POLINOMIAL KROMATIK DARI GRAF TERHUBUNG

SKRIPSI

Diajukan untuk Memenuhi Persyaratan Penyelesaian Program Sarjana Sains
Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Oleh :
Rina Kurniawati
NIM. 201810101036

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
Januari, 2004

MOTTO

Sebab itu janganlah kamu kuatir akan hari besok karena hari besok mempunyai kesusahannya sendiri. Kesusahan sehari cukuplah untuk sehari.

(Matius 6 : 34)

Hidup adalah penjumlahan semua pilihan yang ada.

(Albert Camus)

Karena bagiku hidup adalah Kristus dan mati adalah keuntungan.

(Filipi 1: 21)

PERSEMBAHAN

Kupersembahkan skripsi ini untuk :

1. Ayahanda Ramelan dan Ibunda Sunarti terimakasih atas nasehat, bimbingan, cinta dan kasih sayang yang tulus, motivasi serta pengorbanannya.
2. Abangku "Nowo Arif Kurniawan" terimakasih kesetiaan, kesabaran, kasih sayang dan motivasi yang telah diberikan selama mengerjakan skripsi ini.
3. Kedua adikku: Tri Sulistiningsih dan Samuel Agung Suretno terimakasih atas kasih sayang dan semangat yang sudah diberikan.
4. Keluarga Besar di " Gang Blangkon" terimakasih atas kasih sayang, dukungan dan perhatian yang sudah diberikan.
5. Almamaterku Fakultas MIPA Universitas Jember.

PERSEMBAHAN

Kupersembahkan skripsi ini untuk :

1. Ayahanda Ramelan dan Ibunda Sunarti terimakasih atas nasehat, bimbingan, cinta dan kasih sayang yang tulus, motivasi serta pengorbanannya.
2. Abangku "Nowo Arif Kurniawan" terimakasih kesetiaan, kesabaran, kasih sayang dan motivasi yang telah diberikan selama mengerjakan skripsi ini.
3. Kedua adikku: Tri Sulistiningsih dan Samuel Agung Suretno terimakasih atas kasih sayang dan semangat yang sudah diberikan.
4. Keluarga Besar di " Gang Blangkon" terimakasih atas kasih sayang, dukungan dan perhatian yang sudah diberikan.
5. Almamaterku Fakultas MIPA Universitas Jember.

DEKLARASI

Skripsi ini berisi hasil kerja / penelitian saya mulai bulan September 2003 sampai dengan Januari 2004. Bersama ini saya nyatakan bahwa isi Skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri kecuali jika disebutkan sumbernya dan Skripsi ini belum pernah diajukan pada institusi lain.

Jember, Januari 2004

Rina Kurniawati

ABSTRAK

"Polinomial Kromatik dari Graf Terhubung". Rina Kurniawati, 201810101036. Skripsi, Januari 2004, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Polinomial kromatik, $f(G, t)$ dari graf G adalah jumlah pewarnaan titik yang berbeda dari graf G dengan menggunakan t warna. Tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan polinomial kromatik dari graf terhubung khususnya graf lengkap, graf sikel, graf lintasaan dan graf pohon serta mengetahui sifat-sifat dari polinomial kromatik pada graf terhubung. Dari hasil pembahasan diperoleh bahwa polinomial kromatik dari graf terhubung dapat diperoleh dari penjumlahan polinomial kromatik dari beberapa graf lengkap.

Kata kunci : polinomial kromatik, pewarnaan titik, graf terhubung

PENGESAHAN

Skripsi ini telah dipertahankan di depan Tim penguji dan diterima oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

Hari : JUM'AT

Tanggal : 30 JAN 2004

Tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji,

Ketua (Dosen Pembimbing Utama)	Sekretaris (Dosen Pembimbing Anggota)
Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si NIP. 132 258 180	Rita Ratih Trimawarni, S.Si, M.Si NIP. 132 243 343
Anggota 1,	Anggota 2,
Drs. Moh. Hasan, M.Sc, Ph.D. NIP. 131 759 844	Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si NIP. 132 257 933

Mengesahkan,

PLH Dekan FMIPA Universitas Jember

Drs. Sujito, Ph.D

NIP. 131 756 172

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa, karena atas berkat dan karunia-Nya, maka penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "**Polinomial Kromatik dari Graf Terhubung**".

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan sampai terselesaikannya skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Bapak Drs. Kusno, DEA, Ph.D selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Jember.
2. Ibu Kristiana Wijaya, S.Si, M.Si selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ibu Rita Ratih Trimawarni, S.Si, M.Si selaku Dosen Pembimbing Anggota, atas bimbingan dan saran-sarannya dalam penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Drs. Moh. Hasan, M.Sc, Ph.D dan Ibu Agustina Pradjaningsih, S.Si, M.Si selaku Dosen Penguji Skripsi, atas segala pertanyaan dan masukan-masukannya.
4. Keluarga besar di "Gang Blangkon": Bapak Muhadi dan Ibu Samsikin, mbak Yuli, mas Hari, Kezia, mbak dan mas-masku yang selalu memberiku semangat, kasih sayang dan perhatian yang selalu membuatku tetap sabar, sobat-sobatku: Mas Adi, Nanik, Ita, Kiki, Wiwit dan Eli, teman-temanku di KS_18 (mbak Vira, Dewi, mbak Mifta), Himatika dan angkatan 2000 terimakasih atas dukungan dan kebersamaannya selama ini.
5. Almamaterku Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember.

