

**SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN SCHRÖDINGER SISTEM
OSILATOR HARMONIK DENGAN MASSA BERGANTUNG
POSISI MENGGUNAKAN METODE TRANSFORMASI
KOORDINAT**

SKRIPSI

diajukan untuk memenuhi persyaratan menyelesaikan studi pada Program Sarjana Sains
Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Jember

Awal:	Hadiah	Klass
	Pembelian	531.322
Terima Tol	03 JUL 2007	RUS
No. Indes		
Oleh	KLASIR	SRS 1

Farida Kuswandari
NIM 031810201133

S

e.1

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER

2007

PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Alloh yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, akhirnya skripsi ini dapat saya selesaikan. Dengan segala kerendahan hati, saya persembahkan karya ini sebagai rasa hormat dan terima kasih kepada:

1. Ayah dan Ibu tercinta, yang telah mendidik dan mendoakan putrinya ini untuk menggapai cita-cita;
3. Kakak-kakak dan adikku, terima kasih atas keceriaannya selama ini;
2. Kakak alumni (Rohani) SMU Negeri 1 Jember yang telah memberi bantuan untuk studi ini;
4. Almamaterku, Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

Sebaik-baik perkataan adalah *kalamulloh*; sebaik-baik petunjuk adalah petunjuk Rosululloh ﷺ. Ilmu adalah jalan untuk mencapai kemenangan dan bisa mengangkat derajat manusia. Ulama adalah pewaris para Nabi. Para Nabi tidak mewariskan dinar ataupun dirham, tetapi mereka mewariskan ilmu. *)



*) Al-Bankani, A. A. M. 2006. *Perjalanan Ulama Menuntut Ilmu*. Jakarta: PT Darul Falah.

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Farida Kuswandari

NIM : 031810201133

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa karya ilmiah yang berjudul : *Solusi Analitik Persamaan Schrödinger Sistem Osilator Harmonik dengan Massa Bergantung Posisi Menggunakan Metode Transformasi Koordinat* adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum pernah diajukan pada institusi mana pun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak mana pun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, 22 Juni 2007

Yang menyatakan,



Farida Kuswandari

NIM. 031810201133

PENGESAHAN

Skripsi berjudul *Solusi Analitik Persamaan Schrödinger Sistem Osilator Harmonik dengan Massa Bergantung Posisi Menggunakan Metode Transformasi Koordinat* telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember pada:

hari : SELASA
tanggal : 03 JUL 2007
tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

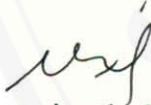
Tim Penguji

Ketua (Dosen Pembimbing Utama), Sekretaris (Dosen Pembimbing Anggota),


Sutisna, S.Pd., M.Si.
NIP 132 257 929


Artoto Arkundato, S.Si., M.Si.
NIP 132 236 059

Anggota I,


Mutmainnah, S.Si., M.Si.
NIP 132 162 505

Anggota II,


Ir. Misto, M.Si.
NIP 131 945 799



Mengesahkan

Dekan,


Ir. Sumadi, M.Si.
NIP 130 368 784

Farida Kuswandari

*Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas
Jember*

ABSTRACT

In the study of quantum systems, the Schrödinger equation with a position-dependent mass (PDM) has become one of the active subjects because have wide applications in many physical problems. On the other hand, the problem of harmonic oscillator become important because emerge often in most of physical problems. The purpose of this study was to know analytical solutions form of the PDM Schrödinger equation for the harmonic oscillator systems, that is the energy eigenvalues E_n and eigenfunctions $\psi_n(x)$, by using the coordinate transformation methods of the second kind. The result showed that the energy eigenvalue E_n for harmonic oscillator systems with PDM have same form with the energy eigenvalue E_n for the harmonic oscillator system with constant mass. While the eigenfunctions $\psi_n(x)$ for PDM system differ from the eigenfunctions $\psi_n(x)$ for constant mass system, that is with additional existence of multiplication to a dimensionless position-ependent mass $m(x)$ at PDM system. Difference of this eigenfunctions $\psi_n(x)$ have impact at dynamics properties difference of the quantum system. And the system with PDM is more general than the constant mass systems.

Key words : *Schrödinger equation, position-dependent mass, coordinate transformation methods of the second kind.*

RINGKASAN

Solusi Analitik Persamaan Schrödinger Sistem Osilator Harmonik dengan Massa Bergantung Posisi Menggunakan Metode Transformasi Koordinat;
Farida Kuswandari, 031810201133; 2007: 50 halaman; Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Dalam sistem kuantum non-relativistik, persamaan utama yang dipecahkan adalah persamaan Schrödinger. Persamaan Schrödinger dengan massa bergantung posisi atau *position-dependent mass* (PDM) adalah sebuah persamaan yang menyatakan dinamika suatu sistem kuantum PDM. Persamaan Schrödinger PDM telah menarik banyak perhatian karena mempunyai aplikasi yang luas dalam berbagai riset ilmu fisika. Dalam kasus ini, kita meninjau sistem osilator harmonik di mana sistem ini muncul dalam banyak problem fisis. Secara umum, bentuk persamaan Schrödinger PDM dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{m'}{m} \frac{d\psi(x)}{dx} + 2m[E - V_{\text{eff}}(x)]\psi(x) = 0 .$$

Dengan menggunakan metode transformasi koordinat jenis kedua, kita transformasi persamaan Schrödinger PDM di atas ke dalam bentuk persamaan diferensial Hermit dengan solusi berupa polinomial Hermit $H_n(x)$. Sehingga diperoleh solusi analitik sistem PDM berupa nilai eigen energi E_n sebagai berikut

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega ,$$

dan fungsi eigen $\psi_n(x)$ sebagai berikut

$$\psi_n(x) = m^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\omega\mu^2} H_n(\sqrt{\omega}\mu).$$

Dari fungsi eigen $\psi_n(x)$ yang diperoleh ini kita bisa mengetahui perilaku partikel (seperti momentum, energi kinetik, dan sebagainya) dari sistem tersebut.

Untuk mengetahui bahwa hasil perhitungan tersebut telah konsisten, kita lakukan aproksimasi massa konstan terhadap persamaan-persamaan terkait (kasus PDM) yaitu dengan mengambil bentuk $m(x)=1$ dan $\mu(x)=x$. Di mana persamaan-persamaan tersebut mereduksi menjadi persamaan-persamaan untuk kasus massa konstan. Dari hasil aproksimasi diperoleh bahwa nilai eigen energi E_n adalah

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega ,$$

di mana nilai eigen energi E_n sistem PDM mempunyai bentuk yang sama dengan nilai eigen energi E_n sistem massa konstan.

