	2	3	<b>Y</b>

dinamis dari graf lintasan ( $P_n$ ) adalah 5, maka perlu dibuktikan  $\chi_4''(P_n) \geq 5$  dan  $\chi_4''(P_n) \leq 5$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi_4''(P_n) \leq 5$  dengan fungsi pewarnaan  $c_3$ . Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_3$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_3 : (V(P_n) \cup E(P_n)) \rightarrow D$ . Untuk  $n \geq 3$ , fungsi pewarnaan  $c_3$  adalah sebagai berikut:

$$c_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i) = \begin{cases} 13524 \dots 13524, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 0 \pmod{3} \\ 13524 \dots 13524 1, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 1 \pmod{3} \\ 13524 \dots 13524 13, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 2 \pmod{3} \\ 13524 \dots 13524 135, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 3 \pmod{3} \\ 13524 \dots 13524 1352, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 4 \pmod{3} \end{cases}$$

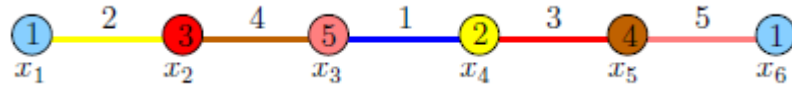


Figure 2: Pewarnaan total  $r$ -dinamis Pada graf lintasan ( $P_n$ )

$$c_3(x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_ix_{i+1}) = \begin{cases} 24135 \dots 24135, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 24135 \dots 24135 2, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ 24135 \dots 24135 24, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 3(\text{mod } 3) \\ 24135 \dots 24135 241, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 4(\text{mod } 3) \\ 24135 \dots 24135 2413, & 1 \leq i \leq n, i \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_3$  terlihat bahwa bilangan kromatik total 4-dinamis adalah  $\chi''_4(P_n) \leq 5$ . Karena  $\chi''_4(P_n) \leq 5$  dan  $\chi''_4(P_n) \geq 5$  maka dapat disimpulkan  $\chi''_4(P_n) = 5$  sehingga bilangan kromatik total  $\chi''_4(P_n) = 5$ .

Pada graf lintasan  $P_n$ , jika ditinjau dari pewarnaan titiknya, nilai dari  $\min\{r, \max\{d(x_1) + |(N(x_i))|\}\} = \max\{d(x_1) + |(N(x_i))|\} = 4$ . jika ditinjau dari pewarnaan sisi pada graf lintasan  $P_n$ , nilai dari  $\min\{r, \max\{d(u) + d(v)\}\} = \max\{d(u) + d(v)\} = 4$ , sehingga mengakibatkan  $\chi''_{r \geq 4}(P_n) = 5$ . Sebagai ilustrasi, disajikan Figure 2 yang merupakan pewarnaan 4-dinamis dari graf lintasan ( $P_n$ ). Berdasarkan uraian diatas, maka Teorema 1 terbukti.

**Teorema 2.** Misal graf  $G$  adalah graf hasil operasi shackle dari graf buku  $B_2$ . Untuk  $n \geq 2$ , bilangan kromatik total  $r$ -dinamis shackle graf buku  $Shack(B_2, v, n)$  adalah

$$\chi''_r(Shack(B_2, v, n)) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 3 \\ 6, & \text{untuk } r = 4 \\ 9, & \text{untuk } r = 5 \\ 10, & \text{untuk } r \geq 6 \end{cases}$$

**Bukti.** Berdasarkan Observasi 4.1.7 himpunan titik graf  $V(Shack(B_2, v, n)) = \{x_{ij}, z_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n+1\}$  dan himpunan sisi  $E(Shack(B_2, v, n)) = \{x_{ij}y_i; 1 \leq i \leq n, j = 1\} \cup \{x_{ij}y_{i+1}; 1 \leq i \leq n, j = 2\} \cup \{x_{ij}z_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, j = 1\} \cup \{x_{i+1}z_{ij}; 1 \leq i \leq n, j = 1\} \cup \{y_i z_{ij}; 1 \leq i \leq n, j = 1\} \cup \{y_{i+1} z_{ij}; 1 \leq i \leq n, j = 2\} \cup \{z_{ij} z_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, j = 1\}$  sehingga kardinalitas titik dan sisinya adalah  $|V(Shack(B_2, v, n))| = 5n + 1$  dan  $|E(Shack(B_2, v, n))| = 7n$  serta  $\Delta(G) = 4$ .

**Kasus 1.** Berdasarkan Dugaan 1 bahwa  $\Delta(G) + 1 \leq \chi''_r(G) \leq \Delta(G) + 2$ , sehingga  $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \geq 5$ . Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 1,2,3-dinamis pada graf ( $Shack(B_2, v, n)$ ) adalah 5, maka perlu dibuktikan  $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \geq 5$  dan  $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \leq 5$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \leq 5$  dengan fungsi pewarnaan  $c_4$ . Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_4$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_4 : (V(Shack(B_2, v, n)) \cup E(Shack(B_2, v, n))) \rightarrow D$ . Fungsi pewarnaan  $c_4$  adalah sebagai berikut:

$$c_4(x_{ij}) = \begin{cases} 4, & 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 5, & 1 \leq i \leq n, j = 2 \end{cases} \quad c_4(z_{ij}) = \begin{cases} 3, & 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 2, & 1 \leq i \leq n, j = 2 \end{cases}$$

$$c_4(y_i) = 1, 1 \leq i \leq n + 1; \quad c_{23}(x_{ij}y_i) = 3, 1 \leq i \leq n, j = 1$$



$$c_4(x_{ij}y_{i+1}) = 3, 1 \leq i \leq n, j = 2; \quad c_4(y_i z_{ij}) = 5, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_4(y_{i+1}z_{ij}) = 4, 1 \leq i \leq n, j = 2; \quad c_4(x_{ij}z_{ij+1}) = 2, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_4(x_{ij+1}z_{ij}) = 3, 1 \leq i \leq n, j = 1; \quad c_4(z_{ij}z_{ij+1}) = 1, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_4$  terlihat bahwa bilangan kromatik total dari *shackle* graf buku ( $Shack(B_2, v, n)$ ) adalah  $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \leq 5$ . Karena bilangan kromatik  $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \leq 5$  dan  $\chi''(Shack(B_2, v, n)) \geq 5$  maka dapat disimpulkan  $\chi''(Shack(B_2, v, n)) = 5$ . Sehingga graf  $G = Shack(B_2, v, n)$  mempunyai bilangan kromatik  $\chi''(G) = \chi''_d(G) = \chi''_3(G) = 5$ .