Penulis sadar, bahwa dalam penulisan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan pada umumnya dan matematika pada khususnya.

Jember, Januari 2004

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori Graf merupakan salah satu bidang matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh Leonardo Euler, seorang ahli matematika asal Swiss pada tahun 1736 [1]. Dalam teori graf dikenal beberapa problem pewarnaan titik [1, 2, 4, 5].

Pada prinsipnya *pewarnaan titik* pada graf G adalah pemberian warna pada setiap titik di G, sedemikian hingga setiap dua titik yang bertetangga mendapat warna yang berbeda. Jika suatu graf berlabel G diwarnai dengan sejumlah t warna, maka salah satu pertanyaan yang menarik adalah ada berapa banyak cara untuk mewarnai graf berlabel G dengan t warna yang disediakan. Permasalahan ini disebut *polinomial kromatik* dari graf G yang dinotasikan dengan $f(G,t)$. Dapat dikatakan bahwa polinomial kromatik merupakan banyaknya cara mengurutkan t warna (permutasi) pada pewarnaan titik graf berlabel.

Polinomial kromatik ini dikenalkan oleh Birkhof dan Lewis pada tahun 1946 [1]. Kajian tentang polinomial kromatik telah dibahas oleh beberapa ilmuwan, diantaranya Read dan Skiena. Read dan Skiena telah mengkaji polinomial kromatik dari beberapa kelas graf, antara lain: graf lengkap, graf sikel dan graf roda [6].

1.2. Permasalahan

Permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana polinomial kromatik dari graf terhubung, khususnya graf lengkap, graf sikel, graf lintasan, dan graf pohon, bagaimana mendapatkan polinomial kromatik dari graf terhubung melalui polinomial kromatik dari graf lengkap serta mengetahui sifat-sifat polinomial kromatik dari graf terhubung.

1.3. Batasan Masalah

Dalam skripsi ini graf yang dikaji adalah graf hingga, sederhana yang terhubung. Pewarnaan graf yang digunakan adalah pewarnaan titik pada graf berlabel.

1.4. Tujuan

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mendapatkan polinomial kromatik dari graf terhubung, khususnya graf lengkap, graf sikel, graf lintasan dan graf pohon, mendapatkan polinomial kromatik dari graf terhubung melalui polinomial kromatik dari graf lengkap serta mengetahui sifat-sifat polinomial kromatik dari graf terhubung.

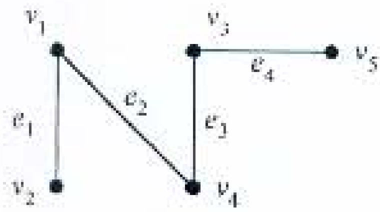
1.5. Manfaat

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini yaitu dapat menentukan banyaknya cara mewarnai suatu graf. Hal ini dapat diterapkan pada masalah penjadwalan, yaitu untuk menentukan banyaknya jadwal yang bisa dibuat. Misalnya pada penjadwalan kuliah, penjadwalan pemberangkatan kereta api dan lain-lain.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Pengertian dan Konsep Dasar Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E), dimana $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,\ldots,v_n\}$ adalah sebuah himpunan hingga tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_m\}$ adalah himpunan hingga dari elemen-elemen yang merupakan pasangan tak terurut dari titik u dan v di V yang disebut *sisi*, yaitu $e=(u,v)$ atau biasa ditulis $e=uv$ [2]. Sebagai contoh, Gambar 2.1 merupakan graf dengan himpunan titik $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$.



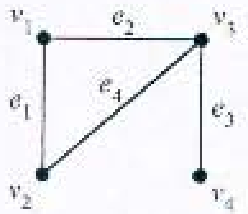
Gambar 2.1 Graf dengan 5 titik dan 4 sisi

Order dari graf G adalah banyaknya titik yang ada di G. Graf yang mempunyai order satu dan tidak mempunyai sisi dinamakan *graf trivial*. Sedangkan graf yang mempunyai order lebih dari satu dinamakan *graf tak trivial*. Graf yang mempunyai order hingga dinamakan *graf hingga*. Sebagai contoh, pada Gambar 2.1 adalah graf yang berorder 5.

Sisi yang menghubungkan dua titik yang sama yaitu $e=uu$ disebut *loop*. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebut dinamakan *sisi rangkap* (*multiple edges*). Sebagai contoh, pada Gambar 2.2 sisi e_5 adalah loop sedangkan sisi e_2 dan e_3 adalah sisi rangkap. Graf yang tidak mempunyai loop dan sisi rangkap disebut *graf sederhana* [2]. Gambar 2.1 adalah contoh graf sederhana.

