NILAI KETAKTERATURAN TITIK JARAK SATU *INCLUSIVE* PADA GRAF *BROOM* $(Br_{n,m})$, *BANANA TREE* $(B_{n,m})$ DAN *FIRECRACKER* $(F_{n,m})$

SKRIPSI

Oleh

Ade Rizky Savitri
NIM 141810101037

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

NILAI KETAKTERATURAN TITIK JARAK SATU *INCLUSIVE* PADA GRAF *BROOM* ($Br_{n,m}$), *BANANA TREE* ($B_{n,m}$) DAN *FIRECRACKER* ($F_{n,m}$)

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan studi pada Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Ade Rizky Savitri
NIM 141810101037

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2018

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang serta sholawat dan salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, penulis persembahkan skripsi ini sebagai ungkapan kebahagiaan dan rasa terima kasih kepada:

1. Kedua orang tuaku Ayahanda M. Tasrif dan Ibunda Rubaiyah serta kedua adikku Azzahra Nuril Firdaus dan Anistighfarina Qurota A'yun yang telah mendukung dan memberikan doa, kasih sayang, motivasi, dan senyuman yang selalu menguatkan disetiap perjalanan hidup saya;
2. Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbimg Anggota.
3. Seluruh guru dan dosen yang telah memberikan banyak ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Almamater Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember, SMA Negeri 2 Jember, SMP Negeri 1 Jember, dan SD Negeri Kepatihan 1 Jember.

MOTO

"Boleh jadi kamu membenci sesuatu padahal ia amat baik bagimu. Dan boleh jadi kamu mencintai sesuatu padahal ia buruk bagimu. Sesungguhnya Allah maha mengetahui sedangkan kamu tidak mengetahui"
(QS. Al-Baqarah:216)[1]

"Janganlah membanggakan dan menyombongkan diri dari apa-apa yang kita peroleh, turut dan ikutilah ilmu padi semakin berisi makin tunduk dan bersyukurlah kepada kita Allah SWT "[2]

"Allah akan meningkatkan derajat orang-orang yang beriman diantara kamu dan orang-orang yang memiliki ilmu pengetahuan"
(QS. Al-Mujadillah:11)[3]

"Man Jadda Wa Jadda, barang siapa yang bersungguh-sungguh akan mendapatkannya"[4]

---

[1]tafsirq.com
[2]ar.savitri
[3]bacaanmadani.com
[4]kompasiana.com

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ade Rizky Savitri

NIM : 141810101037

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul ”Nilai Ketakteraturan Titik Jarak Satu *Inclusive* Pada Graf *Broom*$(Br_{n,m})$, *Banana Tree*$(B_{n,m})$ dan *Firecracker* $(F_{n,m})$” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi mana pun, dan isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juli 2018

Yang menyatakan,

Ade Rizky Savitri

NIM 141810101037

SKRIPSI

NILAI KETAKTERATURAN TITIK JARAK SATU *INCLUSIVE* PADA GRAF *BROOM* ($Br_{n,m}$), *BANANA TREE* ($B_{n,m}$) DAN *FIRECRACKER* ($F_{n,m}$)

Oleh

Ade Rizky Savitri
NIM 141810101037

Pembimbing

Dosen Pembimbing Utama	:	Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.
Dosen Pembimbing Anggota	:	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Nilai Ketakteraturan Titik Jarak Satu Inclusive Pada Graf *Broom* $(Br_{n,m})$, *Banana Tree* $(B_{n,m})$, dan *Firecracker* $(F_{n,m})$" karya Ade Rizky Savitri telah diuji dan disahkan pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Tim Penguji :

Ketua,	Anggota I,
Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si.	Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si.
NIP. 19740813 200003 2 004	NIP. 19861014 201404 1 001
Anggota II,	Anggota III,
Kusbudiono, S.Si., M.Si.	Bagus Juliyanto, S.Si., M.Si.
NIP. 19770430 200501 1 001	NIP. 19800702 200312 1 001

Mengesahkan

Dekan,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 19610204 198711 1 001

RINGKASAN

Nilai Ketakteraturan Titik Jarak Satu Inclusive Pada Graf *Broom* $(Br_{n,m})$, ***Banana Tree*** $(B_{n,m})$, **dan *Firecracker*** $(F_{n,m})$; Ade Rizky Savitri, 141810101037; 2018: 35 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pelabelan suatu graf merupakan pemetaan dari elemen-elemen graf yaitu titik, sisi ataupun keduanya ke bilangan (biasanya) bulat positif dengan syarat tertentu. Pelabelan graf berdasarkan domain pemetaannya dibedakan menjadi pelabelan titik *(vertex labeling)*, pelabelan sisi *(edge labeling)*, dan pelabelan total *(total labeling)*. Penjumlahan dari label yang terdapat pada titik dari suatu graf disebut bobot titik.