**Kasus 2.** Berdasarkan Observasi 1 bahwa  $\chi''_4(G) \geq \chi''_3(G)$ , dapat disimpulkan  $\chi''_4(Shack(B_2, v, n)) \geq \chi''_3(Shack(B_2, v, n))$ . Misalkan  $\chi''_4(Shack(B_2, v, n)) = 5$  seperti pada fungsi pewarnaan  $c_4$ , maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis, lihat tabel 3. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 6-pewarnaan,  $\chi''_4(Shack(B_2, v, n)) \geq 6$ .

Table 3: Pewarnaan Titik  $z_{ij}$  pada 1, 2, 3-dinamis graf  $Shack(B_2, v, n)$

$ij$	$c(z_{ij})$	$ c(N(z_{ij})) $	$r$	$d(z_{ij}) +  N(z_{ij}) $	$\min\{r, d(z_{ij}) +  N(z_{ij}) \}$	$ c(N(z_{ij}))  \geq \min\{r, d(z_{ij}) +  N(z_{ij}) \}$
11	2	3	1,2,3,4	6	1,2,3,4	<b>Y,Y,Y,T</b>
12	3	3	1,2,3	6	1,2,3	<b>Y,Y,Y</b>
21	2	3	1,2,3	6	1,2,3	<b>Y,Y,Y</b>
22	3	3	1,2,3	6	1,2,3	<b>Y,Y,Y</b>
31	2	3	1,2,3	6	1,2,3	<b>Y,Y,Y</b>
32	3	3	1,2,3	6	1,2,3	<b>Y,Y,Y</b>

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 4-dinamis pada graf ( $Shack(B_2, v, n)$ ) adalah 6, perlu dibuktikan bahwa  $\chi''_4(Shack(B_2, v, n)) \geq 6$  dan  $\chi''_4(Shack(B_2, v, n)) \leq 6$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi''_4(Shack(B_2, v, n)) \leq 6$  dengan fungsi pewarnaan  $c_5$ . Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_5$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_5 : V(Shack(B_2, v, n)) \cup E(Shack(B_2, v, n)) \rightarrow D$ . Fungsi pewarnaan  $c_5$  adalah sebagai berikut:

$$c_5(x_{ij}) = \begin{cases} 6, & 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 3, & 1 \leq i \leq n, j = 2 \end{cases} \quad c_5(z_{ij}) = \begin{cases} 4, & 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 5, & 1 \leq i \leq n, j = 2 \end{cases}$$

$$c_5(y_i) = 1, 1 \leq i \leq n + 1; \quad c_{24}(x_{ij}y_i) = 2, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_5(x_{ij}y_{i+1}) = 6, 1 \leq i \leq n, j = 2; \quad c_5(y_i z_{ij}) = 5, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_5(y_{i+1}z_{ij}) = 4, 1 \leq i \leq n, j = 2; \quad c_5(x_{ij}z_{ij+1}) = 3, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_5(x_{ij+1}z_{ij}) = 2, 1 \leq i \leq n, j = 1; \quad c_5(z_{ij}z_{ij+1}) = 6, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

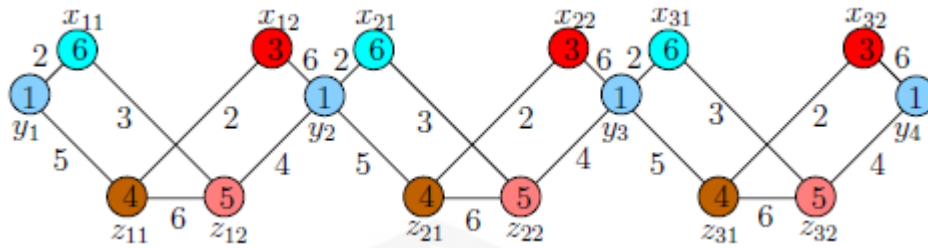


Figure 3: Pewarnaan Total 4-dinamis Pada Graf  $Shack(B_2, v, n)$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_5$  terlihat bahwa bilangan kromatik total dari *shackle* graf buku,  $G = (Shack(B_2, v, n))$  adalah  $\chi_4''(G) \leq 6$ . Karena  $\chi_4''(G) \leq 6$  dan  $\chi_4''(G) \geq 6$  maka  $\chi_4''(G) = 6$  sehingga bilangan kromatik  $\chi_4''(G) = 6$ . Sebagai ilustrasi, disajikan Gambar 4.24 yang merupakan pewarnaan 4-dinamis dari *shackle* graf buku  $B_2$ .

**Kasus 3.** Berdasarkan Observasi 1 bahwa  $\chi_5''(G) \geq \chi_4''(G)$ , dapat disimpulkan  $\chi_5''(Shack(B_2, v, n)) \geq \chi_4''(Shack(B_2, v, n))$ . Misalkan  $\chi_5''(Shack(B_2, v, n)) = 6$  seperti pada fungsi pewarnaan  $c_5$ , maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 7-pewarnaan, sehingga  $\chi_5''(Shack(B_2, v, n)) \geq 7$ . Akan tetapi dengan 7 pewarnaan tetap tidak memenuhi pewarnaan total 5-dinamis sehingga ditambah menjadi 8 pewarnaan. Untuk 8 pewarnaan terdapat jumlah sisi yang tidak memenuhi definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis lihat tabel 4 maka ditambah menjadi 9 pewarnaan sehingga  $\chi_5''(Shack(B_2, v, n)) \geq 9$ .

