PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF BINTANG GANDA $(S_{n,m})$ DAN GRAF $C_m \odot K_{1,n}$

SKRIPSI

Oleh

Diah Ayu Pujiwati
NIM 161810101038

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2020

PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF BINTANG GANDA ($S_{n,m}$) DAN GRAF $C_m \odot K_{1,n}$

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Diah Ayu Pujiwati
NIM 161810101038

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2020

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk:

1. Kakekku Suprik dan nenekku Sukini;
2. Ayahanda Saleh dan ibunda Sumarni yang telah memberikan segalanya;
3. Saudara perempuanku Atik Prasetya dan saudara laki-lakiku Wahyu Sebiyantoro serta kakak iparku Sudarso;
4. Keponakanku Aidan Gavin Tristan Saputra dan Adeeva Jacinda Faranisa;
5. Riswanda Awang Sudeno yang menjadi teman suka dan duka yang telah memberikan kasih sayang dan motivasinya;
6. Segenap keluarga besarku yang tak henti mendukung dan mendoakanku;
7. Guru-guru TK Darma Wanita II, SDN 1 Jajag, SMPN 1 Cluring, SMAN 1 Cluring dan segenap guru-guru yang telah membimbingku dari awal hingga sekarang;
8. Kakak tingkat, teman, serta adek tingkat dari Atlas'13, Extreme'14, Sigma'15, Misdirection'16 dan Konifertika'17;
9. Sahabatku Sabrina Shena Sarasvati, Catrin Nela Betistiyan, Dita Wahyuningtyas dan Nor Laela Ramadhaniyah;
10. HIMATIKA "Geokompstat" ;
11. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

MOTO

"Orang-orang hebat di bidang apapun bukan baru bekerja karena mereka terinspirasi, namun mereka menjadi terinspirasi karena mereka lebih suka bekerja. Mereka tidak menyia-nyiakan waktu untuk menunggu inspirasi."
(Ernest Newman)[1]

"Orang-orang yang sukses telah belajar membuat diri mereka melakukan hal yang harus dikerjakan ketika hal itu memang harus dikerjakan, entah mereka menyukainya atau tidak."
(Aldus Huxley)[2]

[1]maribelajarbk.com
[2]bacaanmadani.com

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Diah Ayu Pujiwati

NIM : 161810101038

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul "Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Bintang Ganda $(S_{n,m})$ dan Graf $C_m \odot K_{1,n}$ " adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Januari 2020

Yang menyatakan,

Diah Ayu Pujiwati
NIM 161810101038

SKRIPSI

PELABELAN HARMONIS GANJIL PADA GRAF BINTANG GANDA ($S_{n,m}$) DAN GRAF $C_m \odot K_{1,n}$

Oleh

Diah Ayu Pujiwati
NIM 161810101038

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama : Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.

Dosen Pembimbing Anggota : Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Bintang Ganda $(S_{n,m})$ dan Graf $C_m \odot K_{1,n}$ " karya Diah Ayu Pujiwati telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji:

Ketua,	Anggota I,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. NIP. 197408132000032004	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. NIP. 198610142014041001
Anggota II,	Anggota III,
Kusbudiono, S.Si., M.Si. NIP. 197704302005011001	Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si. NIP. 197006061998031003

Mengesahkan
Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember,

Drs. Achmad Sjaifullah, M.Sc., Ph.D.
NIP. 195910091986021001

RINGKASAN

Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Bintang Ganda ($S_{n,m}$) dan Graf $C_m \odot K_{1,n}$; Diah Ayu Pujiwati, 161810101038; 2020; 34 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pelabelan graf diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1963 sebagai suatu pemetaan yang membawa setiap unsur dari suatu graf ke dalam himpunan bilangan bulat tak-negatif. Unsur-unsur yang dipetakan bisa berupa himpunan titik yang disebut dengan pelabelan titik, himpunan sisi yang disebut dengan pelabelan sisi, dan himpunan dari kombinasi antar keduanya yang disebut dengan pelabelan total (*total labeling*). Terdapat banyak cara untuk melabeli suatu graf, salah satunya pelabelan harmonis (*harmonious*).

Pelabelan harmonis diperkenalkan oleh R.L. Graham dan N.J. Sloane pada tahun 1980. Pelabelan harmonis dikembangkan menjadi pelabelan harmonis ganjil (*odd harmonious*) yang diperkenalkan oleh Liang dan Bai pada tahun 2009 dan pelabelan harmonis genap (*even harmonious*) yang diperkenalkan oleh Sarasija dan Binthiya pada tahun 2011. Pada skripsi ini dibahas tentang pelabelan titik yaitu pelabelan harmonis ganjil. Graf $G(p, q)$ dengan p titik dan q sisi disebut sebagai graf harmonis ganjil jika terdapat f fungsi injektif yang memetakan himpunan titik dari G ke himpunan bilangan bulat tak-negatif $\{0, 1, 2, ..., 2q-1\}$, sedemikian sehingga akan menghasilkan f^* fungsi bijektif yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan ganjil $\{1, 3, 5, ..., 2q-1\}$, dengan aturan setiap sisi mendapat label dari penjumlahan dua label titik yang terkait pada sisi tersebut.

Penelitian ini membahas lebih lanjut tentang pelabelan harmonis ganjil pada beberapa graf yaitu graf bintang ganda ($S_{n,m}$) yang disebut juga dengan graf *double star* dan graf $C_m \odot K_{1,n}$. Berdasarkan penelitian didapatkan bahwa graf bintang ganda ($S_{n,m}$) adalah graf harmonis ganjil untuk setiap n atau m dan graf $C_m \odot K_{1,n}$ adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $m \equiv 0 (\text{mod } 2)$, $m \geq 4$ dan $C_m \odot K_{1,n}$ harmonis ganjil untuk setiap n.