Sedangkan hasil aproksimasi fungsi eigen $\psi_n(x)$ diperoleh

$$\psi_n \cong e^{-\frac{1}{2}\omega\mu^2} H_n(\sqrt{\omega}x),$$

di mana terlihat bahwa fungsi eigen $\psi_n(x)$ sistem PDM berbeda dengan fungsi eigen $\psi_n(x)$ sistem massa konstan, yaitu dengan adanya tambahan perkalian terhadap fungsi posisi yang tidak berdimensi $m(x)$ pada sistem PDM. Perbedaan fungsi eigen $\psi_n(x)$ ini mempunyai dampak pada perbedaan sifat dinamika dari sistem kuantum tersebut. Sehingga dapat dilihat bahwa hasil perhitungan yang didapat tersebut sudah konsisten dengan solusi sistem massa konstan. Sehingga kita dapat menyatakan bahwa sistem PDM merupakan generalisasi dari sistem massa konstan. Dalam aplikasinya, sistem osilator harmonik PDM ini diantaranya dapat kita lihat dalam fenomena *Quantum Well* (QW) dengan struktur $GaAs/Al_zGa_{1-z}As/GaAs$.

PRAKATA

Syukur alhamdulillah ke hadirat Alloh subhanahu wa ta'ala atas segala karunia yang telah diberikan, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Solusi Analitik Persamaan Schrödinger Sistem Osilator Harmonik dengan Massa Bergantung Posisi Menggunakan Metode Transformasi Koordinat*". Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan program Sarjana Sains Jurusan Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember. Dengan terwujudnya skripsi ini, tidak berlebihan jika penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Sutisna, S.Pd., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Utama yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
2. Artoto Arkundato, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Anggota yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
3. Agus Supriyanto, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing selama menjadi mahasiswa;
4. Mutmainnah, S.Si., M.Si. dan Ir. Misto, M.Si. selaku Dosen Penguji I dan II yang telah memberikan masukan-masukan dalam penulisan skripsi ini;
5. A. D. Alhaidari dari *Physics Department King Fahd University of Petroleum & Minerals*, Saudi Arabia; Prof. Bijan Bagchi dari *Department of Applied Mathematics University of Calcutta*, India; R. K. Roychoudhury dari *Physics and Applied Mathematics Unit, Indian Statistical Institute*, India; Guo-Xing JU dari *Department of Physics Nanjing University*, China; dan Muhamad Darwis Umar, mahasiswa Jurusan Ilmu Fisika Program Pasca Sarjana (S₂) Universitas Gadjah Madah atas masukan-masukan yang telah diberikan.
6. Teman-teman Fisika khususnya angkatan '03 dan semua pihak yang tidak dapat saya sebutkan satu persatu.

Penulis juga menerima segala kritik dan saran demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Juni 2007

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSEMBAHAN	ii
HALAMAN MOTTO	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vi
RINGKASAN	vii
PRAKATA	ix
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Permasalahan	4
1.3 Batasan Masalah	5
1.4 Tujuan	5
1.5 Manfaat	5
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	6
2.1 Persamaan Schrödinger Suatu Partikel dalam Sebuah Potensial	6
2.2 Persamaan Schrödinger PDM	7
2.3 Transformasi Koordinat Persamaan Schrödinger PDM	9
2.4 Fungsi Massa dan Potensial V_m	10
2.5 Osilator Harmonik	11
2.5.1 Osilator Harmonik Sederhana dalam Tinjauan	

Klasik	11
2.5.2 Osilator Harmonik dalam Tinjauan Kuantum	13
2.6 Polinomial Hermit	20
BAB 3. METODE PENELITIAN	21
3.1 Tempat dan Waktu Pelaksanaan	21
3.2 Definisi Operasional	21
3.2.1 Persamaan Schrödinger PDM	21
3.2.2 Transformasi Koordinat Jenis Kedua	21
3.2.3 Osilator Harmonik	21
3.3 Desain Penelitian	22
3.4 Analisa Data	23
BAB 4. PEMBAHASAN	25
4.1 Nilai Eigen Energi E_n dan Potensial Efektif $V_{\text{eff}}(x)$ Sistem Osilator Harmonik PDM	32
4.2 Fungsi Transformasi $f(x)$ dan Fungsi Eigen $\psi_n(x)$ Sistem Osilator Harmonik PDM	36
4.3 Aproksimasi $m(x)=1$ dan $\mu(x)=x$	38
4.3.1 Aproksimasi Massa Konstan untuk Nilai Eigen Energi E_n Sistem PDM	39
4.3.2 Aproksimasi Massa Konstan untuk Fungsi eigen $\psi_n(x)$ Sistem PDM	40
4.4 Aplikasi Massa Efektif dalam Semikonduktor	41
4.4.1 Kasus Distribusi Massa I	41
4.4.2 Kasus Distribusi Massa II	46
BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN	49
5.1 Kesimpulan	49
5.2 Saran	50
DAFTAR PUSTAKA	51
LAMPIRAN	54

DAFTAR TABEL

	Halaman
K.1 Polinomial Hermit	63
L.1 Variasi Potensial V_m Persamaan (4.47) Terhadap Variabel x	64
L.2 Variasi Potensial V_m Persamaan (4.53) Terhadap Variabel x	65



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
2.1 Hubungan Energi dalam Osilator Harmonik Sederhana	14
2.2 Tingkat Energi dan Rapat Probabilitas pada Osilator Harmonik Sederhana	18
3.1 Diagram Alir Penelitian	22
4.1 (a) Struktur QW dari $GaAs/Al_xGa_{1-x}As/GaAs$ (b) Tingkat Energi untuk Struktur $GaAs/Al_xGa_{1-x}As/GaAs$	42
4.2 Potensial V_m struktur $GaAs/Al_xGa_{1-x}As/GaAs$ untuk fungsi massa dalam persamaan (4.46)	43
4.3 Potensial V_m untuk fungsi massa dalam persamaan (4.53)	46

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
A. Hasil Substitusi Persamaan (2.3) ke Persamaan (2.1)	53
B. Cara Mencari Solusi Persamaan (2.8)	53
C. Hubungan Komutasi Antara Operator Massa dan Momentum	54
D. Operator Energi Kinetik BenDaniel dan Duke	54
E. Cara untuk Mendapatkan Hamiltonian Persamaan (2.17)	55
F. Hasil Substitusi Persamaan (2.20) ke Persamaan (2.18)	56
G. Persamaan Schrödinger (2.33) dalam ξ dan K	57
H. Derivatif Fungsi Gaussian	58
I. Persamaan Diferensial (2.39) yang Harus Dipenuhi Oleh $h_n(\xi)$	58
J. Fungsi Hipergeometri dan Hipergeometri Terpadu	61
K. Polinomial Hermit	63
L. Menggambar Kurva V_m Terhadap x	64
M. Operator dalam Mekanika Kuantum	67
M.1 Energi Kinetik Sistem PDM	68
M.2 Energi Potensial Efektif Sistem PDM	68
M.3 Energi Total Sistem PDM	69
N. Potensial Riil $V(x)$ Sistem Osilator Harmonik Massa Konstan	70



BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam sistem kuantum non-relativistik, persamaan utama yang harus dipecahkan adalah persamaan Schrödinger, yaitu suatu persamaan diferensial parsial orde kedua. Karena dalam fisika kuantum persoalannya dicirikan oleh hadirnya fungsi potensial tertentu, maka kita akan lebih menaruh perhatian pada potensialnya daripada gayanya (sebagaimana halnya yang dicirikan dalam hukum Newton). Pemecahan persamaan Schrödinger yang disebut fungsi gelombang, memberikan informasi tentang apa saja yang ingin kita ketahui dari sistem. Persamaan Schrödinger dapat dipecahkan secara analitik hanya untuk beberapa potensial sederhana tertentu, sebagai contoh adalah potensial osilator harmonik (Krane, 1992:170-171).