Table 4: Pewarnaan Sisi dengan 8 warna pada graf  $Shack(B_2, v, n)$

$e = uv$	$c(e)$	$ c(N(e)) $	$r$	$d(u) + d(v)$	$\min\{r, d(u) + d(v)\}$	$ c(N(e))  \geq \min\{r, d(u) + d(v)\}$
$x_{11}y_1$	2	4	4,5	4	4,4	<b>Y,Y</b>
$x_{21}y_2$	2	5	4,5	6	4,5	<b>Y,Y</b>
$x_{12}y_2$	4	5	4,5	6	4,5	<b>Y,Y</b>
$x_{22}y_3$	4	4	4,5	4	4,4	<b>Y,Y</b>
$x_{11}z_{12}$	4	5	4,5	5	4,5	<b>Y,Y</b>
$x_{21}z_{22}$	4	5	4,5	5	4,5	<b>Y,Y</b>
$x_{12}z_{11}$	3	5	4,5	5	4,5	<b>Y,Y</b>
$x_{22}z_{21}$	3	5	4,5	5	4,5	<b>Y,Y</b>
$y_1z_{11}$	5	5	4,5	5	4,5	<b>Y,Y</b>
$y_2z_{21}$	5	6	4,5	7	4,5	<b>Y,Y</b>
$y_2z_{12}$	6	6	4,5	7	4,5	<b>Y,Y</b>
$y_3z_{22}$	6	4	4,5	5	4,5	<b>Y,T</b>
$z_{11}z_{12}$	7	5	4	6	4	<b>Y</b>
$z_{21}z_{22}$	7	5	4	6	4	<b>Y</b>

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 5-dinamis pada graf  $Shack(B_2, v, n)$  adalah 9, maka perlu dibuktikan  $\chi_5''(Shack(B_2, v, n)) \geq 9$  dan  $\chi_5''(Shack(B_2, v, n)) \leq 9$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi_5''(Shack(B_2, v, n)) \leq 9$  dengan

fungsi pewarnaan  $c_6$ . Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_6$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_6 : (V(Shack(B_2, v, n)) \cup E(Shack(B_2, v, n))) \rightarrow D$ . Untuk  $n \geq 2$ , fungsi pewarnaan  $c_6$  adalah sebagai berikut:

$$c_6(x_{ij}) = \begin{cases} 4, & 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 3, & 1 \leq i \leq n, j = 2 \end{cases} \quad c_6(z_{ij}) = \begin{cases} 6, & 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 2, & 1 \leq i \leq n, j = 2 \end{cases}$$

$$c_6(y_i) = 1, 1 \leq i \leq n + 1; \quad c_6(x_{ij}y_i) = 8, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_6(x_{ij}y_{i+1}) = 9, 1 \leq i \leq n, j = 2; \quad c_6(y_i z_{ij}) = 2, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_6(y_{i+1} z_{ij}) = 5, 1 \leq i \leq n, j = 2; \quad c_6(x_{ij} z_{ij+1}) = 3, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_6(x_{i+1} z_{ij}) = 4, 1 \leq i \leq n, j = 1; \quad c_6(z_{ij} z_{ij+1}) = 7, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_6$  terlihat bahwa bilangan kromatik total dari *shackle* graf buku,  $G = (Shack(B_2, v, n))$  adalah  $\chi_5''(G) \leq 9$ . Karena  $\chi_5''(G) \leq 9$  dan  $\chi_5''(G) \geq 9$  maka  $\chi_5''(G) = 9$  sehingga bilangan kromatik  $\chi_5''(G) = 9$ .

**Kasus 4.** Berdasarkan Observasi 1 bahwa  $\chi_6''(G) \geq \chi_5''(G)$ , dapat disimpulkan  $\chi_6''(Shack(B_2, v, n)) \geq \chi_5''(Shack(B_2, v, n))$ . Misalkan  $\chi_6''(Shack(B_2, v, n)) = 9$  seperti pada fungsi pewarnaan  $c_6$ , maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis lihat tabel 5. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 10-pewarnaan,  $\chi_6''(Shack(B_2, v, n)) \geq 10$ .

Table 5: Pewarnaan Titik  $z_{ij}$  pada Pewarnaan Total 6-dinamis graf  $Shack(B_2, v, n)$

$ij$	$c(z_{ij})$	$ c(N(z_{ij})) $	$r$	$d(z_{ij}) +  N(z_{ij}) $	$\min\{r, d(z_{ij}) +  N(z_{ij}) \}$	$ c(N(z_{ij}))  \geq \min\{r, d(z_{ij}) +  N(z_{ij}) \}$
11	6	5	5,6	6	5,6	<b>Y,T</b>
12	2	6	5	6	5	<b>Y</b>
21	6	5	5	6	5	<b>Y</b>
22	2	6	5	6	5	<b>Y</b>
31	6	5	5	6	5	<b>Y</b>
32	2	6	5	6	5	<b>Y</b>

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 6-dinamis pada graf  $Shack(B_2, v, n)$  adalah 10, maka perlu dibuktikan  $\chi_6''(Shack(B_2, v, n)) \geq 10$  dan  $\chi_6''(Shack(B_2, v, n)) \leq 10$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi_6''(Shack(B_2, v, n)) \leq 10$  dengan fungsi pewarnaan  $c_7$ . Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_7$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_7 : (V(Shack(B_2, v, n)) \cup E(Shack(B_2, v, n))) \rightarrow D$ . Fungsi pewarnaan  $c_7$  adalah sebagai berikut:

$$c_7(x_{ij}) = \begin{cases} 4, & 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 3, & 1 \leq i \leq n, j = 2 \end{cases} \quad c_7(z_{ij}) = \begin{cases} 6, & 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 8, & 1 \leq i \leq n, j = 2 \end{cases}$$

$$c_7(y_i) = 1, 1 \leq i \leq n + 1 \quad c_7(x_{ij}y_i) = 9, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