Slamin *dkk* (2014) memperkenalkan konsep baru dari pelabelan tidak teratur yang evaluasinya berdasarkan tetangga dari sebarang titik pada suatu graf G. Pelabelan tersebut diberi nama pelabelan titik tidak teratur jarak d. Notasi d menunjukkan jarak titik yang digunakan dalam suatu penelitian. Dikatakan tidak teratur dapat dilihat dari label titik yang digunakan boleh berulang. Tahun 2016, dengan konsep yang sama, Slamin *dkk* memperkenalkan pelabelan titik tidak teratur jarak d *inclusive*. Perbedaan dari pelabelan titik tidak teratur jarak d *inclusive* dan pelabelan titik tidak teratur jarak d terletak pada cara mendapatkan bobot suatu titik pada graf G. Pelabelan titik tidak teratur jarak d *inclusive* yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan himpunan titik pada graf G terhadap himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, .., k\}$ sedemikian sehingga menghasilkan bobot berbeda di setiap titiknya. Bobot titik x dapat dirumuskan dengan $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{u:1\leq d(u,x)\leq d} \lambda(u)$. Nilai minimum dari label terbesar k merupakan nilai ketakteraturan titik jarak d *inclusive* yang dinotasikan dengan $\overline{\mathrm{dis}_\mathrm{d}}(G)$. Jarak yang digunakan dalam pelabelan ini yaitu jarak satu sehingga dapat dinotasikan dengan $\overline{\mathrm{dis}_1}(G)$ atau dapat dinotasikan dengan $\overline{\mathrm{dis}}(G)$. Slamin (2016) juga menentukan batas bawah nilai $\overline{\mathrm{dis}}$ suatu graf G yang evaluasinya berdasarkan derajat terbesar dan derajat terkecil. Misalkan G merupakan graf terhubung dengan n titik dengan derajat terkecil δ ,derajat terbesar Δ, maka $\overline{\mathrm{dis}}(G) \geq \left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil$. Dalam pelabelan ini, tidak semua graf dapat dilabeli dengan pelabelan titik tidak teratur jarak satu *inclusive*. Suatu graf G memiliki nilai $\overline{\mathrm{dis}} = \infty$ jika dan hanya jika terdapat dua titik yang berbeda $u, v \in V(G)$

dengan $\{u\} \cup N_{G(u)} = \{v\} \cup N_{G(v)}$.

Pada penelitian ini, akan dicari nilai ketakteraturan titik jarak satu pada graf *broom* $(Br_{n,m})$, graf *banana tree* $(B_{n,m})$ dan graf *firecracker* $(F_{n,m})$. Pada graf $(Br_{n,m})$ dengan $n = 3$ dan $m \geq 3$ menghasilkan nilai $\overline{\mathrm{dis}}(Br_{3,m}) = m$. Pada graf *banana tree* mengasilkan dua nilai ketakteraturan titik jarak satu yaitu pertama untuk $(B_{n,m})$ dengan $n = 2$ dan $m = 3$ menghasilkan nilai $\overline{\mathrm{dis}}(B_{2,3}) = 4$, sedangkan yang kedua yaitu untuk $(B_{n,m})$ dengan $n = 2$ dan $m \geq 4$ menghasilkan nilai $\overline{\mathrm{dis}}(B_{2,m}) = m$. Selanjutya untuk graf *firecracker* $F_{n,m}$ dengan $n \geq 3$ dan $m = 3$ menhasilkan nilai $\overline{\mathrm{dis}}(F_{n,3}) = n + 1$.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ”Nilai Ketakteraturan Titik Jarak Satu *Inclusive*”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Penetahuan Alam Universitas Jember.

Penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Allah S.W.T yang telah memberikan segala sesuatu yang saya butuhkan;
2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
4. Dr. Kristiana Wijaya, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama dan Ikhsanul Halikin, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
5. Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji I dan Bagus Juliyanto, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji II yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyempurnaan skripsi ini;
6. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan selama perkuliahaan;
7. Dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
8. Ayahanda tercinta M. Tasrif dan Ibunda Rubaiyah, serta kedua saudariku Azzahra Nuril Firdaus dan Anistighfarina Qurota A’yun yang selalu memberikan cinta kasihnya, doa tiada henti, semangat dan motivasi untuk tetap berjuang dalam penyelesaian skripsi ini;
9. Sahabat terbaikku sedari kecil Rohmaniah Nuril Maulina yang selalu membuat tersenyum bahagia, tempat berkeluh kesah dan selalu memberi semangat yang luar biasa;
10. Sahabat saya para perempuan hebat (Enik dan Citra) yang selalu memberikan kasih sayang dan doa, teman-teman angkatan 2014 (Extreme) yang selalu

memberikan dukungan dan motivasi.

11. Sahabat terdekat semasa SMA ”sosialita rumpik” (Angel, Antia, Bella, Benny, dan Windi) yang selalu memberi semangat yang tiada henti;
12. Teman bertahan hidup selama 45 hari (Kelompok KKN UMD59) yang telah menjadi keluarga baruku yang siap mendengarkan segala keluh kesahku dan memberi semangat dan tawa;
13. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juli 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V merupakan himpunan berhingga tak kosong yang elemennya disebut sebagai titik dan E merupakan himpunan yang boleh kosong dari pasangan tak terurut (x, y) untuk $x, y \in V(G)$, yang disebut sebagai sisi. Pelabelan merupakan salah satu topik bahasan dalam teori graf yang sudah dikenal dan dikaji sejak tahun 60-an. Berbagai macam metode pelabelan telah banyak dikembangkan. Pelabelan suatu graf merupakan pemasangan elemen-elemen graf yaitu titik, sisi ataupun keduanya ke bilangan (biasanya) bilangan bulat positif dengan syarat tertentu (Hartsfield and Ringel,1990).

Miller pada tahun 2003 memperkenalkan konsep pelabelan titik jarak ajaib yang merupakan pemetaan himpunan titik ke bilangan bulat positif ke pada graf sedemikian sehingga semua titik memiliki bobot yang sama. Baca *dkk* (2007) juga telah memperkenalkan konsep pelabelan titik total tidak teratur yang merupakan pemetaan himpunan titik dan sisi ke bilangan bulat positif sedemikian sehingga diperoleh bobot yang berbeda di setiap titikya. Arumugam (2012) juga memperkenalkan konsep pelabelannya yaitu pelabelan titik jarak tidak ajaib.

Selanjutnya, dengan ketiga konsep pelabelan yang telah disebutkan, Slamin *dkk* (2014) memperkenalkan konsep baru dari pelabelan tidak teratur yang evaluasinya berdasarkan tetangga dari sebarang titik pada suatu graf G. Pelabelan tersebut diberi nama pelabelan titik tidak teratur jarak d. Dalam pelabelan terdapat istilah bobot, dalam hal ini bobot dari titik pada graf G diperoleh dari penjumlahan semua label titik yang bertetangga dengan titik tersebut. Tahun 2016, dengan konsep yang sama, Slamin *dkk* memperkenalkan pelabelan titik tidak teratur jarak d *inclusive*. Perbedaan dari pelabelan titik tidak teratur jarak d *inclusive* dan pelabelan titik tidak teratur jarak d terletak pada cara mendapatkan bobot suatu titik pada graf G.