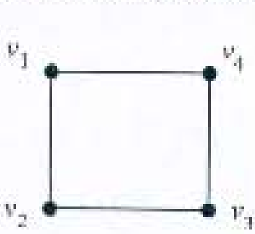
Gambar 2.2 Graf dengan sisi rangkap dan loop

Misal u dan v adalah titik-titik pada graf G dan $e = uv$ adalah sisi di G, maka titik u dan v dikatakan bertetangga (*adjacent*), sedangkan sisi e dikatakan menempel (*incident*) pada titik u dan v atau dapat dikatakan titik u dan v menempel (*incident*) pada sisi e. Sebagai contoh, pada Gambar 2.3, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2 dan v_3, tetapi titik v_4 tidak bertetangga dengan titik v_1 dan v_2, sedangkan titik v_1 dan v_2 menempel pada sisi e_1.



Gambar 2.3 Graf untuk mengilustrasikan *adjacent* dan *incident*

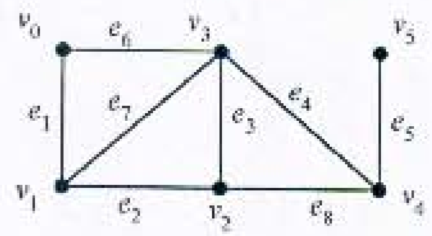
Banyaknya sisi yang menempel (*incident*) pada titik v di G disebut *derajat* (*degree*) titik v dan dinotasikan dengan deg (v). Jika setiap titik dalam G mempunyai derajat yang sama, yaitu r, maka graf G dinamakan *graf reguler* atau *r-reguler*. Pada Gambar 2.4, graf G adalah graf *2-reguler*.



Gambar 2.4 Graf 2-reguler

Jalan (*walk*) W dari titik a ke b pada graf G adalah barisan yang terdiri dari titik dan sisi di G yang diawali dan diakhiri dengan titik, yaitu: $W : a = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n = b$ $(n \geq 0)$ dimana suku-sukunya bergantian antara titik dan sisi, sedemikian hingga (v_i, v_{i+1}) adalah sisi di G untuk $0 \leq i \leq n$-1. Jalan dari a ke b dikatakan tertutup jika $a = b$ dan terbuka jika $a \neq b$. Sebagai contoh, pada Gambar 2.5, $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_7, v_1, e_1, v_0$ adalah jalan tertutup dan $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_2, v_1, e_7, v_3$ adalah jalan terbuka.

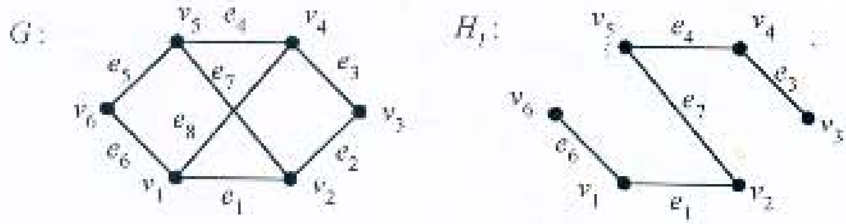
Jejak (*trail*) adalah jalan yang barisan sisi-sisinya tidak ada yang berulang. Sedangkan jalan yang barisan titik-titiknya berbeda dinamakan *lintasan* (*path*). Suatu lintasan yang tertutup dinamakan *sikel* (*cycle*). Pada Gambar 2.5, jalan $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_7, v_1$ adalah jejak, sedangkan $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_5$ adalah lintasan, dan $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_6, v_0$ adalah sikel.

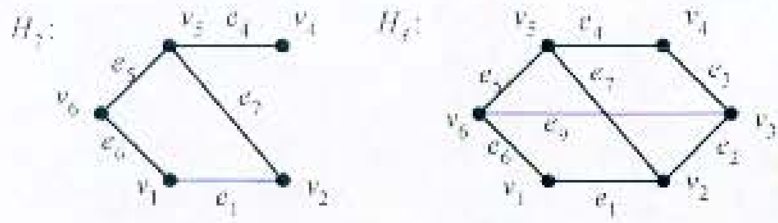


Gambar 2.5 Graf untuk ilustrasi jalan, jejak, lintasan dan sikel

2.2 Graf Bagian

Graf H disebut *graf bagian* (*subgraph*) dari graf G, ditulis $H \subseteq G$, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika $H \subseteq G$ dan $V(H) = V(G)$, maka H disebut *graf bagian perentang* (*spanning subgraph*) dari G. Pada Gambar 2.6 graf H_1 adalah graf bagian perentang dari graf G, graf H_2 adalah graf bagian (bukan perentang) dari graf G, sedangkan graf H_3 bukan graf bagian dari graf G karena ada sisi $e_9 = v_3v_6$ di $E(H_3)$ yang bukan elemen dari $E(G)$.