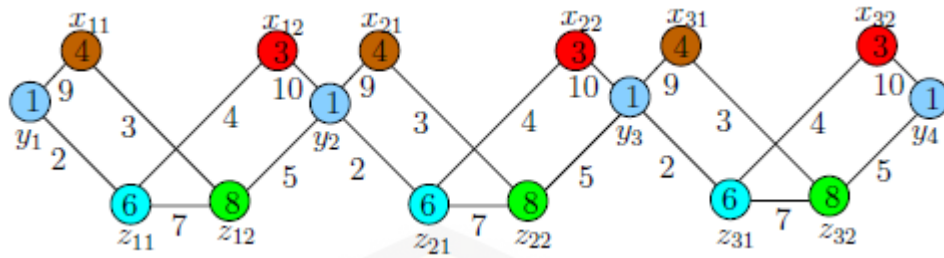


Figure 4: Pewarnaan Total  $r$ -dinamis Pada Graf  $Shack(B_2, v, n)$

$$c_7(x_{ij}y_{i+1}) = 10, 1 \leq i \leq n, j = 2$$

$$c_7(y_i z_{ij}) = 2, 1 \leq i \leq n, j = 1 \quad c_7(y_{i+1} z_{ij}) = 5, 1 \leq i \leq n, j = 2$$

$$c_7(x_{ij} z_{ij+1}) = 3, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_7(x_{i,j+1} z_{ij}) = 4, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

$$c_7(z_{ij} z_{ij+1}) = 7, 1 \leq i \leq n, j = 1$$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_7$  terlihat bahwa bilangan kromatik total dari *shackle* graf buku  $B_2$  adalah  $\chi_6''(G) \leq 10$ . Karena  $\chi_6''(G) \leq 10$  dan  $\chi_6''(G) \geq 10$  maka  $\chi_6''(G) = 10$  sehingga  $\chi_6''(G) = 10$ . Sebagai ilustrasi, disajikan Figure 4 yang merupakan pewarnaan  $r$ -dinamis dari *shackle* graf buku  $B_2$ .

Pada graf hasil operasi *shackle* graf buku  $B_2$ , jika ditinjau dari pewarnaan titiknya, nilai dari  $\min\{r, \max\{d(v) + |(N(v))|\}\} = \max\{d(z_{ij}) + |(N(z_{ij}))|\} = 8$ . Untuk pewarnaan sisi pada graf hasil operasi *shackle* graf buku  $B_2$ , nilai dari  $\min\{r, \max\{d(u) + d(v)\}\} = \max\{d(u) + d(v)\} = 7$ , sehingga mengakibatkan  $\chi_{r \geq 6}''(Shack(B_2, v, n)) = 10$ . Hal ini disebabkan pada saat  $r \geq 6$  nilai  $\min\{r, \max\{d(v) + |(N(v))|\}\} = \max\{d(z_{ij}) + |(N(z_{ij}))|\} = 6$  dan nilai  $\min\{r, \max\{d(u) + d(v)\}\} = \max\{d(u) + d(v)\} = 7$ . Berdasarkan uraian diatas, maka Teorema 2 terbukti.

**Teorema 3.** Misal graf  $G$  adalah graf hasil operasi *generalized shackle* dari graf *friendship*  $\mathbf{F}_4$ . Untuk  $n \geq 2$ , bilangan kromatik total  $r$ -dinamis *generalized shackle* graf buku *friendship*  $\mathbf{F}_4$  adalah

$$\chi_r''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \begin{cases} 9, & \text{untuk } 1 \leq r \leq 5 \\ 10, & \text{untuk } 6 \leq r \leq 8 \\ 11 & \text{untuk } r = 9 \\ 12, & \text{untuk } r = 10 \\ 16, & \text{untuk } 11 \leq r \leq 15 \\ 17, & \text{untuk } r \geq 16 \end{cases}$$

**Bukti.** Berdasarkan Observasi 4.1.8 himpunan titik graf  $V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4\} \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i, z_i; 1 \leq i \leq n + 1\}$  dan himpunan sisi  $E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \{x_{ij}x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, j = 1, 3\} \cup \{x_i x_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i z_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq n + 1\}$  sehingga  $|V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))| = 7n + 2$  dan  $|E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))| = 11n + 1$  serta  $\Delta(G) = 8$ .

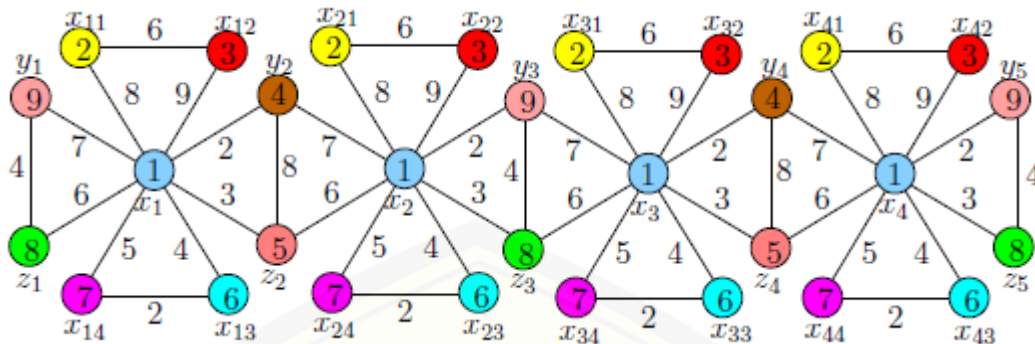


Figure 5: Pewarnaan Total 1,2,3,4,5-dinamis pada Graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, 4)$