Berdasarkan hal tersebut, maka penulis ingin melanjutkan penelitian pelabelan titik tidak teratur jarak d *inclusive* yang didefinisikan sebagai suatu pemasangan himpunan titik pada graf G terhadap himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, .., k\}$ sedemikian sehingga menghasilkan bobot berbeda di setiap titiknya. Bobot sebarang titik x didapatkan dari penjumlahan label semua titik yang bertetangga dengan titik x dan label titik x itu sendiri. Nilai minimum dari label terbesar k pada graf G yang pada umumnya dinotasikan dengan $\overline{\mathrm{dis}_\mathrm{d}}(G)$. Notasi d menujukkan jarak titik yang digunakan dalam suatu penelitian. Pada penelitian ini, akan dicari nilai ketakteraturan titik jarak satu *inclusive* yang dinotasikan dengan $\overline{\mathrm{dis}_1}(G)$ atau dinotasikan dengan $\overline{\mathrm{dis}}(G)$. Sampai saat ini, beberapa graf yang telah diteliti dengan metode pelabelan titik tidak teratur jarak satu*inclusive* yaitu graf *stars* (S_n), graf *doublestars* $(S_{m,n})$ (Bong,2016), graf *path* (P_n), graf *cycle* (C_n), dan graf *wheels* (W_n) (Baca,2016). Sebagai objek penelitian, penulis memilih graf *broom* $(Br_{n,m})$, graf banana tree $(B_{n,m})$, dan graf *firecracker* $(F_{n,m})$ sebagai bahan penelitian untuk dicari nilai ketakteraturan titik jarak satu *inclusive* karena ketiga graf tersebut belum pernah diteliti.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu bagaimana $\overline{\mathrm{dis}}$ suatu graf yang dihasilkan dari pelabelan titik tidak teratur jarak satu *inclusive* pada graf *broom* $(Br_{3,m})$, graf banana tree $(B_{2,m})$, dan graf *firecracker* $(F_{n,3})$.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan suatu $\overline{\mathrm{dis}}$ yang dihasilkan dari pelabelan titik tidak teratur jarak satu *inclusive* pada graf *broom* $Br_{3,m}$, graf *banana* *tree* $B_{2,m}$ dan graf *firecracker* $F_{n,3}$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah

a. Menambah data baru dalam bidang teori graf mengenai pelabelan titik tidak teratur jarak satu *inclusive* pada graf *broom*$(Br_{3,m})$, graf *banana tree* $(B_{2,m})$, dan graf *firecracker* $(F_{n,3})$.

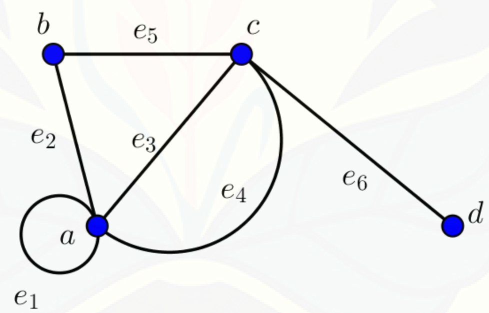
b. Agar pembaca maupun peneliti lainnya yang ingin mengembangkan penelitian ini mengetahui nilai ketakteraturan titik jarak satu *inclusive* pada graf *broom*, graf *firecracker* dan graf *banana tree*

c. Menambah motivasi pada pembaca dan peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini dalam graf lainnya.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V merupakan himpunan berhingga tak kosong yang elemennya disebut sebagai titik dan E merupakan himpunan yang boleh kosong dari pasangan tak terurut (x, y) untuk $x, y \in V(G)$, yang disebut sebagai sisi. Banyaknya unsur yang berada di V disebut *order* dari G dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G (Chartrand *and* Lesniak, 1996). Gambar 2.1 merupakan contoh graf G dengan 4 titik dan 6 sisi.



Gambar 2.1 Graf G dengan 4 titik dan 6 sisi

Titik x dan y pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika ada sisi $e = (x, y)$ yang menghubungkan kedua titik tersebut. Titik x dikatakan bersisian (*incident*) dengan sisi e. Himpunan tetangga dari suatu titik x dinotasikan dengan $N_{G(x)}$. Sebuah sisi pada graf G yang menghubungkan sebuah titik x dengan dirinya sendiri disebut *loop*. Dalam suatu graf, apabila terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik yang sama, maka sisi-sisi tersebut dinamakan sisi rangkap. Graf yang tidak memuat sisi rangkap dan *loop* disebut dengan graf sederhana

(Harsfield dan Ringel,1994). Graf pada Gambar 2.1 menunjukkan bahwa titik b bertetangga dengan titik a dan titik c, titik a bertetangga dengan titik b dan c, dan titik c bertetangga dengan titik a, b dan d. Sisi e_1 merupakan loop, sisi e_3 dan sisi e_4 merupakan sisi rangkap.

Derajat dari suatu titik x pada graf G, yang dinotasikan dengan $d(x)$ merupakan banyaknya sisi dalam graf G yang bersisian pada titik x. Suatu titik dengan derajat nol disebut sebagai titik terisolasi (*isolated vertex*). Derajat terbesar dari suatu titik pada graf G dinotasikan $\triangle(G)$ dan derajat terkecil pada G dinotasikan dengan $\delta(G)$. Sebuah titik yang memiliki derajat satu disebut dengan daun (*leaf*), terkadang disebut juga dengan *pendant*. Graf pada Gambar 2.1 memiliki $d(a) = 3, d(b) = 2, d(c) = 3, d(d) = 1$, sehingga graf tersebut memiliki $\triangle(G) = 3$, $\delta(G)$=1, dan sisi e_6 merupakan *pendant*.