Dalam kajian kuantum, persamaan Schrödinger dengan massa bergantung posisi atau *position-dependent mass* (PDM) telah menarik banyak perhatian karena mempunyai aplikasi yang luas dalam berbagai riset ilmu fisika. Persamaan Schrödinger PDM ini nampak dalam sistem kuantum N-partikel dan persamaan Schrödinger ini juga sangat bermanfaat dalam menjelaskan sifat elektron dari sistem material terkondensasi seperti semikonduktor (Quesne *et al.*, 2005).

Dalam sistem PDM, kita mengenal adanya massa efektif. Konsep pendekatan massa efektif ini berasal dalam semikonduktor dan material dengan struktur yang kompleks. Kita ketahui bahwa potensial kristal adalah kompleks, tetapi kita mengusahakannya untuk menjadi suatu pernyataan yang sederhana dan hal tersebut akan cocok bila dinyatakan dengan adanya massa efektif yang mana secara prinsip dapat menggambarkan massa dari sistem kristal tersebut. Massa

efektif ini dinyatakan sebagai sebuah fungsi $M(\vec{r})$. Dalam *heterojunctions* (sambungan dari beberapa material yang berlainan) di antara material-material tersebut, salah satu dari material harus memenuhi syarat batas yang cocok agar dalam sistem tersebut mempunyai sebuah fungsi massa transisi yang sesuai. Di sinilah massa bergantung posisi $M(\vec{r})$ berada. Sehingga dapat ditulis bahwa massa bergantung posisi $M(\vec{r})$ adalah:

$$M(\vec{r}) = m_0 m(\vec{r}), \quad (1.1)$$

dengan m_0 adalah massa konstan dan $m(\vec{r})$ adalah fungsi posisi yang tidak berdimensi. Dalam semikonduktor, sistem PDM dipakai dalam gerakan pembawa muatan bebas (elektron dan lubang) dengan komposisi kimia yang tidak seragam dan hal tersebut akan lebih tepat bila diuraikan dalam Hamiltonian dengan massa efektif bergantung posisi (Von Roos, 1983).

Dengan adanya massa efektif tersebut maka dalam sistem muncul potensial efektif baru yaitu potensial efektif sebagai akibat massa yang bervariasi terhadap posisi dan besarnya dipengaruhi oleh massa yang bervariasi terhadap posisi tersebut. Jadi, potensial efektif sistem merupakan penjumlahan dari potensial riil V dan modifikasi potensial yang muncul sebagai akibat massa yang bervariasi terhadap posisi. Potensial efektif sistem dapat dinyatakan sebagai:

$$V_{eff}(\vec{r}) = V(\vec{r}) + V_m, \quad (1.2)$$

dengan V_{eff} adalah potensial efektif sistem, $V(\vec{r})$ adalah potensial riil, dan V_m adalah potensial efektif sebagai akibat massa yang bervariasi terhadap posisi (Gönül dan Koçak, 2005). Ketika massa efektif sistem konstan, pengaruh potensial efektif sistem sebagai akibat massa yang bergantung pada posisi menghilang, hal ini menggambarkan bahwa sebenarnya sistem PDM merupakan generalisasi sistem dengan massa konstan PDM (Guo-Xing *et al.*, 2005b).

Penelitian solusi analitik dari sistem kuantum dengan PDM terus meningkat dalam tahun-tahun terakhir ini (Tanaka, 2005). Dalam penelitian secara teoritis, metode-metode yang dikembangkan untuk menyelesaikan sistem dengan massa konstan telah diperluas dan digunakan untuk sistem PDM dan sejumlah hasil yang menarik telah diperoleh. Solusi eksak persamaan gelombang kuantum (seperti persamaan Schrödinger dan persamaan Dirac) adalah penting karena konsep-konsep fisika hanya dapat dipahami dengan sangat memuaskan oleh adanya solusi analitik seperti itu (Alhaidari, Tanpa Tahun b). Secara teori, pencarian solusi analitik fungsi gelombang, khususnya persamaan Schrödinger PDM ini lebih menarik banyak perhatian, karena persamaan Schrödinger ini memberikan kemungkinan model yang tepat untuk menggambarkan sistem PDM (Guo-Xing *et al.*, 2005b).

Metode-metode yang digunakan dalam mencari solusi analitik persamaan gelombang kuantum, baik untuk sistem bermassa konstan maupun sistem PDM, diantaranya adalah metode operator, metode transformasi koordinat, metode mekanika kuantum supersimetri (SUSYQM), metode pendekatan aljabar Lie, metode pendekatan integral lintasan, dan sebagainya. Namun, hingga kini hanya ada dua metode yang sering digunakan diantara metode-metode yang lain karena kedua metode tersebut dapat digunakan secara luas untuk berbagai kasus fisis yang ada dibandingkan dengan metode-metode yang lain. Dua metode itu adalah metode transformasi koordinat dan metode mekanika kuantum supersimetri (Tanaka, 2005).

Ada dua jenis metode transformasi koordinat, yang pertama adalah sebuah metode yang menghubungkan dua potensial yang berbeda pemecahannya seperti potensial Coulomb dan potensial Osilator Harmonik. Metode ini dijalankan dengan cara mengetahui terlebih dahulu solusi eksak pada salah satu potensial, sebagai potensial referensi, kemudian dengan diketahuinya fungsi massa untuk potensial target, maka solusi eksak potensial target akan didapatkan dari hubungan transformasi ini (Mustafa dan Mazharimousavi, 2006). Yang kedua adalah sebuah

metode yang dijalankan dengan cara mentransformasi persamaan Schrödinger ke dalam persamaan diferensial orde kedua yang sudah diketahui solusinya; yaitu bisa berupa fungsi khusus yang hipergeometrik (*hypergeometric function*) maupun hipergeometrik terpadu (*confluent hypergeometric function*) (Guo-Xing *et al.*, 2005a).