**Kasus 1.** Berdasarkan Dugaan 1 bahwa  $\Delta(G) + 1 \leq \chi_r''(G) \leq \Delta(G) + 2$ , sehingga  $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 9$ . Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total  $r$ -dinamis dimana  $1 \leq r \leq 5$  pada graf  $(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$  adalah 9, maka perlu dibuktikan  $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 9$  dan  $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 9$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 9$  dengan fungsi pewarnaan  $c_8$ . Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_8$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_8 : (V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \cup E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ . Fungsi pewarnaan  $c_8$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 c_8(x_i) &= 1, 1 \leq i \leq n & c_8(x_i y_i) &= 7, 1 \leq i \leq n \\
 c_8(x_i y_{i+1}) &= 2, 1 \leq i \leq n; & c_8(x_i z_i) &= 6, 1 \leq i \leq n \\
 c_8(x_i z_{i+1}) &= 3, 1 \leq i \leq n \\
 c_8(y_i) &= \begin{cases} 9, 1 \leq i \leq n+1, i \text{ ganjil} \\ 4, 1 \leq i \leq n+1, i \text{ genap} \end{cases} & c_8(z_i) &= \begin{cases} 8, 1 \leq i \leq n+1, i \text{ ganjil} \\ 5, 1 \leq i \leq n+1, i \text{ genap} \end{cases} \\
 c_8(x_{ij} x_{ij+1}) &= \begin{cases} 6, 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 2, 1 \leq i \leq n, j = 3 \end{cases} & c_8(y_i z_i) &= \begin{cases} 4, 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 8, 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} \\
 c_8(x_{ij}) &= \begin{cases} 2, 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 3, 1 \leq i \leq n, j = 2 \\ 6, 1 \leq i \leq n, j = 3 \\ 7, 1 \leq i \leq n, j = 4 \end{cases} & c_8(x_i x_{ij}) &= \begin{cases} 8, 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 9, 1 \leq i \leq n, j = 2 \\ 4, 1 \leq i \leq n, j = 3 \\ 5, 1 \leq i \leq n, j = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_8$  terlihat bahwa bilangan kromatik total 1-dinamis dari graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$  adalah  $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 9$ . Karena bilangan kromatik  $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 9$  dan  $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 9$  maka bilangan kromatik  $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 9$ . Pada fungsi  $c_8$  juga berlaku untuk  $2 \leq r \leq 5$  sehingga  $\chi_2''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \chi_3''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \chi_4''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \chi_5''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 9$ . Sebagai ilustrasi, disajikan Figure 5 yang merupakan pewarnaan 1,2,3,4,5-dinamis dari *generalized shackle* graf friendship  $\mathbf{F}_4$ .

**Kasus 2.** Berdasarkan Observasi 1 bahwa  $\chi_6''(G) \geq \chi_5''(G)$ , dapat disimpulkan  $\chi_6''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq \chi_5''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$ . Misalkan  $\chi_6''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 9$  seperti pada fungsi pewarnaan  $c_8$ , maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis, lihat tabel 6. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 10-pewarnaan agar definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis terpenuhi, maka bilangan kromatik  $\chi_6''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 10$ .

Table 6: Pewarnaan Titik  $z_i$  pada 1, 2, 3, 4, 5-dinamis graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$

$i$	$c(z_i)$	$ c(N(z_i)) $	$r$	$d(z_i)+ N(z_i) $	$\min\{r, d(z_i)+ N(z_i) \}$	$ c(N(z_i))  \geq \min\{r, d(z_i)+ N(z_i) \}$
1	8	4	5,6	4	4,4	<b>Y,Y</b>
2	5	5	5,6	6	5,6	<b>Y,T</b>
3	8	5	5	6	5	<b>Y</b>
4	5	5	5	6	5	<b>Y</b>
5	8	4	5	4	4	<b>Y</b>

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 6-dinamis pada graf ( $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$ ) adalah 10, maka perlu dibuktikan  $\chi_6''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 10$  dan  $\chi_6''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 10$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi_6''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 10$  dengan fungsi pewarnaan  $c_9$ . Misal  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_9$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_9 : (V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \cup E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ . Fungsi pewarnaan  $c_9$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 c_9(x_i y_i) &= 7, 1 \leq i \leq n & c_9(x_i y_{i+1}) &= 2, 1 \leq i \leq n \\
 c_9(x_i) &= \begin{cases} c_9(x_i z_i) = 6, 1 \leq i \leq n; \\ 1, 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 10, 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} & c_9(y_i) &= \begin{cases} c_9(x_i z_{i+1}) = 3, 1 \leq i \leq n \\ 9, 1 \leq i \leq n + 1, i \text{ ganjil} \\ 4, 1 \leq i \leq n + 1, i \text{ genap} \end{cases} \\
 c_9(z_i) &= \begin{cases} 8, 1 \leq i \leq n + 1, i \text{ ganjil} \\ 5, 1 \leq i \leq n + 1, i \text{ genap} \end{cases} & c_9(x_{ij} x_{ij+1}) &= \begin{cases} 6, 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 2, 1 \leq i \leq n, j = 3 \end{cases} \\
 c_9(y_i z_i) &= \begin{cases} 4, 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 8, 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} \\
 c_9(x_{ij}) &= \begin{cases} 2, 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 3, 1 \leq i \leq n, j = 2 \\ 6, 1 \leq i \leq n, j = 3 \\ 7, 1 \leq i \leq n, j = 4 \end{cases} & c_9(x_i x_{ij}) &= \begin{cases} 8, 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 9, 1 \leq i \leq n, j = 2 \\ 4, 1 \leq i \leq n, j = 3 \\ 5, 1 \leq i \leq n, j = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_9$  terlihat bahwa bilangan kromatik total 6-dinamis graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$  adalah  $\chi_6''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 10$ . Karena bilangan kromatik  $\chi_6''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 10$  dan  $\chi_6''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 10$  maka bilangan kromatik  $\chi_6''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 10$ . Fungsi pewarnaan  $c_9$  juga dapat berlaku untuk  $7 \leq r \leq 8$  sehingga  $\chi_7''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = \chi_8''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 10$ .

**Kasus 3.** Berdasarkan Observasi 1 bahwa  $\chi_9''(G) \geq \chi_8''(G)$ , dapat disimpulkan  $\chi_9''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq \chi_8''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$ . Misalkan  $\chi_9''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 10$  seperti pada fungsi pewarnaan  $c_9$ , maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis, lihat tabel 7. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 11-pewarnaan agar definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis terpenuhi, maka bilangan kromatik  $\chi_9''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 11$ .