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala kasih sayang-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul ”Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Bintang Ganda ($S_{n,m}$) dan Graf $C_m \odot K_{1,n}$”. Penulisan tugas akhir ini dilakukan guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Pada kesempatan ini, dengan segala hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama dan Bapak Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan tugas akhir ini;
2. Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si., dan Bapak Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun;
3. Dosen dan Karyawan jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. Sahabat Misdirection’16, khususnya ”Kelompok Jaya Luar Biasa” yang selalu setia memberikan dukungan;
5. serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian tugas ini.

Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis mengharap kritik dan saran demi kesempurnaan penelitian selanjutnya. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jember, Januari 2020

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang dari ilmu matematika kombinatorik yang berkembang sangat cepat baik secara teori maupun aplikasi. Aplikasi dari teori graf banyak digunakan sebagai alternatif untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Representasi visual dari graf adalah suatu permasalahan yang digambarkan dalam bentuk titik dan sisi. Pokok bahasan yang ada di dalam teori graf sangat beragam, salah satunya adalah pelabelan.

Tahun 1963 pelabelan graf diperkenalkan untuk pertama kalinya oleh Sedlacek yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang membawa setiap unsur dari suatu graf ke dalam himpunan bilangan bulat tak-negatif. Unsur-unsur yang dipetakan bisa berupa himpunan titik yang disebut dengan pelabelan titik, himpunan sisi yang disebut dengan pelabelan sisi, dan himpunan dari kombinasi antar keduanya yang disebut dengan pelabelan total (*total labelling*). Terdapat banyak cara untuk melabeli suatu graf, salah satunya pelabelan harmonis (*harmonious*).

Pelabelan harmonis diperkenalkan oleh R.L. Graham dan N.J. Sloane pada tahun 1980. Graf $G(p,q)$ dengan p titik dan q sisi disebut sebagai graf harmonis jika terdapat f fungsi injektif dari titik-titik pada himpunan bilangan bulat modulo q sehingga ketika setiap sisi xy dilabeli dengan $f(x) + f(y)(\text{mod } q)$, maka hasil label setiap sisinya berbeda. Pelabelan harmonis dikembangkan menjadi pelabelan harmonis ganjil (*odd harmonious*) dan pelabelan harmonis genap (*even harmonious*). Pada penelitian ini dibahas tentang pelabelan harmonis ganjil yang diperkenalkan oleh Liang dan Bai pada tahun 2009. Graf $G(p,q)$ dengan p titik dan q sisi disebut sebagai graf harmonis ganjil jika terdapat f fungsi injektif yang memetakan himpunan titik dari G ke himpunan bilangan bulat tak-negatif $\{0, 1, 2, ..., 2q-1\}$, sedemikian sehingga akan menghasilkan f^* fungsi bijektif yang memetakan himpunan sisi ke himpunan bilangan ganjil $\{1, 3, 5, ..., 2q-1\}$, dengan aturan setiap sisi mendapat label dari penjumlahan dua label titik yang terkait pada sisi tersebut.

Peneliti yang telah menemukan graf harmonis ganjil diantaranya Liang dan Bai (2009) membuktikan bahwa graf lingkaran C_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n \equiv 0(\text{mod } 4)$, graf komplit K_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n = 2$, graf komplit k-partit $K_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$ adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $k = 2$. Vaidya dan Shah (2011) membuktikan bahwa graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf harmonis ganjil. Saputri, dkk (2013) membuktikan bahwa graf tangga, graf dumbbell, dan graf pohon palem adalah graf harmonis ganjil. Jeyanthi, dkk (2015) membuktikan bahwa *banana tree* $BT_k(n)$ dengan $n \geq 1$ dan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil. Firmansah dan Sugeng (2015) membuktikan bahwa graf kincir angin Belanda $C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ dan gabungan graf kincir angin Belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}$ dengan $k \geq 1$ adalah graf harmonis ganjil. Firmansah dan Syaifuddin (2018) membuktikan bahwa amalgamasi graf kincir angin *double quadrilateral* adalah graf harmonis ganjil.

Berdasarkan beberapa penelitian tentang harmonis ganjil (*odd harmonious*) tersebut, dapat diketahui bahwa tidak semua graf bisa dilabeli secara harmonis ganjil. Dari penelitian Liang dan Bai, graf komplit yang dapat dilabeli secara harmonis ganjil hanya graf bipartit. Selain itu, graf lingkaran yang dapat dilabeli secara harmonis ganjil hanya graf C_n jika dan hanya jika $n \equiv 0(\text{mod } 4)$. Oleh karena itu penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian tentang pelabelan harmonis ganjil pada beberapa graf yaitu graf bintang ganda ($S_{n,m}$) yang disebut juga dengan graf *double star* dan graf $C_m \odot K_{1,n}$.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini adalah menyelidiki apakah graf bintang ganda ($S_{n,m}$) dan graf $C_m \odot K_{1,n}$ merupakan graf harmonis ganjil?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui apakah graf bintang ganda ($S_{n,m}$) dan graf $C_m \odot K_{1,n}$ merupakan graf harmonis ganjil.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini antara lain:

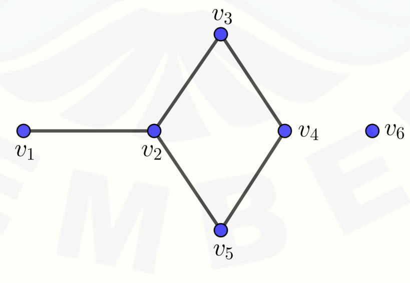
a. Memberi kontribusi dan wawasan terhadap perkembangan pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan.
b. Menambah referensi mengenai pelabelan harmonis ganjil pada graf bintang ganda ($S_{n,m}$) dan graf $C_m \odot K_{1,n}$.
c. Memberikan motivasi pada peneliti lain untuk mengembangkan penelitian tentang pelabelan harmonis ganjil pada jenis-jenis graf yang berbeda.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