Dalam penelitian ini, yang akan ditinjau adalah sistem osilator harmonik. Persoalan osilator harmonik menjadi penting karena kebanyakan problem yang menyangkut getaran mekanis untuk amplitudo yang kecil kembali menjadi osilator harmonik sederhana atau kombinasi getaran yang demikian dan persamaan diferensial getaran harmonis muncul dalam banyak problem fisis seperti dalam bidang optika, mekanika, rangkaian listrik, dan dalam fisika atom (Halliday dan Resnick, 1978:447).

Mengingat begitu pentingnya mempelajari persamaan Schrödinger sistem osilator harmonik, maka diperlukan suatu cara untuk mendapatkan solusi analitik dari sistem tersebut, khususnya untuk massa partikel bergantung pada posisi. Dalam penelitian ini, kita mencoba untuk mencari solusi analitik tersebut dengan menggunakan metode transformasi koordinat jenis kedua. Di mana solusi analitik sistem osilator harmonik PDM tersebut nantinya merupakan generalisasi untuk sistem osilator harmonik dengan massa konstan.

1.2 Permasalahan

Permasalahan yang menjadi bahasan dalam penelitian ini adalah

- Bagaimana bentuk nilai eigen energi E_n sistem osilator harmonik PDM?
- Bagaimana bentuk fungsi eigen ψ_n sistem osilator harmonik PDM?
- Apakah solusi analitik persamaan Schrödinger PDM sistem osilator harmonik konsisten dengan solusi analitik persamaan Schrödinger sistem osilator harmonik untuk massa konstan; jika dalam solusi PDM diambil massa konstan?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya dibatasi untuk persamaan Schrödinger PDM sistem osilator harmonik linear 1 dimensi pada kasus non-relativistik dengan menggunakan metode transformasi koordinat jenis kedua.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan solusi analitik persamaan Schrödinger PDM sistem osilator harmonik (eigen nilai energi E_n dan fungsi eigen ψ_n) yang konsisten dengan solusi sistem massa konstan dengan menggunakan metode transformasi koordinat jenis kedua.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini diantaranya adalah :

- dapat menjelaskan sebuah cara untuk menentukan solusi analitik persamaan Schrödinger PDM dari sebuah problem fisis.
- dapat menjelaskan sifat transport dalam bidang semikonduktor, khususnya untuk struktur $GaAs/Al_zGa_{1-z}As/GaAs$ di mana lapisan $Al_zGa_{1-z}As$ berperan sebagai perintang yang membatasi gerak elektron pada daerah $GaAs$ *heterostructure*.



BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Schrödinger untuk Partikel dalam Suatu Potensial

Persamaan Schrödinger Bergantung Waktu atau *Time Dependent Schrödinger Equation* (TDSE) sebuah partikel dalam sebuah potensial untuk tiga dimensi secara umum ditulis dalam bentuk

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(r,t) + V(r)\psi(r,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t}, \quad (2.1)$$

dapat juga ditulis dalam bentuk

$$\hat{H} \psi(r,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t}, \quad (2.2)$$

dimana \hat{H} adalah operator energi total sistem yang biasa disebut dengan Hamiltonian. Kemudian kita dapat menemukan solusi dari TDSE ini melalui separasi variabel dengan menuliskan fungsi gelombang dalam bentuk

$$\psi(r,t) = u(r)T(t). \quad (2.3)$$

Jika kita substitusi persamaan (2.3) ke dalam persamaan TDSE (2.1) dan kita bagi dengan $u(r)T(t)$, maka kita peroleh bentuk

$$\frac{1}{u(r)} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) u(r) = i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{\partial}{\partial t} T(t). \quad (2.4)$$

Jika kedua ruas saling bebas, kita dapat memisahkan keduanya dengan memunculkan tetapan K sembarang dalam bentuk

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} T(t) = K T(t), \quad (2.5)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) u(r) = K u(r). \quad (2.6)$$

Kita dapat mengidentifikasi K dengan mengalikan persamaan (2.5) dengan $u(r)$ dan mengingat bahwa $\psi(r, t) = u(r)T(t)$, maka kita peroleh

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = K \psi(r, t). \quad (2.7)$$

Ekspresi ruas kanan persamaan (2.7) menurut persamaan (2.2) identik dengan energi total, sehingga jelas bahwa K berdimensi energi E . Oleh karena itu, persamaan (2.5) dan (2.6) dapat ditulis sebagai

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} T(t) = E T(t), \quad (2.8)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) u(r) = E u(r). \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) dikenal sebagai Persamaan Schrödinger Tidak Bergantung Waktu atau *Time Independent Schrödinger Equation* (TISE). Persamaan (2.8) dapat dipecahkan langsung, menghasilkan

$$T(t) = A \exp(-iEt/\hbar), \quad (2.10)$$

sehingga solusi umum fungsi gelombang dalam persamaan (2.3) mempunyai bentuk

$$\psi(r, t) = u(r) \exp(-iEt/\hbar). \quad (2.11)$$

(Greenhow, 1995:21). Tetapan A dalam hal ini dimasukkan dalam fungsi $u(r)$. Solusi untuk $u(r)$ bergantung pada bentuk potensial $V(r)$ dari sistem yang kita tinjau.

2.2 Persamaan Schrödinger PDM

Ketika massa partikel bergantung pada posisinya maka massa $M(\vec{r}) = m_0 m(\vec{r})$ dan operator momentum $\vec{P} = -i\hbar \vec{\nabla}$ sebagai komponen dari

operator energi kinetik sistem $\vec{T} = \frac{\vec{P}^2}{2M(\vec{r})}$ menjadi tidak komut menurut relasi:

$$\left[M(\vec{r}), P(\vec{r}) \right] = i\hbar m_o \left[m'(\vec{r}) - m(\vec{r}) \vec{\nabla} \right]. \quad (2.12)$$

Secara umum, operator energi kinetik dalam sistem PDM diilhami oleh Von Roos yang dinyatakan dalam bentuk:

$$\hat{T} = \frac{1}{4} \left[M^\alpha(\vec{r}) \vec{P} M^\beta(\vec{r}) \vec{P} M^\gamma(\vec{r}) + M^\gamma(\vec{r}) \vec{P} M^\beta(\vec{r}) \vec{P} M^\alpha(\vec{r}) \right], \quad (2.13)$$

dengan α , β , dan γ adalah parameter yang terikat pada kondisi yang ditentukan Von Roos, yaitu:

$$\alpha + \beta + \gamma = -1 \quad ; \quad \alpha, \beta, \gamma \in R. \quad (2.14)$$

Dalam beberapa literatur, ada beberapa cara untuk mendefinisikan operator energi kinetik sistem kuantum agar operator energi kinetik sistem menjadi komut. Operator energi kinetik yang telah diusulkan tersebut diantaranya adalah operator energi kinetik Gora dan Williams dengan $\beta = \gamma = 0$ dan $\alpha = -1$, BenDaniel dan Duke dengan $\alpha = \gamma = 0$ dan $\beta = -1$, Zhu dan Kroemer dengan $\alpha = \gamma = -\frac{1}{2}$ dan $\beta = 0$, dan Li dan Kuhn dengan $\beta = \gamma = -\frac{1}{2}$ dan $\alpha = 0$ (Mustafa dan Mazharimousavi, 2006).