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 9-dinamis pada graf ( $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$ ) adalah 11, maka perlu dibuktikan  $\chi_9''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 11$  dan  $\chi_9''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq$

Table 7: Pewarnaan Titik  $x_i$  dengan 10 warna pada graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$

$i$	$c(z_i)$	$ c(N(z_i)) $	$r$	$d(z_i) +  N(z_i) $	$\min\{r, d(z_i) +  N(z_i) \}$	$ c(N(z_i))  \geq \min\{r, d(z_i) +  N(z_i) \}$
1	1	8	8,9	16	8,9	<b>Y,T</b>
2	10	8	8	16	8	<b>Y</b>
3	1	8	8	16	5	<b>Y</b>
4	10	8	8	16	5	<b>Y</b>

11. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi''(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 9$  dengan fungsi pewarnaan  $c_{10}$ . Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_{10}$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_{10} : (V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \cup E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))) \rightarrow D$ . Fungsi pewarnaan  $c_{10}$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 c_{10}(x_i y_i) &= 7, 1 \leq i \leq n & c_{10}(x_i y_{i+1}) &= 2, 1 \leq i \leq n \\
 c_{10}(x_i z_i) &= 6, 1 \leq i \leq n; & c_{10}(x_i z_{i+1}) &= 3, 1 \leq i \leq n \\
 c_{10}(y_i z_i) &= 11, 1 \leq i \leq n + 1; & c_{10}(x_{ij} x_{ij+1}) &= 11, 1 \leq i \leq n \\
 c_{10}(x_i) &= \begin{cases} 1, 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 10, 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} & c_{10}(y_i) &= \begin{cases} 9, 1 \leq i \leq n + 1, i \text{ ganjil} \\ 4, 1 \leq i \leq n + 1, i \text{ genap} \end{cases} \\
 c_{10}(z_i) &= \begin{cases} 8, 1 \leq i \leq n + 1, i \text{ ganjil} \\ 5, 1 \leq i \leq n + 1, i \text{ genap} \end{cases} & c_{10}(x_i x_{ij}) &= \begin{cases} 8, 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 9, 1 \leq i \leq n, j = 2 \\ 4, 1 \leq i \leq n, j = 3 \\ 5, 1 \leq i \leq n, j = 4 \end{cases} \\
 c_{10}(x_{ij}) &= \begin{cases} 10, 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 1, 3 \\ 3, 1 \leq i \leq n, j = 2 \\ 7, 1 \leq i \leq n, j = 4 \\ 1, 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 1 \\ 10, 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_{10}$  terlihat bahwa bilangan kromatik total 9-dinamis dari graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$  adalah  $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 11$ . Karena bilangan kromatik  $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 11$  dan  $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 11$  dapat disimpulkan  $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 11$  sehingga  $\chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 11$ . Sebagai ilustrasi, disajikan Figure 6 yang merupakan pewarnaan 9-dinamis dari *generalized shackle* graf friendship  $\mathbf{F}_4$ .

**Kasus 4.** Berdasarkan Observasi 1 bahwa  $\chi''_{10}(G) \geq \chi''_9(G)$ , dapat disimpulkan  $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq \chi''_9(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$ . Misalkan  $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 11$  seperti pada fungsi pewarnaan  $c_{10}$ , maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis, lihat tabel 8. Sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 12-pewarnaan agar definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis terpenuhi, maka bilangan kromatik  $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 12$ .

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 10-dinamis pada graf  $(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$  adalah 12, perlu dibuktikan  $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 12$  dan  $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 12$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 12$

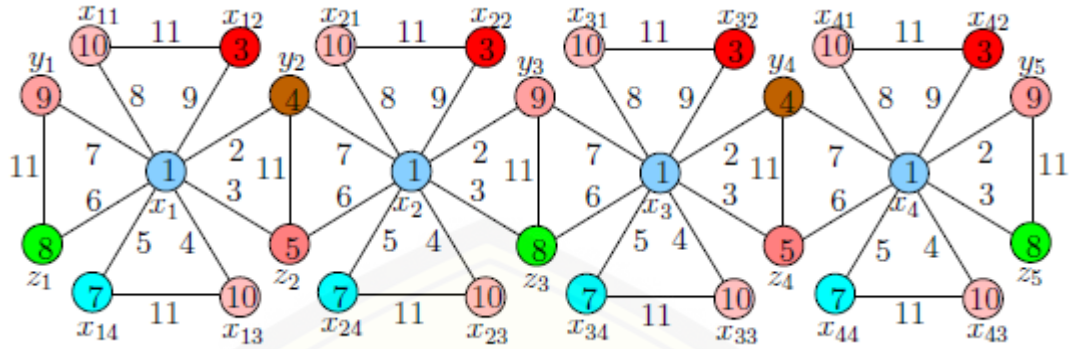


Figure 6: Pewarnaan Total 9-dinamis pada Graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, 4)$

Table 8: Pewarnaan Titik  $x_i$  dengan 10 warna pada graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$