Sebuah jalan (*walk*) pada graf G adalah sebuah barisan titik dan sisi secara bergantian yang berbentuk $x_0, e_1, x_1, e_2, ..., e_k, x_k$, untuk setiap sisi $e_i = x_{i-1}x_i$ dengan $i \in [0, k]$. Suatu jalan dikatakan sebagai jalan tertutup jika titik awal sama dengan titik akhir $(x_0 = x_k)$, sebaliknya dikatakan jalan tidak tertutup jika $x_0 \neq x_k$. Jalan yang semua sisinya berbeda satu sama lainnya disebut jejak (*trail*). Sebuah jalan yang semua titiknya berbeda disebut dengan lintasan (*path*). Siklus (*cycle*) didefinisikan sebagai jejak tertutup dengan tidak ada titik yang diulang terkecuali titik awal dan titik akhir $(x_0 = x_k)$. Jumlah sisi yang ada di dalam sebuah jalan disebut dengan panjang. Sirkuit (*circuit*) adalah jejak tertutup yang tidak memiliki sisi berulang tetapi mungkin memiliki titik berulang. Jarak (*distance*) dari titik x ke titik y di G adalah panjang lintasan terpendek dari titik x ke titik y yang dinotasikan dengan $d(x, y)$. Suatu graf G dikatakan graf terhubung jika untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ terdapat lintasan yang menghubungkan titik x dan titik y.

2.2 Graf Pohon

Graf pohon *(tree)* didefinisikan sebagai suatu graf terhubung sederhana yang tak berarah dan tidak memuat sirkuit. Graf pohon tidak memungkinkan memiliki sisi ganda maupun *loop* karena graf pohon tidak memuat sirkuit. Beberapa teorema mengenai graf pohon diantaranya sebagai berikut.

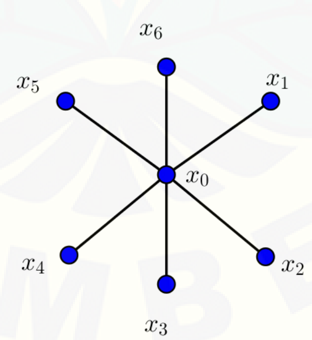
a. Jika G adalah graf pohon dengan n titik maka banyaknya sisi adalah $n-1$

b. Graf G adalah graf pohon jika dan hanya jika terdapat tepat satu lintasan diantara sebarang dua titik di G. (Rosen,2012)

Berikut beberapa contoh graf yang termasuk dalam graf pohon yaitu:

a. Graf Bintang

Graf bintang dinotasikan dengan S_m merupakan graf terhubung sederhana yang mempunyai satu titik berderajat m yang disebut dengan titik pusat dan m titik berderajat satu (Chartrand *and* Lesniak, 1996). Gambar 2.2 merupakan contoh dari graf bintang S_6



Gambar 2.2 Graf bintang S_6

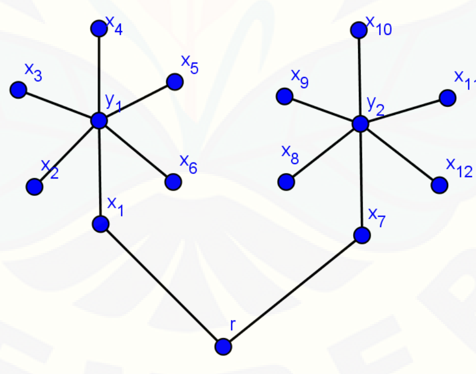
b. Graf Lintasan

Graf lintasan dinotasikan dengan P_n adalah graf terhubung sederhana yang dibangun oleh n titik dalam satu lintasan dengan panjang $n-1$. (Harsfield dan Ringel,1994). Gambar 2.3 merupakan contoh dari graf lintasan P_4.

Gambar 2.3 Graf lintasan P_4

c. Graf *Banana Tree*

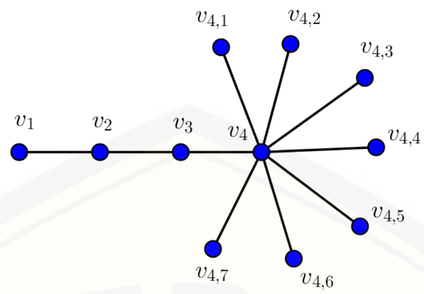
Graf *banana tree* dinotasikan dengan $B_{n,m}$ adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan satu daun dari masing-masing n salinan graf bintang S_m dengan satu titik baru yang disebut dengan titik akar r (Chen *dkk.*,1997). Gambar 2.4 merupakan contoh dari graf *banana tree* $B_{2,6}$.



Gambar 2.4 Graf *banana tree* $B_{2,6}$

d. Graf Broom

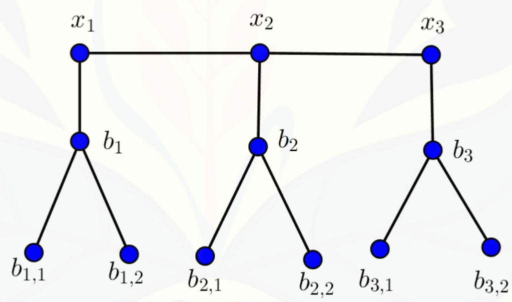
Graf *broom* dinotasikan dengan $Br_{n,m}$ adalah suatu graf yang dibangun dari suatu lintasan P_n dengan menambahkan sejumlah m daun pada salah satu titik ujung dari lintasan P_n. Gambar 2.5 merupakan contoh graf *broom* $Br_{4,7}$.