Dalam penelitian ini, kita mengambil bentuk energi kinetik yang diperkenalkan oleh BenDaniel dan Duke karena mempunyai bentuk yang lebih sederhana dibandingkan dengan yang lain. Operator energi kinetik BenDaniel dan Duke dinyatakan dalam bentuk:

$$\hat{T} = \vec{P} \cdot \frac{1}{2M(\vec{r})} \vec{P} = -\frac{\hbar^2}{2m_o} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{m(\vec{r})} \vec{\nabla} \right) \right], \quad (2.15)$$

sehingga Hamiltonian sistem dengan energi potensial efektif sistem $V_{eff}(\vec{r})$ ditulis dalam bentuk:

$$\hat{H} = \vec{P} \cdot \frac{1}{2M(\vec{r})} \vec{P} + V_{eff}(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m_o} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{m(\vec{r})} \vec{\nabla} \right) \right] + V_{eff}(\vec{r}). \quad (2.16)$$

Dengan memilih sistem satuan ($m_0 = \hbar = 1$) dan hanya mempertimbangkan sistem untuk satu dimensi, kita peroleh Hamiltonian dari persamaan (2.16) dalam bentuk

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \left[\frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \right) \right] + V_{eff}(x) = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m'}{2m^2} \frac{d}{dx} + V_{eff}(x), \quad (2.17)$$

dengan m' adalah turunan pertama dari $m(x)$ terhadap koordinat x . Selanjutnya persamaan Schrödinger PDM yang sesuai untuk Hamiltonian (2.17) adalah

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - \frac{m'}{m} \frac{d\psi(x)}{dx} + 2m[E - V_{eff}(x)]\psi(x) = 0, \quad (2.18)$$

(Alhaidari, Tanpa Tahun b). Persamaan (2.18) merupakan persamaan yang akan dicari solusi analitiknya dalam penelitian ini.

2.3 Transformasi Koordinat Persamaan Schrödinger PDM

Agar lebih memudahkan dalam mencari solusi pada persamaan (2.18), kita transformasi persamaan tersebut ke dalam bentuk persamaan umum yang sudah kita ketahui solusinya, yaitu

$$\frac{d^2 F}{dg^2} + Q(g) \frac{dF}{dg} + R(g)F(g) = 0. \quad (2.19)$$

Dalam persamaan (2.19), $Q(g)$ dan $R(g)$ ditentukan oleh tipe fungsi khusus. Dalam hal ini supaya persamaan (2.18) konsisten dengan persamaan (2.19) maka kita pilih transformasi koordinat untuk fungsi eigen $\psi_n(x)$ dalam bentuk

$$\psi(x) = f(x)F(g(x)), \quad (2.20)$$

dengan $F(g)$ adalah sembarang fungsi khusus. Untuk memastikan bahwa $F(g)$ merupakan fungsi khusus, maka $F(g)$ harus memenuhi persamaan umum diferensial orde kedua (2.19) yang sudah kita ketahui solusinya.

Dari substitusi persamaan (2.20) ke persamaan (2.18), kita peroleh persamaan berikut

$$\frac{d^2 F}{dg^2} + \left[\frac{g''}{(g')^2} + \frac{2f'}{fg'} - \frac{m'}{mg'} \right] \frac{dF}{dg} + \left[\frac{f''}{f(g')^2} - \frac{m'f'}{mf(g')^2} + \frac{2m[E - V_{eff}(x)]}{(g')^2} \right] F(g) = 0, \quad (2.21)$$

Selanjutnya kita akan membuat $F(g)$ menjadi bentuk fungsi khusus tertentu. Dengan memperkenalkan sebuah fungsi bantu dalam bentuk

$$\mu(x) = \int^x \sqrt{m(x)} dx. \quad (2.22)$$

kita tulis potensial efektif V_m sebagai

$$V_m = \frac{1}{4m} (G(m) - G(\mu')) = \frac{1}{8m} \left[\frac{m''}{m} - \frac{7}{4} \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \right], \quad (2.23)$$

yang menggambarkan suku potensial baru untuk sistem massa bergantung x (Guo-Xing *et al.*, 2005a).

2.4 Fungsi Massa dan Potensial V_m

Fungsi massa yang kita gunakan dalam sistem ini bisa untuk bermacam-macam bentuk fungsi. Fungsi massa nantinya dapat menjelaskan potensial V_m dan menjelaskan sifat-sifatnya akibat bergantungnya massa pada koordinat.

Dari fungsi massa $m(x)$ yang terdapat dalam sistem, kita akan memperoleh $\mu(x)$ dari persamaan (2.22) dengan memasukkan fungsi massa $m(x)$ tersebut. Dari persamaan (2.23) kita dapatkan bentuk potensial V_m untuk fungsi massa $m(x)$ di atas. Dari bentuk potensial tersebut, dapat dilihat bahwa V_m akan berperilaku seperti sebuah rintangan (*a barrier*) untuk parameter tertentu dan berperilaku seperti sebuah sumur (*a well*) yang bisa mengikat atau membatasi gerakan dari partikel tersebut untuk parameter tertentu itu.

Dari fungsi-fungsi massa yang ada tersebut, kita dapat melihat bahwa bergantungnya massa pada posisi suatu partikel akan mempengaruhi perilaku dari sistem yang dapat dilihat dari bentuk potensialnya. Di mana potensial untuk sistem PDM mempunyai bentuk yang sama seperti potensial untuk sistem massa konstan, yaitu dengan $\mu(x)$ sebagai pengganti x dan terdapat tambahan pernyataan V_m untuk sistem PDM (Guo-Xing *et al.*, 2005a).

2.5 Osilator Harmonik

2.5.1 Osilator Harmonik Sederhana dalam Tinjauan Klasik

Setiap gerak yang berulang dalam selang waktu yang sama disebut gerak periodik. Pergeseran partikel yang bergerak periodik selalu dapat dinyatakan dalam fungsi sinus dan kosinus. Jika suatu partikel dalam gerak periodik bergerak bolak-balik terhadap titik kesetimbangan tertentu, maka geraknya disebut gerak osilasi atau getaran.

Partikel yang berosilasi demikian disebut osilator harmonik sederhana dan geraknya disebut gerakan harmonik sederhana (*simple harmonic motion*). Dalam gerak harmonik sederhana batas osilasinya berjarak sama terhadap titik seimbang. Tidak demikian halnya dengan gerak yang lebih umum, walaupun harmonik, bukanlah harmonik sederhana, misalnya ada redaman (Halliday dan Resnick, 1978: 442).