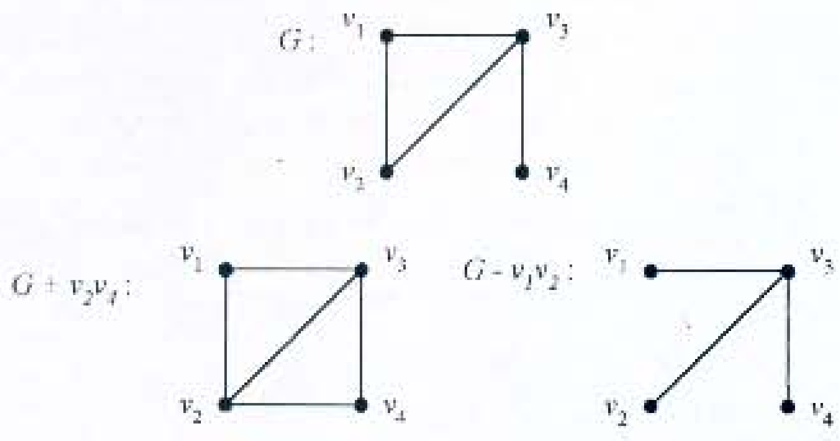




Gambar 2.6 Graf bagian dan graf bagian perentang

Jika u dan v adalah titik-titik yang tidak saling bertetangga pada graf G, maka graf $G - e$, dimana $e = uv$, merupakan graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G) \cup \{e\}$. Dengan kata lain, $G \subseteq G + e$. Sedangkan graf $G : u = v$ merupakan graf dengan himpunan titik $V(G : u = v) = V(G) - \{v\}$ dan $E(G : u = v) = \{e \in E(G) | e \text{ tidak menempel pada } v\} \cup \{uw \mid vw \in E(G), w \in V(G)\}$.

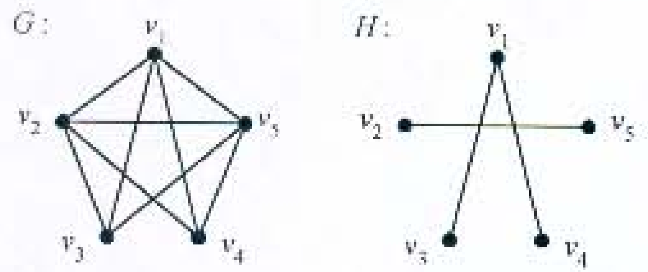
Misal u dan v adalah titik-titik yang saling bertetangga di G, maka graf $G - e$, dimana $e = uv$, merupakan subgraf dari G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G) - \{e\}$. Jika $v \in V(G)$ dengan G graf tak trivial, maka $G - v$ merupakan subgraf dari G dengan himpunan titik $V(G - v) = V(G) - \{v\}$ dan $E(G - v) = \{e \in E(G) | e \text{ tidak menempel pada } v\}$ [2]. Gambar 2.7 adalah contoh graf $G + v_2v_4$, graf $G : v_2 = v_4$, graf $G - v_1v_2$ dan graf $G - v_1$.



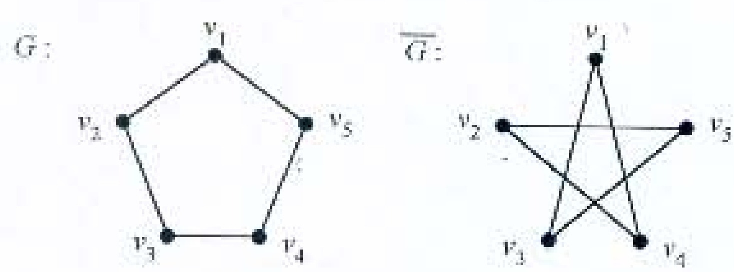
Gambar 2.7 Graf $G + uv$, graf $G : u - v$, graf $G - uv$ dan graf $G - v$

Sebuah graf dikatakan *terhubung* jika setiap dua titik u dan v di G, terdapat lintasan di G yang menghubungkan ke dua titik tersebut. Sedangkan G dikatakan tak terhubung jika ada dua titik u dan v di G yang tidak terdapat lintasan. *Komponen* dari graf G adalah subgraf terhubung maksimal dari G. Jadi setiap graf terhubung hanya mempunyai satu komponen dan graf tak terhubung mempunyai sedikitnya dua komponen. Pada Gambar 2.8, G adalah graf terhubung dan H adalah graf tak terhubung dengan dua komponen.

Misal G adalah graf sederhana. *Komplemen* G, dilambangkan $\overline{G}$, adalah graf sederhana yang himpunan titiknya sama dengan himpunan titik G, dan setiap dua titik u dan v di $\overline{G}$ bertetangga jika dan hanya jika u dan v di G tidak bertetangga. Contoh graf dan komplemennya diberikan pada Gambar 2.9.