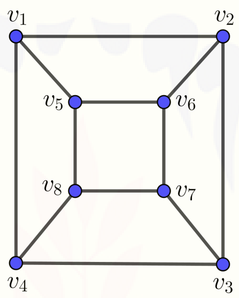
Slamin (2019) mendefinisikan *graf tidak berarah* atau biasa disebut *graf* G sebagai pasangan (V, E) dengan V adalah himpunan tak kosong yang setiap elemennya disebut dengan titik (*vertex*) dan E adalah himpunan yang elemennya merupakan pasangan tak-terurut dari titik V yang disebut dengan sisi (*edge*) dan dinotasikan dengan $e = (uv)$. Jadi $(uv) = (vu)$ adalah sisi yang sama. Berdasarkan definisi graf tersebut dapat disimpulkan bahwa sebuah graf dimungkinkan tidak memiliki sisi, akan tetapi harus memiliki minimal sebuah titik karena V adalah himpunan tak kosong dan E himpunan yang boleh kosong.

Banyaknya titik pada graf G disebut dengan *ordo* (*order*). Sedangkan banyaknya sisi pada graf G disebut dengan *ukuran* (*size*). Gambar 2.1 merupakan contoh dari graf yang berordo 6 dan berukuran 5 dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E = \{(v_1v_2), (v_2v_3), (v_2v_5), (v_3v_4), (v_4v_5)\}$. Misalkan u dan v merupakan titik-titik dari graf G, u dikatakan *bertetangga* (*adjacent*) dengan v jika terdapat sebuah sisi e yang menghubungkan u dan v dan dinotasikan dengan $e = (uv)$, sedangkan kedua titik u dan v disebut *bersisian* (*incident*) dengan sisi e.



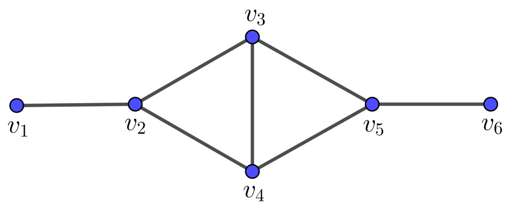
Gambar 2.1 Graf berordo 6 dan berukuran 5

Derajat dari titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang bersisian pada titik v. Jika sebuah titik v mempunyai derajat 0, dengan kata lain v tidak bertetangga dengan sembarang titik yang lain, maka v adalah *titik terasing* atau *titik terisolasi* (*isolated vertex*). Sebuah titik berderajat 1 disebut *titik ujung* (*pendant*) atau *daun* (*leaf*). *Loop* dalam suatu graf adalah sebuah sisi yang menghubungkan sebuah titik dengan dirinya sendiri. Dengan kata lain, e adalah *loop* jika $e = (vv)$, oleh karena titik v berinsiden dua kali pada sisi (vv) maka derajat dari titik v dihitung sebanyak dua. Dalam suatu graf, apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik yang sama, maka sisi-sisi tersebut dinamakan *sisi rangkap* (*multiple edge*). Graf yang tidak memuat *loop* dan sisi rangkap dinamakan *graf sederhana*. Pada Gambar 2.1, derajat v_3 adalah 2, v_6 merupakan titik terasing, dan v_1 merupakan titik ujung. Jika setiap titik dari graf G mempunyai derajat yang sama maka G disebut *regular* atau *teratur*. Gambar 2.2 merupakan contoh graf teratur dengan derajat 3.



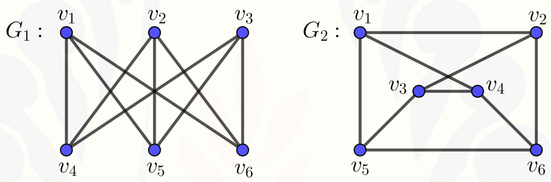
Gambar 2.2 Graf teratur berderajat 3

Barisan berhingga bergantian antara titik dan sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik pada G yaitu $v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_i = v_{i-1}v_i$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$ disebut dengan *jalan* (*walk*). Panjang jalan adalah banyaknya sisi pada jalan tersebut. Jalan $v_0 - v_n$ dikatakan tertutup jika $v_0 = v_n$ dan disebut *sirkuit*. Jika semua titik pada jalan $v_0 - v_n$ adalah berbeda, maka jalan tersebut dinamakan *lintasan* (*path*). Lintasan yang tertutup disebut *lingkaran* (*cycle*). Panjang dari lintasan terpendek dari titik u ke titik v pada graf G disebut *jarak* (*distance*) dan dinotasikan dengan $d(u, v)$. Jarak terpanjang diantara sembarang dua titik pada graf G disebut *diameter* graf G. Graf G merupakan *graf terhubung* (*connected*) jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Sebagai ilustrasi, pada Gambar 2.3 $\{v_1, (v_1v_2), v_2, (v_2v_3), v_3, (v_3v_4), v_4, (v_4v_5), v_5, (v_5v_3), v_3\}$, $\{v_1, (v_1v_2), v_2, (v_2v_3), v_3, (v_3v_4), v_4, (v_4v_5), v_5\}$ dan $\{v_3, (v_3v_4), v_4, (v_4v_5), v_5, (v_5v_3), v_3\}$ masing-masing merupakan jalan, lintasan dan lingkaran.