Gambar 2.5 Graf *broom* $B_{4,7}$

e. Graf *Firecracker*

Graf *firecracker* ($F_{n,m}$) adalah graf yang diperoleh dengan cara menggabungkan salah satu daun pada graf bintang S_m ke setiap titik pada graf lintasan P_n. (Chen *dkk*.,1997). Gambar2.6 adalah contoh graf *firecrakcer* $F_{3,3}$



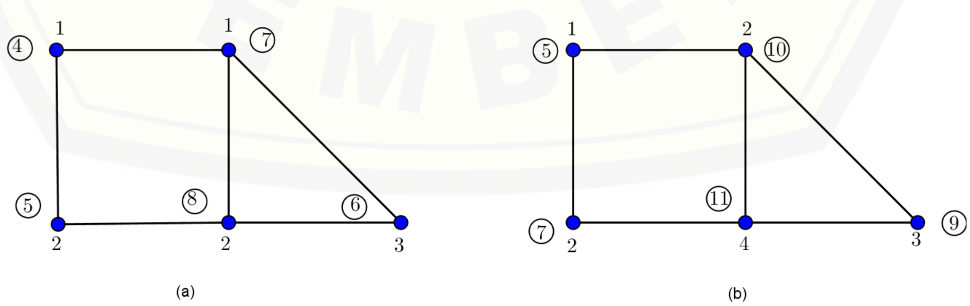
Gambar 2.6 Graf *firecracker* $F_{3,3}$

2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan graf $G(V, E)$ adalah sebuah pemetaan elemen-elemen graf G ke (biasanya) himpunan bilangan bulat positif dengan kondisi tertentu. Jika domain pemetaannya adalah himpunan titik maka pelabelannya disebut pelabelan titik, dan jika domain pemetaannya adalah himpunan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan sisi. Jika domain pemetaannya adalah himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan total. Penjumlahan dari label yang dikenakan pada titik atau sisi dari suatu graf disebut bobot. (Wallis, 2013).Terdapat berbagai macam metode pelabelan, diantaranya sebagai berikut.

2.4 Pelabelan Titik Tidak Teratur Jarak Satu *Inclusive*

Slamin *dkk* (2014) mengemukakan konsep pelabelan titik tidak teratur jarak d yang evaluasinya berdasarkan jumlah label tetangga dari sebarang titik. Dikatakan tidak teratur dapat dilihat dari label titik yang digunakan boleh berulang. Pelabelan titik tidak teratur jarak d adalah pemetaan himpunan titik ke himpunan bilangan bulat positif sedemikian sehingga bobot setiap titiknya berbeda. Slamin *dkk* (2016), dengan konsep yang sama memperkenalkan konsep pelabelan titik tidak teratur jarak d *inclusive*. Perbedaan dari konsep keduanya adalah cara menentukan bobot titiknya. Bobot suatu titik x pada graf G pada pelabelan titik tidak teratur jarak d *inclusive* didapatkan dari penjumlahan label titik yang bertetangga dengan titik x dan juga label titik x itu sendiri. Bobot titik x dapat dirumuskan dengan $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{u:1 \leq d(u,x) \leq d} \lambda(u)$. Titik-titik pada graf G dilabeli dengan himpunan bilangan $\{1, 2, ..., k\}$, dengan demikian nilai minimum dari label terbesar k merupakan nilai ketakteraturan titik jarak d *inclusive* yang dinotasikan dengan $\overline{\mathrm{dis}}_{\mathrm{d}}(G)$. Notasi d menunjukkan jarak titik yang digunakan dalam suatu penelitian. Jarak yang digunakan dalam pelabelan ini yaitu jarak satu sehingga dapat dinotasikan dengan $\overline{\mathrm{dis}}_1(G)$ atau dapat dinotasikan dengan $\overline{\mathrm{dis}}(G)$.



Gambar 2.7 Pelabelan titik tidak teratur jarak satu *inclusive* pada graf G dengan 5 titik

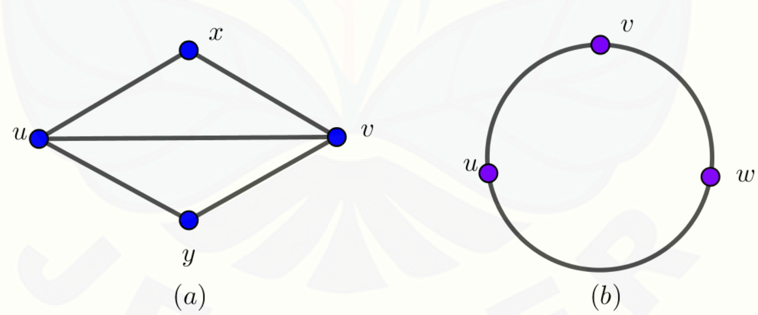
Gambar 2.7 merupakan contoh graf G yang telah dilabeli degan pelabelan titik tidak teratur jarak satu *inclusive* dengan angka yang diluar lingkaran merupakan label titik dan angka yang terdapat dalam lingkaran merupakan bobot titik. Diantara Gambar 2.8 (a)dan (b), Gambar 2.8 (a) adalah palebelan titik tidak teratur jarak satu *inclusive* yang paling tepat dengan nilai label minimum yaitu 3 dengan semua bobot titiknya berbeda. Dengan demikian, $\overline{\text{dis}}(G) = 3$.

Slamin (2016) juga menentukan batas nilai $\overline{\text{dis}}(G)$ yang evaluasinya berdasarkan derajat terbesar dan derajat terkecil sebagai berikut.

Lema 2.1 Misalkan G merupakan graf terhubung dengan n titik dengan derajat terkecil δ ,derajat terbesar Δ, maka $\overline{\text{dis}}(G) \geq \left\lceil \dfrac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil$.