Dalam kasus khusus gerak harmonik sederhana, kita ambil sebagai contoh yaitu sistem pegas. Sistem pegas ini akan memanjang bila pada pegas bekerja suatu gaya. Makin besar simpangan yang dibutuhkan, makin besar pula gaya yang harus diberikan. Dikatakan bahwa gaya yang dibutuhkan sebanding dengan simpangan yang diinginkan dan secara matematika ditulis sebagai:

$$F = kx. \quad (2.24)$$

dengan k adalah konstanta pegas (Newton/meter) dan x adalah simpangan terhadap posisi kesetimbangan O (meter). Hubungan ini berlaku selama batas elastisitas pegas tidak dilampaui.

Gaya yang dituliskan pada persamaan (2.24) adalah gaya yang bekerja pada sistem (pegas). Karena sistem diberi gaya maka sistem memberi reaksi pada objek yang memberi gaya tersebut dan gaya reaksi inilah yang disebut gaya pemulih. Jadi, gaya pemulih tidak bekerja pada pegas tetapi adalah gaya oleh sistem pada objek yang memberi gaya padanya. Gaya ini disebut sebagai gaya

pemulih karena ia berusaha memulihkan sistem ke keadaan setimbangnya (Prasetio *et al.*, 1992: 8-9).

Gaya pemulih F pada partikel bermassa m adalah linear; ini berarti F berbanding lurus pada pergeseran partikel x dari kedudukan setimbangnya dan arahnya berlawanan. Sehingga

$$F = -kx. \quad (2.25)$$

Hubungan ini biasanya disebut hukum Hooke. Menurut hukum gerak kedua, $F=ma$, maka persamaan diferensial getaran harmonis dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} -kx &= m \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Terdapat berbagai cara untuk memecahkan persamaan di atas. Salah satu pilihan solusi persamaan di atas adalah:

$$x = A \cos(\omega t + \phi), \quad (2.27)$$

dengan

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f, \\ f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

dengan f merupakan frekuensi osilasi, A adalah amplitudo, dan harga ϕ adalah tetapan fase.

Persamaan diferensial (2.26) muncul di banyak problem fisis yang berbeda. Bila persamaan ini dijumpai, maka ini menunjukkan bahwa gejala yang berhubungan dengan persamaan itu berosilasi sesuai dengan $A \cos(\omega t + \phi)$. Baik persamaan itu menggambarkan perpindahan partikel yang linier, arus dalam rangkaian listrik, temperatur suatu benda, atau problem fisis lain yang banyak jumlahnya.

Selanjutnya energi kinetik partikel dinyatakan dalam

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [1 - \cos^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2}m\omega^2 (A^2 - x^2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Untuk mendapatkan energi potensial E_p dapat diperoleh dengan menghitung kerja yang diperlukan untuk membawa partikel dari $x = 0$ ke $x = x$ terhadap gaya semacam itu. Hasilnya adalah

$$E_p = - \int_0^x F(x) dx = k \int_0^x x dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (2.30)$$

Dengan menambahkan persamaan (2.29) dan (2.30) didapat energi total osilator harmonik sederhana:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2, \quad (2.31)$$

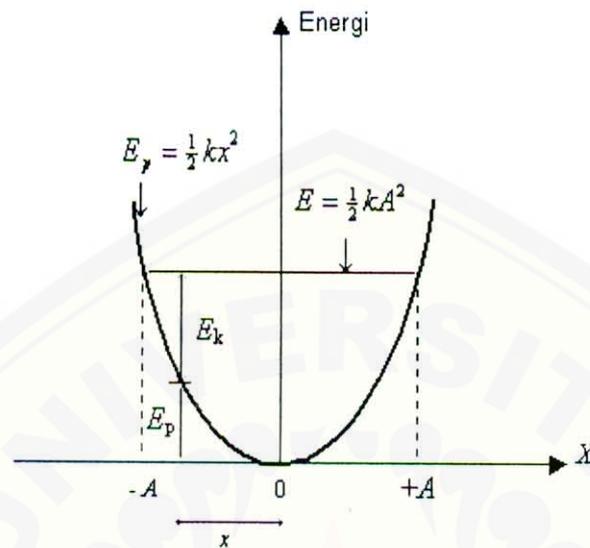
merupakan harga yang konstan. Kekalnya energi dikarenakan gayanya konservatif. Karena itu, selama satu osilasi terdapat pertukaran energi kinetik dan energi potensial yang kontinu. Selama partikel menjauh dari posisi kesetimbangan, energi potensial bertambah dengan berkurangnya energi kinetik dan keadaan sebaliknya terjadi bila partikel bergerak ke posisi kesetimbangan.

Gambar (2.1) menunjukkan energi potensial $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ yang dinyatakan oleh sebuah parabola. Energi total tertentu E ditunjukkan oleh garis horizontal pada gambar, batas osilasi ditentukan oleh titik potongnya dengan kurva energi potensial. Karena parabola E_p adalah simetrik, batas-batas osilasi berada pada jarak yang sama $\pm A$ dari O . Pada tiap titik x , energi kinetik E_k dinyatakan oleh jarak antara kurva E_p dan garis E (Alonso dan Finn, 1994: 255-256).

2.5.2 Osilator Harmonik dalam Tinjauan Kuantum

Sistem osilator harmonik dengan potensial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, jika kita nyatakan dalam ω menjadi:

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (2.32)$$



Gambar 2.1 Hubungan Energi dalam Osilator Harmonik Sederhana

Sumber: Alonso dan Finn, 1994: 255

dengan

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.33)$$

Sehingga Hamiltonian klasik dapat kita tulis dalam bentuk:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2. \quad (2.34)$$

Dalam sistem kuantum, operator momentum kita nyatakan dalam:

$$\hat{P} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.35)$$

Sehingga persamaan Schrödinger untuk osilator harmonik dengan potensial 1 dimensi dapat kita nyatakan sebagai:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi. \quad (2.36)$$

Untuk memudahkan mencari solusi ψ , kita sederhanakan persamaan diferensial di atas dengan memperkenalkan kuantitas tak-berdimensi (parameter baru)

$$x \equiv \xi \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} ; \frac{\xi}{x} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} ; 2\alpha = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right), \quad (2.37)$$

dan

$$K = \frac{2E}{\hbar\omega}, \quad (2.38)$$

dengan ω menyatakan frekuensi klasik osilasi. Persamaan Schrödinger jika dinyatakan dalam ξ dan K menjadi

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - K)\psi. \quad (2.39)$$

Bentuk persamaan diferensial ini sering dijumpai dalam matematika, dengan solusi berbentuk fungsi Gaussian:

$$\psi(\xi) = h_n(\xi) e^{-\xi^2/2}. \quad (2.40)$$

Jika kita hitung derivatif kedua dari fungsi di atas, maka akan didapatkan:

$$\psi''(\xi) = [h_n''(\xi) - 4\alpha\xi h_n'(\xi) + (4\alpha^2 x^2 - 2\alpha)h_n(\xi)] e^{-\xi^2/2}. \quad (2.41)$$