Gambar 2.3 Ilustrasi jalan, lintasan dan lingkaran pada graf

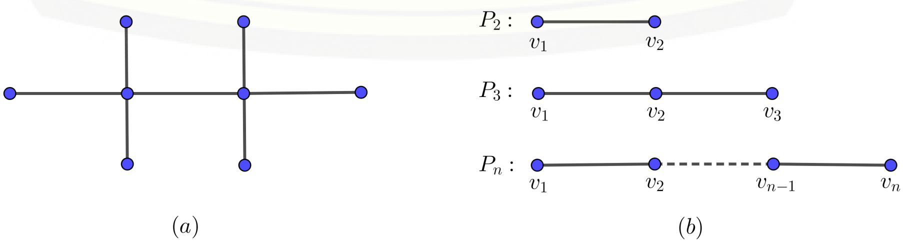
Dua graf G_1 dan G_2 dengan n titik dikatakan *isomorfis* jika terdapat pemetaan satu-satu $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ yang menyajikan semua sifat ketetanggaan, yaitu $f(u)$ dan $f(v)$ pada G_2 bertetangga jika dan hanya jika u dan v pada G_1 bertetangga. Gambar 2.4 merupakan contoh dari graf yang isomorfis.



Gambar 2.4 Graf G_1 dan G_2 merupakan graf yang isomorfis

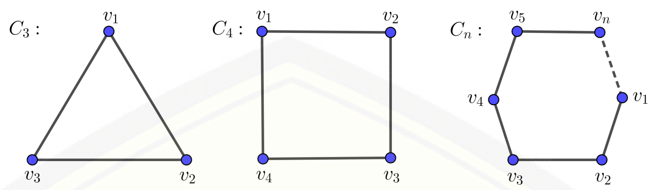
2.2 Jenis-jenis Graf

Graf pohon (*tree*) T adalah suatu graf tak-berarah yang terhubung dan tidak memuat lingkaran (*cycle*). Contoh graf pohon diberikan dalam Gambar 2.5 (a). Graf lintasan (*path*) adalah graf pohon yang berderajat maksimum dua. Graf lintasan dengan n-titik dinotasikan dengan P_n. Gambar 2.5 (b) merupakan contoh graf lintasan.



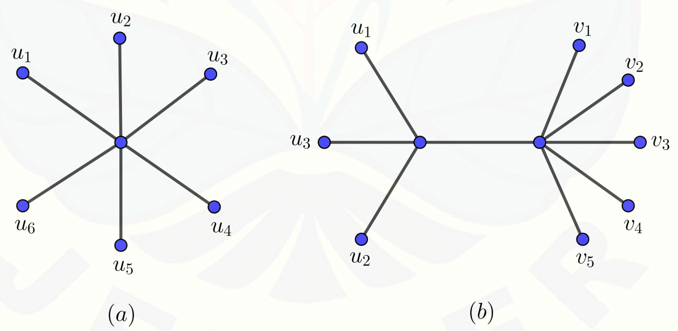
Gambar 2.5 (a) Graf Pohon dan (b) Graf Lintasan

Graf lingkaran (*cycle*) adalah graf terhubung sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dinotasikan dengan C_n dengan $n \geq 3$. Contoh dari beberapa graf lingkaran ditunjukkan pada Gambar 2.6.



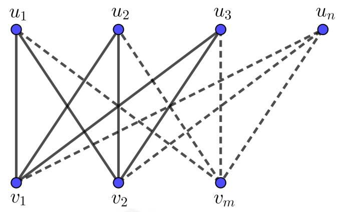
Gambar 2.6 Graf lingkaran C_3, C_4, dan C_n

Graf bintang (*star*) $K_{1,n}$ adalah graf yang memiliki 1 titik berderajat n yang disebut titik *central* dan n titik berderajat 1 yang disebut titik daun. Pohon T dikatakan *double star* jika terdiri dari dua graf *star* dengan kedua titik *central* dari graf tersebut saling bertetangga. Graf *double star* dinotasikan $S_{n,m}$. Kardinalitas titiknya adalah $p = |V(S_{n,m})| = n + m + 2$ dan kardinalitas sisinya adalah $q = |E(S_{n,m})| = n + m + 1$. Gambar 2.7 merupakan contoh dari graf *star* dan graf *double star*.



Gambar 2.7 (a) Graf *Star* ($K_{1,6}$) dan (b) Graf *Double Star* ($S_{3,5}$)

Graf G dikatakan *bipartit* (*bipartite*) jika himpunan titik $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan $V_1(G)$ dan $V_2(G)$, dengan aturan himpunan titik dalam satu partisi tidak boleh terhubung langsung. Jika setiap pasang titik di V_1 dan V_2 saling terhubung, maka graf tersebut dinamakan *graf bipartit lengkap*. Graf bipartit lengkap dinotasikan $K_{m,n}$ dengan $m = |V_1|$ dan $n = |V_2|$. Contoh dari graf bipartit lengkap ditunjukkan pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Graf bipartit lengkap ($K_{m,n}$)

2.3 Operasi Graf

Operasi graf adalah cara untuk mendapatkan graf baru dengan mengoperasikan dua graf. Dalam penelitian ini, operasi graf yang digunakan yaitu identifikasi.