$i$	$c(x_i)$	$ c(N(x_i)) $	$r$	$d(x_i) +  N(x_i) $	$\min\{r, d(x_i) +  N(x_i) \}$	$ c(N(x_i))  \geq \min\{r, d(x_i) +  N(x_i) \}$
1	1	9	9,10	16	8,9	<b>Y,T</b>
2	10	9	9	16	8	<b>Y</b>
3	1	9	9	16	5	<b>Y</b>
4	10	9	9	16	5	<b>Y</b>

dengan fungsi pewarnaan  $c_{11}$ . Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_{11}$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_{11} : (V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \cup E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))) \rightarrow D$ . Fungsi pewarnaan  $c_{11}$  adalah sebagai berikut:

$$c_{11}(y_i) = 10, 1 \leq i \leq n \quad c_{11}(z_i) = 11, 1 \leq i \leq n$$

$$c_{11}(x_i y_i) = 7, 1 \leq i \leq n; \quad c_{11}(x_i y_{i+1}) = 2, 1 \leq i \leq n$$

$$c_{11}(x_i z_i) = 6, 1 \leq i \leq n; \quad c_{11}(x_i z_{i+1}) = 3, 1 \leq i \leq n$$

$$c_{11}(x_{ij} y_{ij+1}) = 12, 1 \leq i \leq n, j = 1, 3 \quad c_{11}(y_i z_i) = 3, 1 \leq i \leq n + 1$$

$$c_{11}(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 9, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{11}(x_{ij}) = \begin{cases} 10, & 1 \leq i \leq n, j = 1, 3 \\ 11, & 1 \leq i \leq n, j = 2, 4 \end{cases}$$

$$c_{11}(x_i x_{ij}) = \begin{cases} 8, & 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 9, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 2 \\ 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 2 \\ 4, & 1 \leq i \leq n, j = 3 \\ 5, & 1 \leq i \leq n, j = 4 \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_{11}$  terlihat bahwa bilangan kromatik total 10-dinamis dari graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$  adalah  $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 12$ . Karena  $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq$



12 dan  $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 12$  dapat disimpulkan  $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 12$  sehingga  $\chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 12$ .

**Kasus 5.** Berdasarkan Observasi 1 bahwa  $\chi''_{11}(G) \geq \chi''_{10}(G)$ , dapat disimpulkan  $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq \chi''_{10}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$ . Misalkan  $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 12$  seperti pada fungsi pewarnaan  $c_{11}$ , maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis, sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 13-pewarnaan,  $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 13$ . Akan tetapi dengan 13-pewarnaan tidak memenuhi pewarnaan total  $r$ -dinamis, sehingga ditambah menjadi 14 warna. Begitu juga dengan 15 warna tetap tidak memenuhi pewarnaan total  $r$ -dinamis lihat tabel 9, sehingga perlu penambahan warna menjadi 16-warna.  $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 16$

Table 9: Pewarnaan Sisi dengan 15 pewarnaan pada graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$

$e$ = $uv$	$c(e)$	$ c(N(e)) $	$r$	$d(u) + d(v)$	$\min\{r, d(u) + d(v)\}$	$ c(N(e))  \geq \min\{r, d(u) + d(v)\}$
$x_1z_1$	6	10	10,11	10	10,10	<b>Y,Y</b>
$x_2z_2$	11	10	10,11	11	10,11	<b>Y,T</b>
$x_3z_3$	6	11	10	11	10	<b>Y</b>

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 11-dinamis pada graf ( $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$ ) adalah 16, perlu dibuktikan  $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 16$  dan  $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 16$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 16$  dengan fungsi pewarnaan  $c_{12}$ . Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_{12}$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_{12} : (V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \cup E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))) \rightarrow D$ . Fungsi pewarnaan  $c_{12}$  adalah sebagai berikut:

$$c_{12}(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 9, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{12}(y_i) = \begin{cases} 14, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 15, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{12}(x_iy_i) = \begin{cases} 7, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 10, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{12}(x_iy_{i+1}) = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 12, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{12}(x_iz_i) = \begin{cases} 6, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 11, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{12}(x_iz_{i+1}) = \begin{cases} 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 13, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{12}(y_iz_i) = \begin{cases} 15, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 14, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{12}(x_{ij}x_{ij+1}) = \begin{cases} 11, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 1 \\ 12, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 3 \\ 6, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 1 \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 3 \end{cases}$$

$$c_{12}(x_ix_{ij}) = \begin{cases} 8, & 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 9, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 2 \\ 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 2 \\ 4, & 1 \leq i \leq n, j = 3 \\ 5, & 1 \leq i \leq n, j = 4 \end{cases}$$

$$c_{12}(x_{ij}) = \begin{cases} 10, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 1 \\ 12, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 2 \\ 11, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 3 \\ 13, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 4 \\ 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 1 \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 2 \\ 6, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 3 \\ 7, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 4 \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_{12}$  terlihat bahwa bilangan kromatik total 11-dinamis dari graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$  adalah  $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 16$ . Karena  $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 16$  dan  $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 16$  dapat disimpulkan  $\chi''_{11}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 16$  sehingga bilangan kromatik untuk  $11 \leq r \leq 15$  pada graf  $G = gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$  adalah  $\chi''_{11}(G) = \chi''_{12}(G) = \chi''_{13}(G) = \chi''_{14}(G) = \chi''_{15}(G) = 16$ .

**Kasus 6.** Berdasarkan Observasi 1 bahwa  $\chi''_{16}(G) \geq \chi''_{10}(G)$ , dapat disimpulkan  $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq \chi''_{15}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$ . Misalkan  $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 16$  seperti pada fungsi pewarnaan  $c_{12}$ , maka tidak memenuhi definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis lihat tabel 10, sehingga diperlukan penambahan warna menjadi 17-pewarnaan agar definisi pewarnaan total  $r$ -dinamis terpenuhi, maka bilangan kromatik  $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 17$ .

Table 10: Pewarnaan Titik  $x_i$  pada Pewarnaan Total 15-dinamis graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$

$i$	$c(x_i)$	$ c(N(x_i)) $	$r$	$d(x_i) +  N(x_i) $	$\min\{r, d(x_i) +  N(x_i) \}$	$ c(N(x_i))  \geq \min\{r, d(x_i) +  N(x_i) \}$
1	1	15	15,16	16	15,16	<b>Y,T</b>
2	9	15	15	16	15	<b>Y</b>
3	1	15	15	16	15	<b>Y</b>
4	9	15	15	16	15	<b>Y</b>