Gambar 2.8 Graf terhubung dan graf tak terhubung

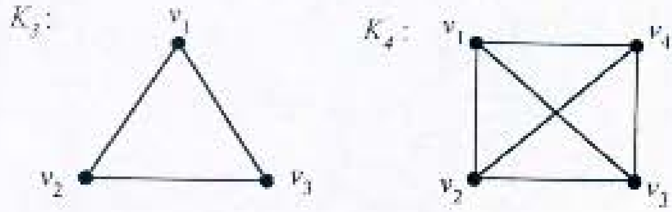


Gambar 2.9 Graf dan komplemennya

2.3 Kelas-kelas Graf

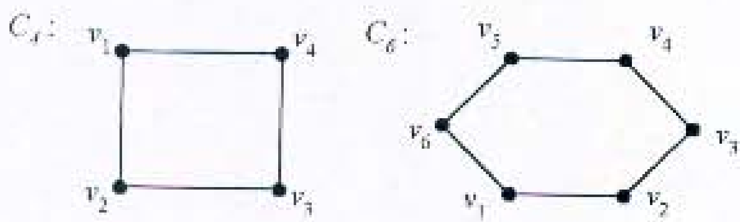
Graf terbagi dalam beberapa kelas. Pada skripsi ini kelas graf yang dibahas adalah graf lengkap, graf sikel, graf lintasan dan graf pohon.

Graf lengkap adalah graf dimana setiap dua titik yang berbeda di G bertetangga. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n. Gambar 2.10 adalah graf lengkap K_3 dan K_4.



Gambar 2.10 Graf lengkap K_3 dan K_4

Graf sikel adalah graf yang terdiri dari satu sikel. Graf sikel dengan n titik dinotasikan dengan C_n. Contoh graf sikel C_4 dan C_6 ditunjukkan pada Gambar 2.11.

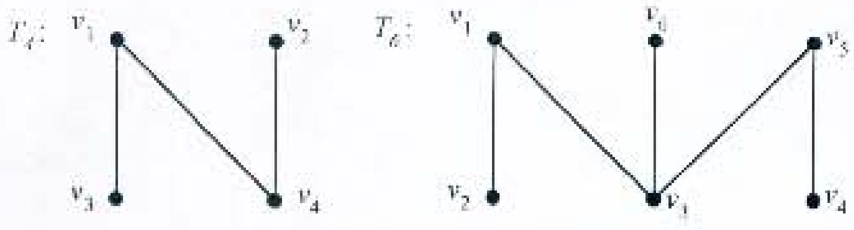


Gambar 2.11 Graf sikel C_4 dan C_6

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n [5]. Gambar 2.12 adalah graf lintasan P_3 dan P_4.

Gambar 2.12 Graf lintasan P_3 dan P_4

Graf pohon adalah graf terhubung yang tidak memuat sikel. Graf pohon dengan n titik dinotasikan dengan T_n. Pada graf pohon selalu ada minimal dua titik yang berderajat satu [1,2]. Pada Gambar 2.13, T_4 adalah salah satu contoh graf pohon dengan 4 titik dan T_6 adalah salah satu contoh graf pohon dengan 6 titik.



Gambar 2.13 Graf pohon T_4 dan T_6

2.4 Polinomial (Suku Banyak)

Polinomial $f(x)$ dengan koefisien dalam bilangan bulat $\mathbf{Z}$ adalah sebuah penjumlahan formal tak hingga

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots,$$

dengan $a_i \in \mathbf{Z}$ dan $a_i = 0$ untuk semua i kecuali sejumlah hingga i. Unsur-unsur a_i disebut koefisien-koefisien dari $f(x)$. Jika untuk suatu $i > 0$ dengan $a_i \neq 0$ dan $a_j = 0$ untuk setiap $j > i$, maka $f(x)$ dikatakan berderajat atau berorder i. Jika untuk setiap $i > 0$, $a_i = 0$, maka $f(x)$ disebut *polinomial konstan* dan a_0 disebut *suku konstan*. Dengan demikian derajat dari polinomial konstan adalah 0 [3]. Untuk mempermudah bekerja dengan polinomial, kita sepakati bahwa jika $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$ mempunyai $a_i = 0$ untuk $i > n$, maka kita dapat menulis $f(x)$ dengan $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$. Sebagai contoh, polinomial:

$$4x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 7x + 10$$

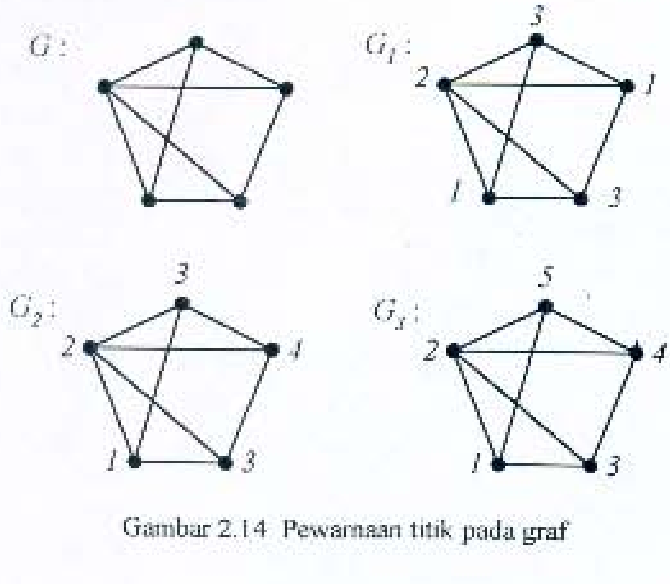
adalah polinomial berderajat 5 dan suku konstannya adalah 10.