Kita substitusi persamaan (2.40) dan (2.41) ke dalam persamaan (2.36) sehingga kita dapatkan:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} h_n''(\xi) + \frac{2\hbar^2}{m} \alpha \xi h_n'(\xi) - \frac{\hbar^2}{2m} (4\alpha^2 x^2 - 2\alpha) h_n(\xi) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 h_n(\xi) = E h_n(\xi). \quad (2.42)$$

Kita masukkan $\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$ dan mengalikan persamaan di atas dengan $\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$,

sehingga dihasilkan:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} h_n''(\xi) + \hbar\alpha x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} h_n'(\xi) + \left(\frac{\hbar\omega}{2} - E \right) \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} h_n(\xi) = 0. \quad (2.43)$$

Persamaan (2.43) harus diubah dalam bentuk $\frac{d}{d\xi}$, sehingga diperoleh

$$-\frac{\hbar\omega}{2} \frac{\xi}{x} \frac{d^2 h_n(\xi)}{d\xi^2} + \hbar\omega x \frac{\xi^2}{x^2} \frac{dh_n(\xi)}{d\xi} + \frac{\xi}{x} \left(\frac{\omega\hbar}{2} - E \right) h_n(\xi) = 0. \quad (2.44)$$

Kemudian dengan mengalikan persamaan di atas dengan $-\frac{2x}{\omega\hbar\xi}$, maka diperoleh

$$\frac{d^2 h_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dh_n(\xi)}{d\xi} + (K-1)h_n(\xi) = 0. \quad (2.45)$$

Ini merupakan persamaan diferensial yang harus dipenuhi oleh $h_n(\xi)$ yang misalnya mempunyai solusi berbentuk deret:

$$h_n(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} A_n \xi^n. \quad (2.46)$$

Pendiferensialan $h_n(\xi)$ terhadap variabel ξ menghasilkan:

$$\frac{dh_n(\xi)}{d\xi} = A_1 + 2A_2\xi + 3A_3\xi^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} nA_n \xi^{n-1}. \quad (2.47)$$

Jika dikalikan dengan ξ maka akan menghasilkan:

$$\xi \left[\frac{dh_n(\xi)}{d\xi} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} nA_n \xi^n. \quad (2.48)$$

Turunan kedua dari $h_n(\xi)$ terhadap ξ adalah:

$$\frac{d^2 h_n(\xi)}{d\xi^2} = 2A_1 + 6A_3\xi + 12A_4\xi^2 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)A_{n+2} \xi^n. \quad (2.49)$$

Kita substitusikan persamaan (2.46), (2.48), dan (2.49) pada persamaan (2.45) akan menghasilkan:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)A_{n+2} \xi^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} nA_n \xi^n + \left(\frac{2E}{\omega\hbar} - 1 \right) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)A_{n+2} - 2nA_n + \left(\frac{2E}{\omega\hbar} - 1 \right) A_n \right] \xi^n &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)A_{n+2} + \left(\frac{2E}{\omega\hbar} - 2n - 1 \right) A_n \right] \xi^n &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Supaya persamaan (2.50) berlaku untuk setiap ξ , kuantitas dalam tanda kurung harus nol untuk setiap n sehingga kita dapatkan:

$$\begin{aligned} \left[(n+2)(n+1)A_{n+2} + \left(\frac{2E}{\omega\hbar} - 2n - 1 \right) A_n \right] &= 0, \\ (n+2)(n+1)A_{n+2} &= \left(2n+1 - \frac{2E}{\omega\hbar} \right) A_n, \\ A_{n+2} &= \frac{2n+1 - \frac{2E}{\omega\hbar}}{(n+2)(n+1)} A_n = \frac{2n+1 - K}{(n+2)(n+1)} A_n. \end{aligned} \quad (2.51)$$

(Griffiths, 1995: 37). Ini memungkinkan kita untuk mencari koefisien A_2, A_3, A_4, \dots yang dinyatakan dalam A_0 dan A_1 . Persamaan (2.45) merupakan persamaan diferensial orde kedua, sehingga penyelesaiannya mempunyai dua konstanta sembarang, di sini konstanta itu adalah A_0 dan A_1 . Mulai dari A_0 kita dapatkan deret koefisien A_2, A_4, A_6, \dots dan mulai dari A_1 kita dapatkan deret lain A_3, A_5, A_7, \dots

Kita perlu memeriksa perilaku fungsi dalam persamaan (2.40) ketika $y \rightarrow \infty$. Fungsi gelombang dapat diterima secara fisis jika $\psi \rightarrow 0$ ketika $y \rightarrow \infty$.

Karena $h(\xi)$ dikalikan dengan $e^{-\xi^2/2}$, agar ψ memenuhi persamaan tersebut maka

$$\lim_{y \rightarrow \infty} h(\xi) < e^{\xi^2/2}. \quad (2.52)$$

D sini kita perlu memberi spesifikasi berapa $h(\xi)$ harus lebih kecil dari $e^{\xi^2/2}$ dalam limitnya.

Jika deret $h(\xi)$ berakhir pada harga n tertentu, sehingga koefisien A_n menjadi nol untuk harga n yang lebih tinggi dari harga tertentu itu, maka ψ akan menuju nol ketika $y \rightarrow \infty$ karena faktor $e^{-\xi^2/2}$. Dari persamaan (2.51) jelas bahwa agar koefisien A_n menjadi nol untuk setiap harga n maka nilai K haruslah:

$$K = 2n + 1. \quad (2.53)$$

Persyaratan $K = 2n + 1$ merupakan syarat agar fungsi gelombang persamaan (2.39) mempunyai solusi yang memenuhi berbagai persyaratan. Sehingga dari persamaan (2.51), kita peroleh hubungan

$$K = \frac{2E}{\omega\hbar} = 2n + 1, \quad (2.54)$$

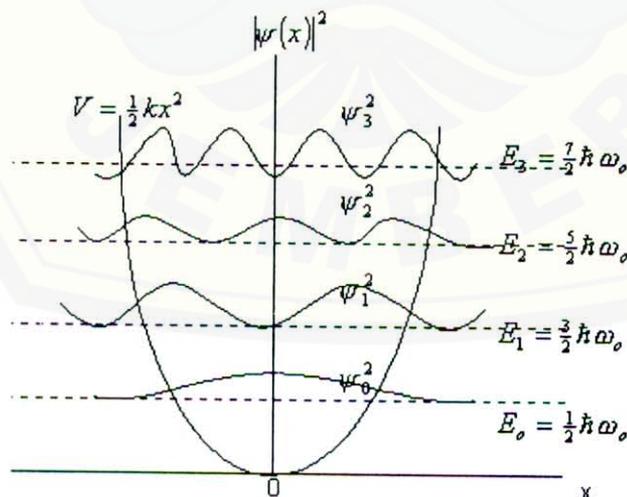
$$E = \omega\hbar \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

sehingga dapat ditunjukkan bahwa nilai-nilai energi yang mungkin adalah

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega. \quad (2.55)$$

dengan $n =$ bilangan kuantum utama berharga $= 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$.