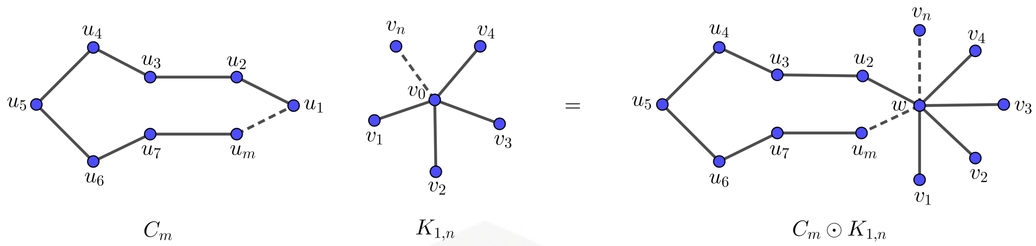
2.3.1 Identifikasi Graf

Identifikasi titik dari graf G dan H pada titik $u \in V(G)$ dan $v \in V(H)$ dinotasikan dengan $(G \odot H)$, adalah graf yang didapat dengan menempelkan titik u dan v. Penempelan titik u dan v menjadi sebuah titik baru yaitu w dengan $w \in V(G \odot H)$. Dengan demikian graf $(G \odot H)$ mempunyai $(|G| + |H| - 1)$ titik dan $(|E(G)| + |V(G)|)$ sisi.

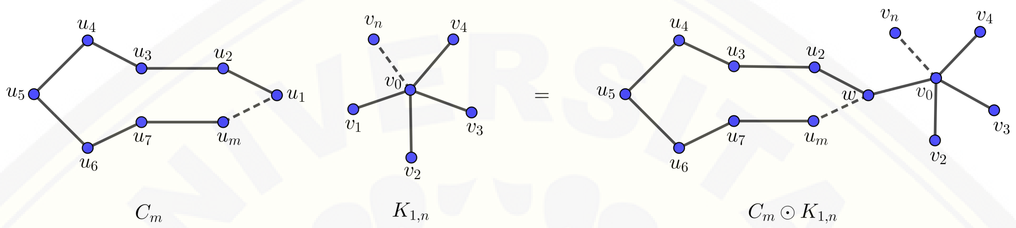
Pada penelitian ini digunakan graf $C_m \odot K_{1,n}$ yang memiliki 2 kemungkinan graf yang tidak isomorfis. Kemungkinan pertama yaitu graf hasil identifikasi titik yang diperoleh dengan menempelkan sebuah titik pada graf C_m dengan titik *central* dari graf $K_{1,n}$. Kemungkinan kedua yaitu graf yang diperoleh dengan menempelkan sebuah titik pada graf C_m dengan titik daun dari graf $K_{1,n}$. Identifikasi titik dari graf $C_m \odot K_{1,n}$ ditunjukkan pada Gambar 2.9 dan Gambar 2.10.

2.4 Pelabelan Graf

Pelabelan graf G adalah sebuah fungsi yang memetakan himpunan titik dan sisi pada graf G ke himpunan bilangan bulat tak-negatif yang memenuhi sifat tertentu. Jika domain pemetaannya adalah himpunan titik maka pelabelannya disebut pelabelan titik. Jika domain pemetaannya adalah himpunan sisi maka



Gambar 2.9 Graf $C_m \odot K_{1,n}$ dengan titik identifikasinya titik *central* dari graf $K_{1,n}$



Gambar 2.10 Graf $C_m \odot K_{1,n}$ dengan titik identifikasinya titik daun dari graf $K_{1,n}$

pelabelannya disebut pelabelan sisi. Jika domain pemetaannya adalah himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan total (*total labelling*). Pada penelitian ini akan dibahas tentang pelabelan titik yaitu pelabelan harmonis ganjil (*odd harmonious*).

2.4.1 Pelabelan Harmonis (*Harmonious*)

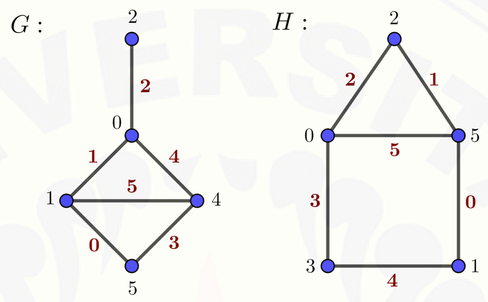
Pelabelan harmonis diperkenalkan oleh R.L. Graham dan N.J. Sloane pada tahun 1980. Graf $G(p, q)$ dengan p titik dan q sisi adalah graf harmonis jika terdapat fungsi injektif

$$f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, ..., q-1\}$$

sedemikian sehingga menghasilkan fungsi bijektif

$$f^* : E(G) \rightarrow \{0, 1, 2, ..., q-1\}$$

dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v)(\text{mod } q)$ akan menghasilkan label berbeda di setiap sisinya. Jadi suatu graf G dikatakan sebagai *graf harmonis* jika setiap titiknya dapat dilabeli berdasarkan aturan pelabelan harmonis. Pada Gambar 2.11, graf G dan graf H memiliki 5 titik dan 6 sisi. Graf G dan graf H memiliki label titik yang berbeda semua dan label sisinya diperoleh dari penjumlahan label titik-titik yang *incident* dengan sisinya dan bernilai berbeda pada modulo 6. Oleh karena graf G dan graf H dapat dilabeli berdasarkan aturan pelabelan harmonis, maka graf G dan graf H merupakan graf harmonis.