2.5 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf merupakan pemberian warna pada salah satu elemen-elemennya (titik atau sisi), sehingga elemennya dapat diwarnai dengan warna yang berbeda menggunakan aturan tertentu.

2.5.1 Pewarnaan titik

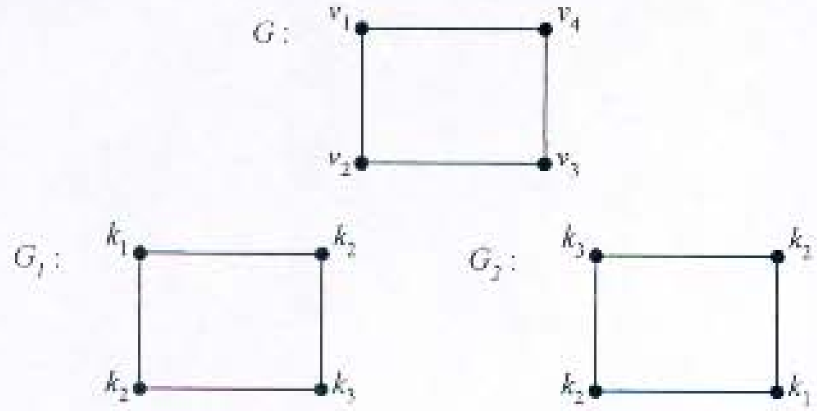
Pewarnaan titik (untuk selanjutnya disebut pewarnaan) pada graf G adalah suatu pemetaan f dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan warna $\{1, 2, 3, \ldots, t\}$ sedemikian hingga $f(u) \neq f(v)$, untuk setiap pasangan titik (u,v) di $E(G)$ atau titik-titik yang bertetangga, dimana $u \neq v$. Dengan kata lain pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian warna untuk setiap titik dari graf G, sedemikian hingga setiap titik yang bertetangga mempunyai warna yang berbeda [4]. *Bilangan kromatik* dari graf G, $\chi(G)$ didefinisikan sebagai jumlah warna minimal yang diperlukan untuk mewarnai titik pada graf G [1]. Dengan kata lain, jika $\chi(G) = n$ maka titik-titik pada graf G dapat diwarnai dengan n warna, tetapi tidak dapat diwarnai dengan n-1 warna. Pewarnaan titik pada suatu graf tidak tunggal. Sebagai contoh, pada Gambar 2.14, Graf G dapat diwarnai dengan 3 cara seperti yang ditunjukkan pada graf G_1 dengan 3 warna, graf G_2 dengan 4 warna dan graf G_3 dengan 5 warna, dengan bilangan kromatik $\chi(G) = 3$.



Gambar 2.14 Pewarnaan titik pada graf

2.5.2 Polinomial Kromatik

Pada pembahasan mengenai polinomial kromatik, pewarnaan titik yang dipakai adalah pewarnaan titik pada graf berlabel. Graf berlabel adalah graf yang setiap titiknya diberi label. Dua pewarnaan pada graf berlabel G dikatakan *berbeda* jika pada kedua pewarnaan tersebut sedikitnya satu titik di G berbeda warna. Pada Gambar 2.15, G_1 dan G_2 adalah contoh dua pewarnaan yang berbeda. Jika label pada setiap titik di G dihilangkan atau G tidak diberi label, maka pewarnaan G_1 dan G_2 dikatakan sama.



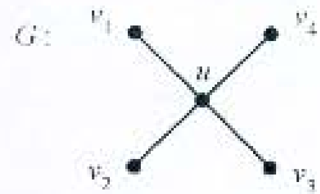
Gambar 2.15 Dua pewarnaan yang berbeda pada graf berlabel.

Polinomial kromatik (*chromatic polynomial*) $f(G, t)$ dari graf G adalah banyaknya cara untuk mewarnai graf G dengan t warna. Minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai graf G adalah sejumlah bilangan kromatiknya, yaitu $t = \chi(G)$ Jika banyaknya warna (t) yang dipakai untuk mewarnai graf G kurang dari bilangan kromatiknya, yaitu $t < \chi(G)$ maka $f(G, t) = 0$. Jika banyaknya warna (t) adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian hingga $f(G, t) > 0$, maka t adalah bilangan kromatik dari graf G [1].

Teorema 2.1. Untuk setiap graf terhubung G, $f(G,t)$ adalah polinomial dalam t

Berikut akan diberikan beberapa contoh untuk mencari polinomial kromatik dari suatu graf.

Contoh 2.1. Dapatkan polinomial kromatik dari graf G pada Gambar 2.16.