Dalam pelabelan ini, tidak semua graf dapat dilabeli dengan pelabelan titik tidak teratur jarak satu *inclusive*. Penjelasan pernyataan tersebut terdapat pada Lema 2.2

Lema 2.2 Suatu graf G memiliki nilai $\overline{\text{dis}} = \infty$ jika dan hanya jika terdapat dua titik yang berbeda $u, v \in V(G)$ dengan $\{u\} \cup N_{G(u)} = \{v\} \cup N_{G(v)}$.



Gambar 2.8 Contoh graf yang tidak dapat dilabeli dengan pelabelan titik tidak teratur jarak satu *inclusive*

Gambar 2.8 adalah contoh beberapa graf yang tidak dapat dilabeli dengan pelabelan titik tidak teratur jarak satu *inclusive*. Gambar 2.8 (a) memiliki nilai $\overline{\text{dis}} = \infty$ karena $\{u\} \cup \{x, y, v\} = \{v\} \cup \{u, x, y\}$. Demikian pula dengann Gambar 2.8 (b) $\overline{\text{dis}} = \infty$ karena $\{u\} \cup \{v, w\} = \{v\} \cup \{w, u\}$.

2.5 Hasil Pelabelan Titik Tidak Teratur Jarak Satu *Inclusive*

Pada penelitian sebelumnya didapatkan beberapa hasil yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Pada tahun 2016 Bong, *dkk* telah meneliti $\overline{\text{dis}}$ pada beberapa graf yaitu pada graf *double stars* $(S_{m,n})$ dan graf *stars*(S_n). Graf *double stars* $(S_{m,n})$ didefinisikan sebagai graf dengan dua titik pusat yang bertetangga misalkan titik x dan titik y, titik x memiliki sejumlah m daun dan titik y memiliki sejumlah n daun. Graf *double stars* $(S_{m,n})$ memiliki dua nilai $\overline{\text{dis}}$ yaitu untuk $m < n$ memiliki $\overline{\text{dis}}(S_{m,n}) = n$, sedangkan untuk $m > n$ memiliki $\overline{\text{dis}}(S_{m,n}) = n + 1$. Graf stars atau graf bintang memiliki nilai $\overline{\text{dis}}(S_n) = n$.

Pada tahun 2016, Baca, *dkk* juga melakukan penelitian pada beberapa graf yaitu pada graf lintasan (P_n), graf *cycle*(C_n), dan graf *wheels*(W_n). Terdapat beberapa nilai $\overline{\text{dis}}(P_n)$ dengan dibagi beberapa kasus. Untuk kasus pertama $\overline{\text{dis}}(P_2) = \infty$, selanjutnya untuk $\overline{\text{dis}}(P_5) = 5$, untuk $n \not\equiv 2(\text{mod}9), n \neq 5$ $\overline{\text{dis}}(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$ dan untuk $n \equiv 2(\text{mod}9), n \geq 11, \frac{n+1}{3} \leq \overline{\text{dis}}(P_n) \leq \frac{n+1}{3} + 1$.

Graf *cycle* (C_n) didefinisikan sebagai graf terhubung yang memuat siklus dibagun dengan n titik, setiap titik memilki derajat 2 dan n sisi. Graf *cycle* memiliki beberapa nilai $\overline{\text{dis}}(C_n)$, untuk kasus pertama yaitu $\overline{\text{dis}}(C_3) = \infty$, selanjutnya untuk $\overline{\text{dis}}(C_4) = 4$, dan untuk $n \not\equiv 2, 3, 4(\text{mod } 18), n \geq 5$ $\overline{\text{dis}}(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$, dan untuk $n \equiv 2, 3, 4(\text{mod } 18)$ $\overline{\text{dis}}(C_n)$ adalah $\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil \leq \overline{\text{dis}}(C_n) \leq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 1$.

Graf *wheel*(W_n) didefinisikan sebagai graf yang diabangun dengan graf *cycle* dan satu buah titik baru yang dihubungkan ke setiap titik pada graf *cycle*. Nilai $\overline{\text{dis}}(W_n)$ adalah sebagai berikut $\overline{\text{dis}}(W_3) = \infty$, $\overline{\text{dis}}(W_4) = 4$, untuk $n \not\equiv 2, 3, 4(\text{mod } 18), n \geq 5$ $\overline{\text{dis}}(W_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$, dan untuk $n \equiv 2, 3, 4(\text{mod } 18)$ $\overline{\text{dis}}(W_n)$ adalah $\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil \leq \overline{\text{dis}}(W_n) \leq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 1$.

Secara detail Tabel 2.1 menunjukkan hasil penelitian pelabelan titik tidak teratur jarak satu *inclusive* pada beberapa graf tersebut.

Tabel 2.1 Hasil Pelabelan Titik Tidak Teratur Jarak Satu *(Inclusive)*

Graf	Nilai ($\overline{\text{dis}}$)	Keterangan
Double Stars ($S_{m,n}$)		
$m < n$	n	Bong *dkk*, 2016
$m > n$	$n+1$	
Stars (S_n)	n	Bong *dkk*, 2016
Graf Lintasan (P_n)		
$n = 2$	∞	
$n = 5$	3	
$n \not\equiv 2(mod 9), n \neq 5$	$\left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$	Baca *dkk*, 2016
$n \equiv 2(mod 9), n \geq 11$	$\frac{n+1}{3} \leq \overline{\text{dis}}(P_n) \leq \frac{n+1}{3} + 1$	
Cycle (C_n)		
$n = 3$	∞	
$n = 4$	4	Baca *dkk*, 2016
$n \not\equiv 2,3,4(mod 18), n \geq 5$	$\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$	
$n \equiv 2,3,4(mod 18), n \geq 20$	$\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil \leq \overline{\text{dis}}(C_n) \leq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 1$	
Wheels (W_n)		
$n = 3$	∞	
$n = 4$	4	Baca *dkk*, 2016
$n \not\equiv 2,3,4(mod 18), n \geq 5$	$\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$	
$n \equiv 2,3,4(mod 18), n \geq 20$	$\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil \leq \overline{\text{dis}}(W_n) \leq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 1$	