Gambar 2.11 Ilustrasi pelabelan harmonis pada graf dengan 5 titik

2.4.2 Pelabelan Harmonis Genap (*Even Harmonious*)

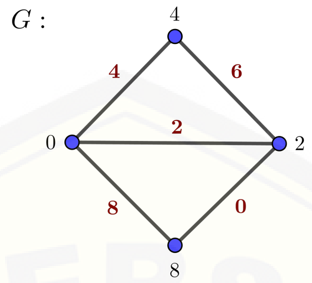
Pelabelan harmonis genap diperkenalkan oleh Sarasija dan Binthiya pada tahun 2011. Graf $G(p, q)$ dengan p titik dan q sisi adalah graf harmonis genap jika terdapat fungsi injektif

$$f : V(G) \to \{0, 1, 2, ..., 2q\}$$

sedemikian sehingga menghasilkan fungsi bijektif

$$f^* : E(G) \to \{0, 2, 4, ..., 2q - 2\}$$

dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ (mod $2q$). Jadi suatu graf G dikatakan sebagai *graf harmonis genap* jika setiap titiknya dapat dilabeli berdasarkan aturan pelabelan harmonis genap. Pada Gambar 2.12, graf G memiliki 4 titik dan 5 sisi. Graf G memiliki label titik yang berbeda semua dan label sisinya diperoleh dari penjumlahan label titik-titik yang *incident* dengan sisinya dan bernilai berbeda pada modulo 10. Oleh karena graf G dapat dilabeli berdasarkan aturan pelabelan harmonis genap, maka graf G merupakan graf harmonis genap.



Gambar 2.12 Ilustrasi pelabelan harmonis genap pada graf dengan 4 titik

2.4.3 Pelabelan Harmonis Ganjil (*Odd Harmonious*)

Pelabelan harmonis ganjil diperkenalkan oleh Liang dan Bai pada tahun 2009. Graf $G(p, q)$ dengan p titik dan q sisi adalah graf harmonis ganjil jika terdapat fungsi injektif

$$f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, ..., 2q - 1\}$$

sedemikian sehingga menghasilkan fungsi bijektif

$$f^* : E(G) \rightarrow \{1, 3, 5, ..., 2q - 1\}$$

dengan $f^*(uv) = f(u) + f(v)$.

Sebelum membahas mengenai sifat graf harmonis ganjil, terlebih dulu diberikan Teorema 2.1. mengenai graf bipartit yang akan digunakan untuk membuktikan Teorema 2.2. Bukti Teorema 2.1. dapat dilihat pada Chartrand dan Zhang (2005).

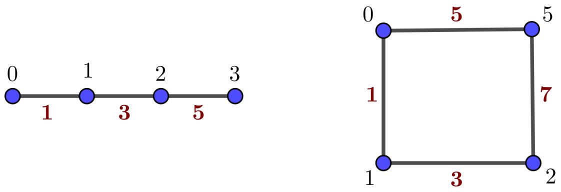
Teorema 2.1. *(Chartrand dan Zhang, 2005) Graf G yang nontrivial adalah graf bipartit jika dan hanya jika G tidak memuat lingkaran dengan banyaknya titik ganjil.*

Selanjutnya diberikan pembuktian mengenai sifat graf harmonis ganjil. Pertama ditunjukkan bahwa jika G adalah graf harmonis ganjil dengan pelabelan harmonis ganjil f, maka G tidak memuat lingkaran dengan banyaknya titik ganjil. Misalkan $C_{2n+1} = (v_1v_2), (v_2v_3), (v_3v_4), ..., (v_{2n}v_{2n+1}), (v_{2n+1}v_1)$ adalah lingkaran ganjil pada graf G, tanpa mengurangi keumuman $f(v_1)$ adalah bilangan ganjil. Karena $f^*(uv)$ adalah bilangan ganjil untuk setiap $uv \in E(G)$ dan $(v_1v_2) \in E(G)$, maka $f(v_2)$ haruslah bilangan genap. Secara umum $f(v_{2i-1})$ adalah bilangan ganjil dan $f(v_{2i})$ adalah bilangan genap. Karena $f(v_{2n+1})$ dan $f(v_1)$ bilangan ganjil dan $(v_{2n+1}v_1) \in E(G)$, maka $f^*(v_{2n+1}v_1)$ bilangan genap. Hal ini kontradiksi dengan label sisi harus ganjil. Berdasarkan Teorema 2.1. suatu graf bipartit jika dan hanya jika graf tersebut tidak memuat lingkaran ganjil, maka G adalah graf bipartit. Dengan demikian jika G adalah graf harmonis ganjil, maka G adalah graf bipartit. Berdasarkan definisi graf harmonis ganjil, diperoleh $p \leq 2q - 1$ (i). Karena G bipartit, maka banyaknya sisi terbanyak didapat ketika graf G adalah graf bipartit lengkap $K_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}$, sehingga didapat $q \leq \frac{p^2}{4}$ atau $2\sqrt{q} \leq p$ (ii). Dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh $2\sqrt{q} \leq p \leq 2q - 1$. Oleh karena itu teorema dari pelabelan harmonis ganjil adalah sebagai berikut:

Teorema 2.2. *(Liang dan Bai, 2009)*

1. *Jika G adalah graf harmonis ganjil, maka G adalah graf bipartit.*
2. *Jika graf $G(p, q)$ harmonis ganjil, maka $2\sqrt{q} \leq p \leq 2q - 1$.*

Pada Gambar 2.13, graf P_4 dan C_4 memiliki label titik yang berbeda semua dan label sisi diperoleh dari jumlah dua titik yang terhubung dalam satu sisi sehingga diperoleh label sisi ganjil dan berbeda disetiap sisinya. Oleh karena graf P_4 dan graf C_4 dapat dilabeli berdasarkan aturan pelabelan harmonis ganjil, maka graf P_4 dan graf C_4 merupakan graf harmonis ganjil.



Gambar 2.13 Ilustrasi pelabelan harmonis ganjil pada graf P_4 dan C_4

Salah satu graf yang diteliti dalam penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian Liang dan Bai dan penelitian Vaidya dan Shah. Liang dan Bai pada tahun 2009 telah membuktikan bahwa graf lingkaran C_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n \equiv 0(\text{mod } 4)$.