Untuk membuktikan bilangan kromatik dari pewarnaan total 16-dinamis pada graf  $(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))$  adalah 17, perlu dibuktikan  $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 17$  dan  $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 17$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan kromatik  $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 17$  dengan fungsi pewarnaan  $c_{13}$ . Misalkan  $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$  adalah himpunan warna dengan  $k$  warna dan  $c_{13}$  adalah fungsi yang memetakan setiap titik dan sisi ke himpunan warna  $D$ ,  $c_{13} : (V(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \cup E(gshack(\mathbf{F}_4, e, n))) \rightarrow D$ . Fungsi pewarnaan  $c_{13}$  adalah sebagai berikut:

$$c_{13}(x_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 9, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{13}(y_i) = \begin{cases} 14, & 1 \leq i \leq n + 1, i \text{ ganjil} \\ 15, & 1 \leq i \leq n + 1, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{13}(y_i z_i) = \begin{cases} 15, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 14, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{13}(z_i) = \begin{cases} 17, & 1 \leq i \leq n + 1, i \text{ ganjil} \\ 16, & 1 \leq i \leq n + 1, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{13}(x_i y_i) = \begin{cases} 7, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 10, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{13}(x_i y_{i+1}) = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 12, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c_{13}(x_i z_i) = \begin{cases} 6, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 11, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases} \quad c_{13}(x_i z_{i+1}) = \begin{cases} 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil} \\ 13, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap} \end{cases}$$

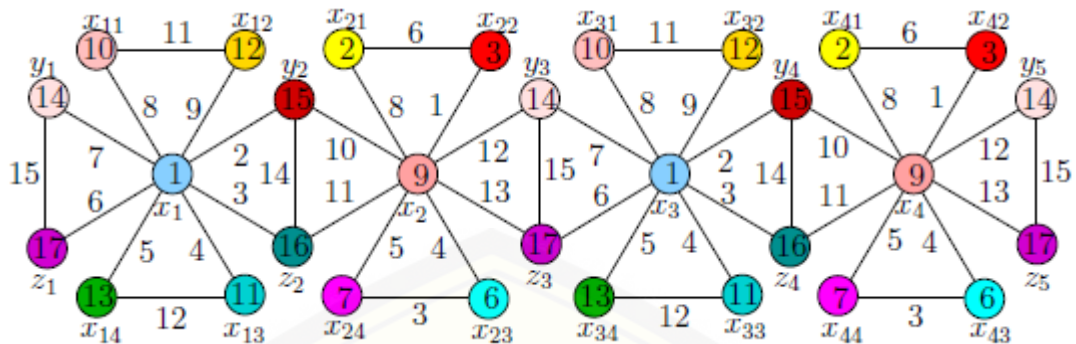


Figure 7: Pewarnaan Total  $r$ -dinamis pada Graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, 4)$

$$c_{13}(x_{ij}x_{ij+1}) = \begin{cases} 11, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 1 \\ 12, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 3 \\ 6, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 1 \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 3 \end{cases}$$

$$c_{13}(x_i x_{ij}) = \begin{cases} 8, & 1 \leq i \leq n, j = 1 \\ 9, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 2 \\ 1, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 2 \\ 4, & 1 \leq i \leq n, j = 3 \\ 5, & 1 \leq i \leq n, j = 4 \end{cases}$$

$$c_{13}(x_{ij}) = \begin{cases} 10, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 1 \\ 12, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 2 \\ 11, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 3 \\ 13, & 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}, j = 4 \\ 2, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 1 \\ 3, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 2 \\ 6, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 3 \\ 7, & 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}, j = 4 \end{cases}$$

Dari fungsi pewarnaan pada  $c_{13}$  terlihat bahwa bilangan kromatik total 16-dinamis dari graf  $gshack(\mathbf{F}_4, e, n)$  adalah  $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 17$ . Karena  $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \leq 17$  dan  $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) \geq 17$  dapat di-simpulkan  $\chi''_{16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 17$  sehingga bilangan kromatik  $\chi''_{16}(G) = \chi''_{16}(G) = 17$ . Sebagai ilustrasi, disajikan Gambar 4.29 yang merupakan pewarnaan  $r$ -dinamis dari *generalized shackle* graf friendship  $\mathbf{F}_4$ .

Pada graf hasil operasi *generalized shackle* graf friendship  $\mathbf{F}_4$ , jika ditinjau dari pewarnaan titiknya, nilai dari  $\min\{r, \max\{d(v) + |(N(v))|\}\} = \max\{d(x_i) + |(N(x_i))|\} = 16$ . Untuk pewarnaan sisi pada graf hasil operasi *generalized shackle* graf friendship  $\mathbf{F}_4$ , nilai dari  $\min\{r, \max\{d(u) + d(v)\}\} = \max\{d(u) + d(v)\} = 11$ , sehingga mengakibatkan  $\chi''_{r \geq 16}(gshack(\mathbf{F}_4, e, n)) = 17$ . Hal ini disebabkan pada saat  $r \geq 16$  nilai  $\min\{r, \max\{d(v) + |(N(v))|\}\} = \max\{d(x_i) + |(N(x_i))|\} = 16$  dan nilai  $\min\{r, \max\{d(u) + d(v)\}\} = \max\{d(u) + d(v)\} = 11$ . Berdasarkan uraian diatas, maka Teorema 3 terbukti.

**Masalah terbuka 1** Tentukan bilangan kromatik pewarnaan total  $r$ -dinamis dari graf khusus dan graf hasil operasi *shackel* dan *generalized shackel* graf yang lain.

## Referensi

- [1] Dafik, Hasan, Azizah dan Agustin, “A Generalized Shackle of Any Graph  $H$  Admits a Super  $H$ -Antimagic Total Labelling”, Artikel, Jember: Universitas Jember, (2010).
- [2] Geetha, J. dan Somasundaran, K., “Total Chromatic Number and Some Topological Indices”, Department of Mathematics, Amrita Vishwa Vidyapeetham, Coimbatore-641 112, India.
- [3] Munir, Rinaldi. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika, (2009).
- [4] Nugroho, D. B., Catatan Kuliah (2 SKS) MX 324 Pengantar Teori Graf, Universitas Kristen Satya Wacana, (2008).
- [5] Slamin. *Desain Jaringan : Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember, (2009).