BAB 3. METODE PENELITIAN

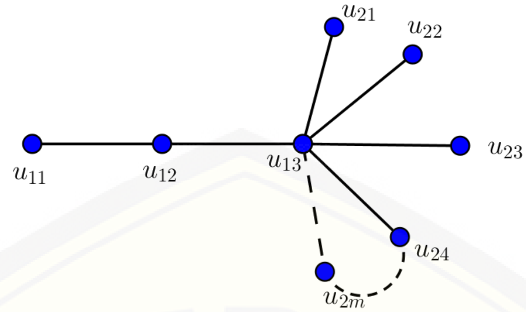
Pada bab ini dibahas mengenai metode dan langkah-langkah penelitian yang berkaitan dengan mencari nilai ketakteraturan jarak titik *(inclusive)* pada graf *broom*, graf *firecracker*, dan graf *banana tree*. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah dengan terlebih dahulu melakukan penotasian titik dan sisi pada graf yang akan diteliti. Kemudian melakukan pembuktian dari teorema yaitu dengan mengklaim nilai $\overline{\mathrm{dis}}(G) = k$, dengan cara menunjukkan bahwa nilai $\overline{\mathrm{dis}}(G) \geq k$ dan $\overline{\mathrm{dis}}(G) \leq k$. Setelah melakukan penotasian titik dan sisi pada graf yang akan diteliti, untuk menujukkan $\overline{\mathrm{dis}}(G) \leq k$ dengan cara melakukan proses pelabelan yaitu dengan menerapkan pelabelan ketakteraturan jarak titik *inclusive*, selanjutnya menghitung bobot setiap titik dari hasil pelabelan, memeriksa apakah bobot setiap titik berbeda, kemudian didapatkan nilai $\overline{\mathrm{dis}}(G)$ dari label titik terbesar pada graf yang diteliti. Secara lebih jelas mengenai langkah-langkah pada penelitian ini, dijabarkan pada teknik penelitian berikut:

a. Data Penelitian Beserta Penotasian Titik dan Sisi

Berikut ini merupakan pendefinisian notasi titik dan sisi yang akan digunakan sebagai objek penelitian

1) Graf *Broom*

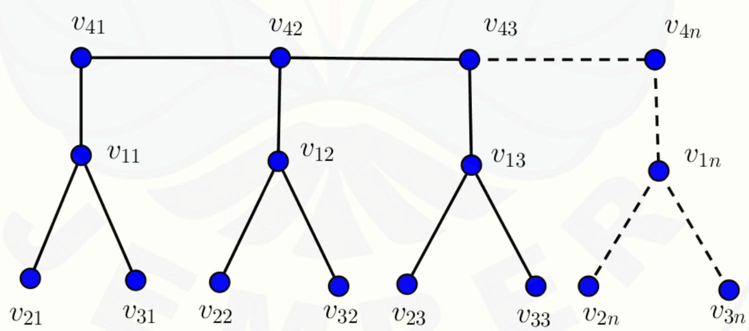
   Misalkan himpunan titik $V(Br_{3,m}) = \{u_{ij}, i = 1, 1 \leq j \leq 3\} \cup \{u_{ij}, i = 2, 1 \leq j \leq m\}$, dengan $d(u_{11}) = d(u_{2j}) = 1$ untuk $1 \leq j \leq m$, $d(u_{12}) = 2$, dan $d(u_{13}) = m + 1$. Himpunan sisi graf *broom* $E(Br_{3r,m}) = \{u_{11}u_{12}, u_{12}u_{13}\} \cup \{u_{13}u_{ij}, i = 2, 1 \leq j \leq m\}$. Ilustrasi untuk penotasian titik dan sisi pada graf $Br_{3,m}$ ditunjukkan dengan Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Notasi titik dan sisi pada graf $Br_{3,m}$

2) Graf *Firecracker*

Misalkan himpunan titik $V(F_{n,3}) = \{v_{ij}, i = 1, 1 \leq j \leq n\} \cup \{v_{ij}, i = 2, 1 \leq j \leq n\} \cup \{v_{ij}, i = 3, 1 \leq j \leq n\} \cup \{v_{ij}, i = 4, 1 \leq j \leq n\}$, dengan $d(v_{2j}) = 1$ untuk $1 \leq j \leq n$, $d(v_{41}) = d(v_{4n}) = 2$, dan $d(v_{4j}) = 3$ untuk $2 \leq j \leq n-1$. Himpunan sisi graf *firecracker* adalah $E(F_{n,3}) = \{v_{ij}v_{ij+1}, i = 4, 1 \leq j \leq n\} \cup \{v_{4j}v_{1j}\ 1 \leq j \leq n\} \cup \{v_{1j}v_{2j}\ 1 \leq j \leq n\} \cup \{v_{1j}v_{3j}\ 1 \leq j \leq n\}$. Ilustrasi untuk penotasian titik dan sisi pada graf $F_{n,3}$ ditunjukkan dengan Gambar 3.2.