Jika graf lingkaran C_n adalah graf harmonis ganjil, maka berdasarkan Teorema 2.2. C_n adalah graf bipartit. Jadi graf C_n tidak memuat lingkaran dengan banyaknya titik ganjil. Dengan demikian n adalah genap. Ketika $n = 4k + 2$ dengan k bilangan bulat positif, jika graf C_n adalah graf harmonis ganjil dengan fungsi pelabelan harmonis ganjil f, terdapat $2k + 1$ titik dengan label ganjil dan $2k + 1$ titik dengan label genap pada graf C_n. Penjumlahan bilangan ganjil dari $2k + 1$ adalah $\sum_{v \in V(C_n)} f(v)$ haruslah bilangan ganjil. Karena setiap titiknya berinsiden dengan 2 sisi, sehingga dalam menghitung label sisi, label titiknya digunakan sebanyak 2 kali. Dengan demikian total label sisi adalah

$$\sum_{uv \in E(C_n)} f^*(uv) = 2 \sum_{v \in V(C_n)} f(v) = (4k+2)^2.$$

Tetapi $\sum_{v \in V(C_n)} f(v)$ adalah bilangan genap, hal ini kontradiksi dengan pernyataan awal bahwa $\sum_{v \in V(C_n)} f(v)$ haruslah bilangan ganjil. Jadi terbukti bahwa graf C_n adalah graf harmonis ganjil jika dan hanya jika $n \equiv 0(\text{mod } 4)$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa untuk graf C_n dengan $n \equiv 0(\text{mod } 4)$, maka C_n merupakan graf harmonis ganjil. Oleh karena $n \equiv 0(\text{mod } 4)$ maka dapat dituliskan $n = 4k$, sehingga didapatkan banyaknya titik pada C_n adalah $4k$. Ambil sembarang titik pada C_n dan titik tersebut dimisalkan dengan V_1. Setelah itu dilanjutkan pada titik yang *adjacent* dengan V_1, diambil satu titik dan dimisalkan dengan V_2 begitu seterusnya hingga pada titik terakhir dimisalkan V_{4k}. Tanpa mengurangi keumuman kita labeli v_1 dengan $f(v_1)$ dengan label bernilai ganjil, kemudian kita labeli titik v_2. Oleh karena label (v_1, v_2) harus ganjil, maka v_2 yang dilabeli dengan $f(v_2)$ haruslah bernilai genap. Hingga pada v_{4k-2} kita labeli dengan label genap, sehingga v_{4k-1} haruslah bernilai ganjil. Oleh karena v_{4k-1} ganjil maka v_{4k} harus bernilai genap. Dari pelabelan titik terakhir diperoleh label sisi (v_{4k}, v_1) merupakan bilangan ganjil.

2.4.4 Keterkaitan Antara Pelabelan Harmonis, Pelabelan Harmonis Genap dan Pelabelan Harmonis Ganjil

Berdasarkan definisi dari pelabelan harmonis, pelabelan harmonis genap, dan pelabelan harmonis ganjil, terdapat graf harmonis yang juga graf harmonis genap yaitu graf C_n dengan n ganjil, terdapat graf harmonis yang juga graf harmonis ganjil yaitu graf tangga, tetapi tidak ada graf harmonis genap yang sekaligus graf harmonis ganjil dan sebaliknya. Sehingga diperoleh hubungan dari ketiga pelabelan tersebut yaitu pelabelan harmonis genap merupakan himpunan bagian dari pelabelan harmonis, pelabelan harmonis ganjil merupakan himpunan bagian dari pelabelan harmonis, dan pelabelan harmonis genap saling asing dengan pelabelan harmonis ganjil.

2.4.5 Hasil-hasil Pelabelan Harmonis Ganjil

Pada penelitian sebelumnya didapatkan beberapa teorema tentang pelabelan harmonis ganjil yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Adapun beberapa hasil penelitian tersebut telah dirangkum dan dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Hasil pelabelan harmonis ganjil penelitian terdahulu

Graf	Peneliti	Tahun
- Graf lingkaran $C_n, n \equiv 0(\text{mod } 4)$ - Graf komplit $K_n, n = 2$ - Graf komplit k-partit $K(n_1, n_2, ..., n_k), k = 2$ - Graf kincir angin $K_n^1, n = 2$	Liang dan Bai	2009
- Graf *shadow* $D_2(G)$ - Graf *split* $S'(G)$ - Graf bintang $K_{1,n}$	Vaidya dan Shah	2011
- Graf dumbel $D_{n,k,2}, n \equiv k \equiv 0(\text{mod } 4)$ - Graf tangga - Graf pohon palem	Saputri, dkk	2013
- Graf ular $kC_4, kC_8, k \geq 1$ - Graf gelang $C_4^{+(1,k)}, k \geq 1$	Alyani, dkk	2013
- Graf kincir angin Belanda $C_4^{(k)}, k \geq 1$ - Gabungan graf kincir angin Belanda $C_4^{(k)} \cup C_4^{(k)}, k \geq 1$	Firmansah dan Sugeng	2015
- Graf tangga *super subdivision* $C_{4,n} \oplus K_{1,m}$ - Graf *uniform fire crackers*	Jeyanthi, dkk	2015
- Graf kincir angin *double quadrilateral* $DQ^{(k)}, k \geq 1$	Firmansah dan Syaifuddin	2016
- Gabungan graf ular $kC_4 \cup kC_4, k \geq 1$ - Graf ular berlipat $kC_4(r), k \geq 1$ dan $r \geq 1$	Firmansah	2016
- *Plus graph* (Pl_n) - Graf $S(t.Pl_n)$ - Graf *path union* dari *plus graph* - Graf gabungan dari C_m dan *plus graph* (Pl_n) dengan menggunakan lintasan - Graf $P_n^t(t.n.Pl_n)$	Jeyanthi dan Philo	2016
- Graf hasil operasi gabungan graf ular berlipat $kC_4(r) \cup kC_4(r)$ dengan $k \geq 1$ dan $r \geq 1$ - Graf ular jaring $kL_{3,3}$ - Gabungan graf ular jaring $kL_{3,3} \cup kL_{3,3}$	Firmansah dan Yuwono	2017
- Graf $2S_n(C_{4,n})$	Amri, dkk	2018

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini ada dua metode yaitu metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) dan metode deduktif aksiomatik. Metode pendeteksian pola yaitu mencari suatu pola untuk dilakukan konstruksi rumusan pola pelabelan harmonis ganjil. Metode deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan penurunan teorema yang telah ada dan pemaparan definisi dalam pelabelan harmonis ganjil.