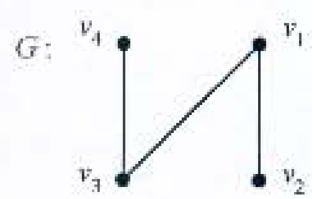
Gambar 2.16 Graf dengan 5 titik dan 4 sisi

Solusi:

Jika kita warnai graf G pada Gambar 2.16 dengan t warna, dimana $t \geq \chi(G) = 2$, maka ada t cara untuk mewarnai titik u. Sedangkan untuk titik v_1, v_2, v_3 dan v_4 masing-masing dapat diwarnai dengan $(t\text{-}1)$ cara, karena titik v_1, v_2, v_3 dan v_4 bertetangga dengan titik u tetapi titik v_1, v_2, v_3 dan v_4 tidak saling bertetangga. Jadi polinomial kromatik dari graf G pada Gambar 2.16 adalah

$$f(G, t) = t\,(t\text{-}1)^4$$

Contoh 2.2. Dapatkan polinomial kromatik dari graf G pada Gambar 2.17.



Gambar 2.17 Graf dengan 4 titik dan 3 sisi.

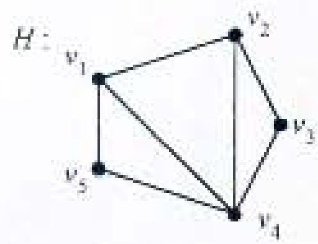
Solusi:

Jika kita mewarnai graf G pada Gambar 2.17 dengan t warna, dimana $t \geq \chi(G) = 2$, maka titik v_1 dapat diwarnai dengan t cara. Karena titik v_2 dan v_3 bertetangga dengan titik v_1, maka titik v_2 dan v_3 harus diwarnai berbeda dengan titik v_1. Dan juga, karena v_2 tidak bertetangga dengan v_3, maka v_2 dan v_3 boleh diwarnai sama. Dengan demikian, untuk mewarnai titik v_2 dan v_3 ada t-1 cara. Selanjutnya, karena titik v_4 bertetangga dengan titik v_3, maka v_4 harus diwarnai berbeda dengan titik v_3 tetapi boleh diwarnai sama dengan titik v_1, karena v_4 tidak bertetangga dengan v_1. Jadi, ada t-1 cara untuk mewarnai titik v_2. Sehingga polinomial kromatik dari graf G pada Gambar 2.17 adalah

$$f(G, t) = t\,(t-1)^3$$

Contoh 2.3. **a.** Dapatkan polinomial kromatik dari graf H pada Gambar 2.18.

b. Jika diberikan $t = 3$ warna, yaitu merah (M), Biru (B) dan Kuning (K), hitung banyaknya cara untuk mewarnai graf H dan sebutkan cara-cara pewarnaan tersebut.



Gambar 2.18 Graf dengan 5 titik dan 7 sisi

Solusi:

a. Jika graf H pada Gambar 2.18 diwarnai dengan t warna, dimana $t \geq \chi(H) = 3$, maka untuk mendapat polinomial kromatik dari graf H, kita akan mempertimbangkan beberapa kasus berikut ini.

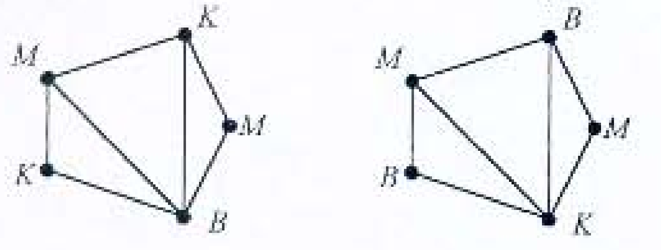
- Jika titik v_1 dan v_3 diwarnai sama dan titik v_2 dan v_5 diwarnai sama, maka ada t cara untuk mewarnai titik v_1 dan v_3. Karena titik v_2 dan v_5 harus berbeda warna dengan titik v_1 dan v_3, maka untuk mewarnai titik v_2 dan v_5 ada t-1 cara. Sedangkan untuk mewarnai titik v_4 ada t-2 cara. Jadi, ada $t(t-1)(t-2)$ cara pewarnaan pada kasus ini.
- Jika titik v_1 dan v_3 diwarnai sama dan titik v_2 dan v_5 diwarnai berbeda, maka ada t cara untuk mewarnai titik v_1 dan v_3, ada t-1 cara untuk mewarnai titik v_2 dan ada t-2 cara untuk mewarnai titik v_5. Karena titik v_4 harus diwarnai berbeda dengan titik v_1, v_2, v_3 dan v_5, maka ada t-3 cara untuk mewarnai titik v_4. Jadi, ada $t(t-1)(t-2)(t-3)$ cara pewarnaan pada kasus ini.