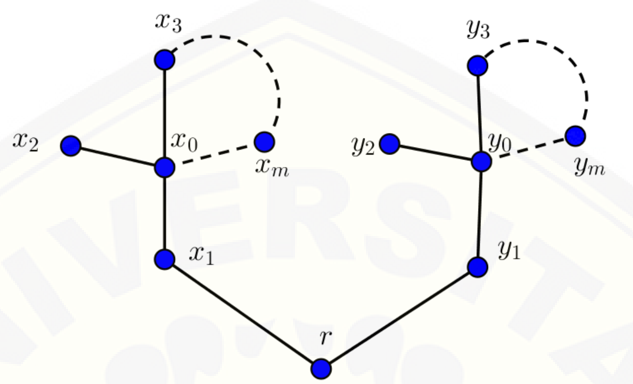


Gambar 3.2 Notasi titik dan sisi pada graf $F_{n,3}$

3) Graf *Banana Tree*

Misalkan himpunan titik $V(B_{2,m}) = \{r\} \cup \{x_i, 0 \leq i \leq m\} \cup \{y_i, 0 \leq i \leq m$, dengan $d(x_i) = d(y_i) = 1$ untuk $2 \leq i \leq m$, $d(r) = d(x_1) = d(y_1) = 2$, dan $d(x_0) = d(y_0) = n$. Himpunan sisi graf *banana tree* adalah $E(B_{2,m}) =$

$\{rx_1\} \cup \{ry_1\} \cup \{x_0x_i\}$, untuk $1 \leq i \leq m \cup .\{y_0y_i\}$, untuk $1 \leq i \leq m$ Ilustrasi untuk penotasian titik dan sisi pada graf $B_{2,m}$ ditunjukkan dengan Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Notasi titik dan sisi pada graf $B_{2,m}$

b. Teknik Penentuan Nilai $\overline{\text{dis}}(G) = k$

Sesuai dengan Lema 2.1 nilai $\overline{\text{dis}} \geq \left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil$ digunakan sebagai batasan awal untuk kita melabeli suatu graf. Jika nilai $\overline{\text{dis}} = \left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil$ tidak dapat digunakan untuk melabeli maka ditambah dengan satu. Jika nilai $\overline{\text{dis}} = \left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil + 1$ masih tidak dapat digunakan untuk melabeli maka nilai $\overline{\text{dis}} = \left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil + 2$,dan seterusnya. Nilai terkecil dari label terbesar merupakan nilai k. Teknik penentuan nilai $\overline{\text{dis}} = k$ dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1) Menunjukkan nilai $\overline{\text{dis}}(G) \geq k$.

   Akan ditujukkan nilai $\overline{\text{dis}}(G) \geq k$. Jika $k = \left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil$ maka dapat dipastikan terbukti bahwa $\overline{\text{dis}}(G) \geq k$. Jika tidak sesuai dengan $k = \left\lceil \frac{n+\delta}{\Delta+1} \right\rceil$ maka dapat dibuktikan dengan meninjau kemungkinan bobot secara konsekutif pada titik yang memiliki derajat terkecil terlebih dahulu, kemudian meninjau titik berderajat terkecil kedua dan seterusnya sampai titik berderajat paling besar.

2) Membuktikan nilai $\overline{\mathrm{dis}}(G) \leq k$

Akan ditujukkan nilai $\overline{\mathrm{dis}}(G) \leq k$. Untuk membuktikan bahwa $\overline{\mathrm{dis}}(G) \leq k$, dilakukan langkah-langkah sbb.

(a) Melakukan Pelabelan Titik

Pelabelan titik yang diterapkan adalah pelabelan dari himpunan titik ke bilangan bulat positif dari 1 sampai k dan pemberian label titik nilainya boleh berulang.

(b) Menghitung bobot setiap titik dan membuktikkan keberbedaannya

Pada bagian ini dilakukan perhitungan bobot pada titik. Bobot titik x diperoleh dengan cara menjumlahkan label titik x dengan label titik-titik yang bertetangga dengan titik x. Besar bobot setiap titik pada suatu graf G tidak boleh sama. Jika terdapat bobot titik yang sama maka, langkah diulangi ke poin (a) dengan label 1 sampai $k + 1$.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa penelitian untuk mencari nilai ketakteraturan titik jarak satu pada graf *firecracker* $(F_n, 3)$ telah memenuhi nilai paling kecil dari Lema 2.1. Graf *broom* $(B_{2,m})$ dan graf *banana tree* $(B_{2,m})$ tidak memenuhi nilai paling kecil dari Lema 2.1.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dari penelitian mengenai nilai ketakteraturan titik jarak satu *inclusive* pada graf *broom* $(Br_{3,m})$, graf *banana tree* $(B_{2,m})$, dan graf *firecracker* $(F_{n,3})$, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk mengembangkan penelitian nilai ketakteraturan titik jarak satu *(inclusive)* pada graf $(Br_{3,m})$ dengan $n \geq 3$, graf $(B_{2,m})$ dengan $n \geq 3$ dan graf $(F_{n,3})$ dengan $m \geq 3$.

DAFTAR PUSTAKA

Arumugam, S. dan N. Kamatchi.2012. *On (a,d)-distance antimagic graphs*. Australasian Journal of Combinatorics. 54: 279-287.

Baca, M., S. Jendrol. M. Miller and J. Ryan. 2007. *On irregular total labellings*. Discrete Math. 307: 1378- 1388.

Baca,M., Slamin., dan Semanicova, Andrea. 2016. *On Inclusive Distance Vertex Irregular Labeling*. *Preprint submitted* to JCMCC.

Chartrand, G. dan L. Lesniak. 1996. *Graphs and Digraphs. Thrid Edition*. California: Chapman and Hall.

Chen,W. dan Y. Yeh. 1997. *Operations of Interlaced Trees and Graceful Trees*. Southeast Asian Bull. Math, 21:337-348

Hartsfield, N. dan G. Ringel. 1994. *Pearls in Graph Theory*. USA: Academic Press, Inc.

Miller, M., C. Rodger, and R. Simanjuntak. 2003. *Distance magic labellings of graphs.* Australasian Journal of Combinatorics. 28: 305-315.

Rosen,K. H. 1994. *Discrete Mathematics and Its Aplication, Seventh Edition*. Newyork: VAGA.

Slamin. Bong, Novi.H and Lin,Yuqin 2016.*On Inclusive and Non-Inclusive Vertex Irregular d-distance Vertex Labeling* . *Preprint submitted* JCMCC.

Wallis, W. D. dan A. M. Marr. 2013. *Magic Graphs Second Edition*. Boston: Birkhauser.