3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian yang akan dilakukan diuraikan secara sistematis sebagai berikut:

1. Penentuan Graf

   Tahap ini merupakan tahap pengumpulan dan penentuan graf-graf yang akan digunakan untuk dilabeli secara harmonis ganjil.
2. Penotasian Titik dan Sisi

   Setelah melakukan penotasian titik dan sisi, kemudian mendefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi pada graf-graf yang digunakan. Kemudian memformulasikan banyaknya himpunan titik dan sisi menjadi suatu rumus konstruksi pelabelan harmonis ganjil yang berlaku secara umum untuk graf-graf yang digunakan.
3. Pelabelan Titik dan Sisi

   Graf yang telah dipilih akan dilabeli titiknya terlebih dahulu dengan label bilangan bulat non negatif. Pemberian label titik maupun sisi tidak boleh ada nilai yang berulang. Batas nilai label yang digunakan yaitu $2q-1$ dengan $q=|E(G)|$.
4. Perhitungan dan Pemeriksaan Label Sisi

   Label titik yang sudah didapatkan akan mengakibatkan label sisi membentuk pola bilangan ganjil dengan batas nilai label yang digunakan yaitu $2q-1$ dengan

$q = |E(G)|$. Pada tahap ini setiap sisi akan dihitung dan diperiksa nilai label sisinya. Nilai label sisi didapatkan dari penjumlahan dua label titik yang terkait pada sisi tersebut. Jika didapatkan sisi yang memiliki nilai label sama, maka kembali ke langkah 3. Jika sudah tidak ada sisi yang memiliki nilai label sama, maka dilanjutkan ke langkah 5.

5. Perumusan dan Pembuktian Fungsi Pola Pelabelan Titik dan Sisi
   Hasil pelabelan yang telah didapatkan kemudian dibuktikan secara matematis dengan merumuskan fungsi pola pelabelan titik dan sisi. Jika sudah terbukti maka akan dibentuk sebuah teorema yang berlaku pada graf yang digunakan.

Adapun skema dari rancangan penelitian diberikan pada Gambar 3.4.

DAFTAR PUSTAKA

Alyani, F., F. Firmansah, W. Giyarti, dan K. A. Sugeng. 2013. The Odd Harmonious Labeling of kC_n-Snake Graphs. *Proceedings IndoMS International Conference on Mathemathics and Its Applications*. 225-230.

Amri, Z., A. Aulia, A. Syella, H. Pratamal, S. Ramadhani, dan Chairunnisa. 2018. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf $2S_n(C_{4,n})$. *Jurnal EduTech*. 4(1): 87-91.

Firmansah, F. 2016. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Gabungan Graf Ular dan Graf Ular Berlipat. *Prosiding Konferensi Nasional Matematika dan Pembelajarannya*. 12 Maret 2016. *ISSN*: 2502-6526.

Firmansah, F. dan K. A. Sugeng. 2015. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Kincir Angin Belanda dan Gabungan Graf Kincir Angin Belanda. *Magistra*. 94: 56-92.

Firmansah, F. dan M. R. Yuwono. 2017a. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Kelas Graf Baru Hasil Operasi Cartesian Product. *Jurnal Matematika Mantik*. 3(2): 87-95.

.... 2017b. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Kelas Graf Baru Hasil Operasi Gabungan. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY. ISBN*: 978-602.

Firmansah, F. dan M. W. Syaifuddin. 2016. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Graf Kincir Angin Double Quadrilateral. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*. 53-58.

.... 2018. Pelabelan Harmonis Ganjil pada Amalgamasi Graf Kincir Angin Belanda. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*. 4(1): 37-46.

Graham, R. L. and N. J. A. Sloane. 1980. On Additive bases and Harmonious Graphs. *SIAM J. Algebra Disc. Meth*. 4: 382-404.

Jeyanthi, P. dan S. Philo. 2016. Odd Harmonious Labeling of Some Cycle Related Graphs. *Proyecciones Journal of Matematics*, 35(1): 85-98.

Jeyanthi, P., S. Philo, dan M.K. Siddiqui. 2015. Odd Harmonious Labeling of Super Subdivision Graphs. *Proyecciones Journal of Matematics*, 38(1):

1-11.

Liang, Z. dan Z. Bai. 2009. On The Odd Harmonious Graphs with Applications. *J. Appl. Math. Comput*. 29: 105-116.

Saputri, G. A., K. A. Sugeng, dan D. Froncek. 2013. The Odd Harmonious Labeling of Dumbbell and Generalized Prims Graphs. *AKCE Int, J. Graphs Comb*. 10(2): 221-228.

Sarasija, P. B. dan R. Binthiya. 2011. Even Harmonious Graphs with Applications, Internat. *J. Comput. Sci. Infor. Security*. 9: 161-163.

Slamin. 2019. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Malang: Dream litera Buana.

Vaidya, S. K. dan N. H. Shah. 2011. Some New Odd Harmonious Graphs. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*. 1(1): 9-16.