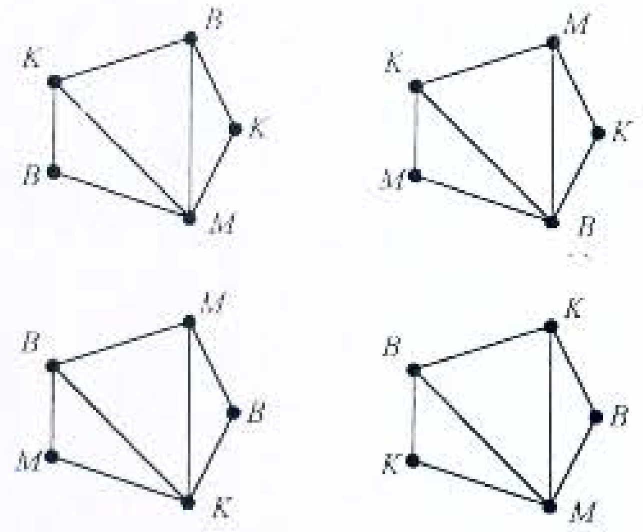
- Jika titik v_1 dan v_3 diwarnai berbeda dan titik v_2 dan v_5 diwarnai sama, maka ada t cara untuk mewarnai titik v_2 dan v_5, ada t-1 cara untuk mewarnai titik v_1 dan ada t-2 cara untuk mewarnai titik v_3. Karena titik v_4 bertetangga dengan titik v_1, v_2, v_3 dan v_5, maka ada t-3 cara untuk mewarnai titik v_4. Jadi, ada $t(t-1)(t-2)(t-3)$ cara pewarnaan pada kasus ini.
- Jika titik v_3 dan v_5 diwarnai sama, maka ada t cara untuk mewarnai titik v_3 dan v_5. Karena titik v_1 harus diwarnai berbeda dengan titik v_5, maka ada t-1 cara untuk mewarnai titik v_1. Titik v_2 harus berbeda warna dengan titik titik v_1 dan v_3, sehingga titik v_2 dapat diwarnai dengan t-2 cara. Titik v_4 harus diwarnai berbeda dengan titik v_1, v_2, v_3 dan v_5, maka titik v_4 dapat diwarnai dengan t-3 cara. Jadi, ada $t(t-1)(t-2)(t-3)$ cara pewarnaan pada kasus ini.
- Jika semua titik diwarnai berbeda, maka ada t cara untuk mewarnai titik v_1, ada t-1 cara untuk mewarnai titik v_2, ada t-2 cara untuk mewarnai titik v_3, ada t-3 cara untuk mewarnai titik v_4 dan ada t-4 cara untuk mewarnai titik v_5. Jadi ada $t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)$ cara pewarnaan pada kasus ini.

Polinomial kromatik dari graf H merupakan penjumlahan dari polinomial kromatik dari kelima kasus di atas. Dengan demikian polinomial kromatik dari graf H pada Gambar 2.18 adalah

$$
\begin{aligned}
f(H, t) &= t(t-1)(t-2) + t(t-1)(t-2)(t-3) + t(t-1)(t-2)(t-3) + t(t-1)(t-2)(t-3) \\
&\quad + t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) \\
&= t(t-1)(t-2)^3.
\end{aligned}
$$

b. Jika t = 3 warna, maka banyaknya cara untuk mewarnai graf H pada Gambar 2.18 adalah 6 cara. Keenam cara tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.19.





Gambar 2.19 Cara Pewarnaan Graf H dengan 3 Warna

BAB IV
KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka kesimpulan yang dapat diambil adalah:

1. Polinomial kromatik dari graf lengkap, graf sikel dan graf pohon berturut-turut adalah $f(K_n, t) = t(t-1)(t-2)...(t-n+1)$, $f(C_n, t) = (t\text{-}1)^n + (\text{-}1)^n (t\text{-}1)$ dan $f(G, t) = t\,(t\text{-}1)^{n-1}$.
2. Secara umum polinomial kromatik dari suatu graf terhubung dengan n titik dan m sisi dapat diperoleh dari penjumlahan polinomial kromatik dari beberapa graf lengkap, yaitu:

$$f(G, t) = f(K_n, t) + \left(\frac{n(n-1)}{2} - m\right) f(K_{n-1}, t) + \sum_{i=1}^{n-3} a_i f(K_{n-(i+1)}, t)$$

untuk suatu $a_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n\text{-}3$

4.2 Saran

Penelitian mengenai polinomial kromatik dari suatu graf ini dapat dikembangkan pada graf lainnya, misalnya polinomial kromatik pada graf roda, graf bipartit lengkap, graf bipartit dan sebagainya. Sedangkan penelitian mengenai sifat-sifat polinomial kromatik dari suatu graf dapat dikembangkan untuk graf tak terhubung.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Chartrand, Gary dan Oellermann, Orthurd R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. USA: McGraw-Hill, Inc.

[2]. Chartrand, Gary dan Lesniak, Linda. 1996. *Graph and Digraphs*. London: Chapman and Hall.

[3]. Fraleigh, John B. 1994. *A first Course In Abstract Algebra*. 5th edition.USA: Addison-wesley Publishing Company, Inc.

[4]. Grimaldi, Ralph P. 1999. *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*. NewYork: Addison-Wesley Publishing Company.

[5]. Wilson, Robin J dan Watkins, John J. *Graph An Introductory Approach*. Newyork: John Wiley and Sons, Inc.

[6]. Mathworld.wolfram.com. *Eric Weisstein's World of Mathematics*.