Ini berarti bahwa energi sebuah osilator harmonik terkuantisasi terhadap n , yang jika kita masukkan nilai $n = 0$ maka ini menyatakan energi terendah yang dimiliki oleh osilator itu. Harga ini disebut energi titik-nol. Beberapa tingkat energi dalam osilator harmonik dapat kita lihat seperti pada gambar (2.2) di bawah ini. Kita lihat bahwa separasi tingkat-tingkat energi yang berdekatan selalu sama yaitu $\Delta E = \hbar\omega$ (Beiser, 1987: 573-575).



Gambar 2.2 Tingkat Energi dan Rapat Probabilitas pada Osilator Harmonik Sederhana

Kembali ke persamaan (2.45), solusi umum persamaan ini adalah:

$$h_n(\xi) = C_n H_n(\xi), \quad (2.56)$$

dengan H_n adalah polynomial Hermit dan C_n adalah koefisien normalisasi. Jadi, solusi Gaussian menjadi:

$$\psi(\xi) = C_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}. \quad (2.57)$$

Fungsi gelombang ternormalisasi mensyaratkan:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* \psi(x) dx &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} [C_n H_n(\xi)]^2 e^{-\xi^2} dx &= 1, \\ C_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(\xi) e^{-\xi^2} dx &= 1. \end{aligned} \quad (2.58)$$

(Griffiths, 1995: 37). Integral di atas dapat diselesaikan dengan bantuan fungsi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = 2^n \pi^{1/2} n!. \quad (2.59)$$

(Arfken dan Weber, 1990:821). Sehingga didapat:

$$\begin{aligned} C_n^2 (2^n n!) \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} &= 1, \\ C_n &= \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} (2^n n!)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Dengan demikian rumus umum fungsi gelombang ke- n untuk sistem osilator harmonik ini adalah:

$$\begin{aligned} \psi_n &= C_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \\ &= \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} (2^n n!)^{-1/2} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

(Griffiths, 1995: 37).

2.6 Polinomial Hermit

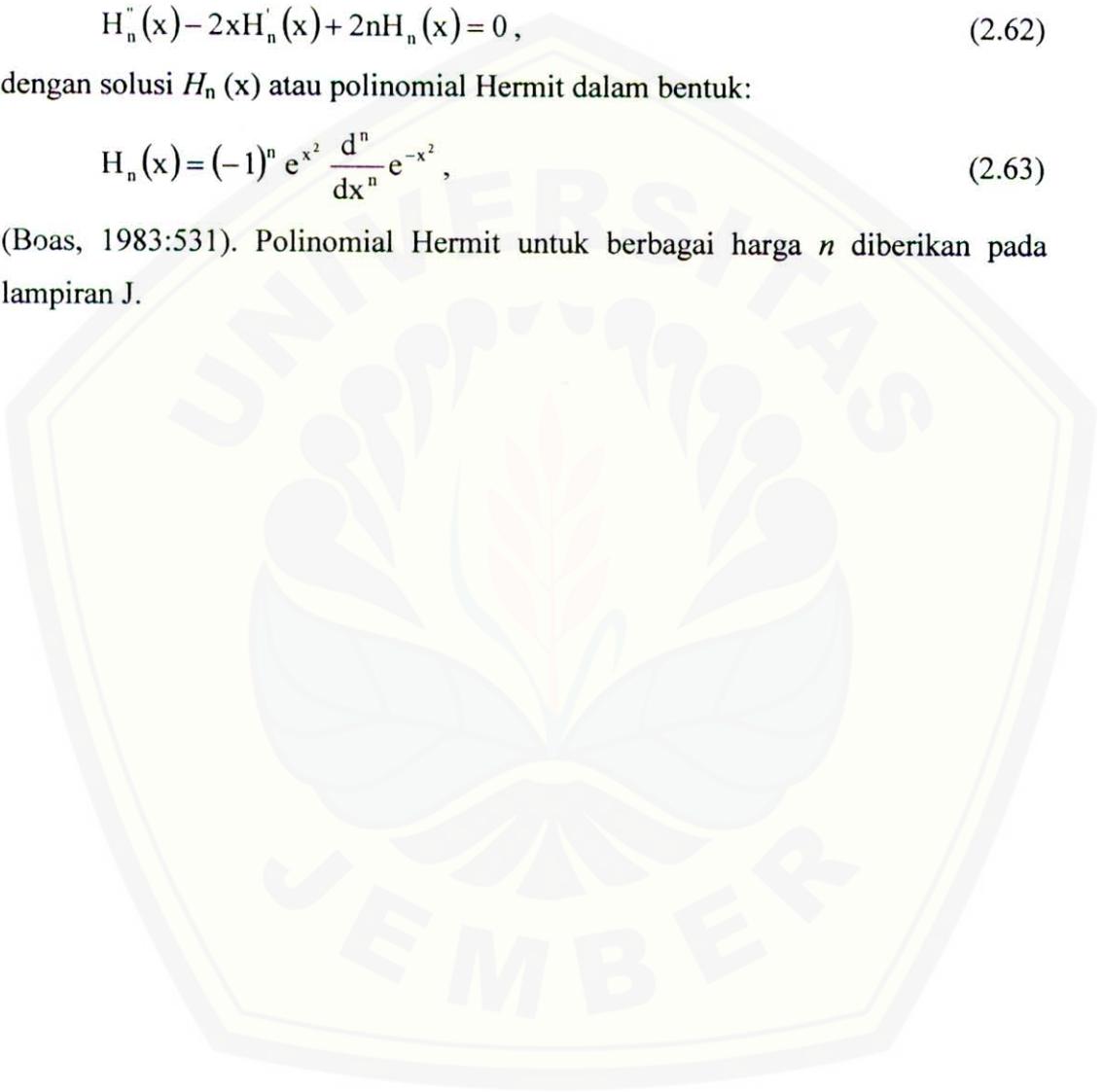
Persamaan diferensial Hermit, yang tidak lain adalah persamaan Hermit dinyatakan dalam:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0, \quad (2.62)$$

dengan solusi $H_n(x)$ atau polinomial Hermit dalam bentuk:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad (2.63)$$

(Boas, 1983:531). Polinomial Hermit untuk berbagai harga n diberikan pada lampiran J.





BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Pelaksanaan

Penelitian ini akan dilaksanakan di Jurusan Fisika Fakultas MIPA Universitas Jember dan pelaksanaan penelitian ini direncanakan mulai bulan Februari 2007 sampai Juni 2007.

3.2 Definisi Operasional

3.2.1 Persamaan Schrödinger PDM

Persamaan Schrödinger PDM adalah sebuah persamaan Schrödinger dengan massa partikel bergantung pada posisinya.

3.2.2 Transformasi Koordinat Jenis Kedua

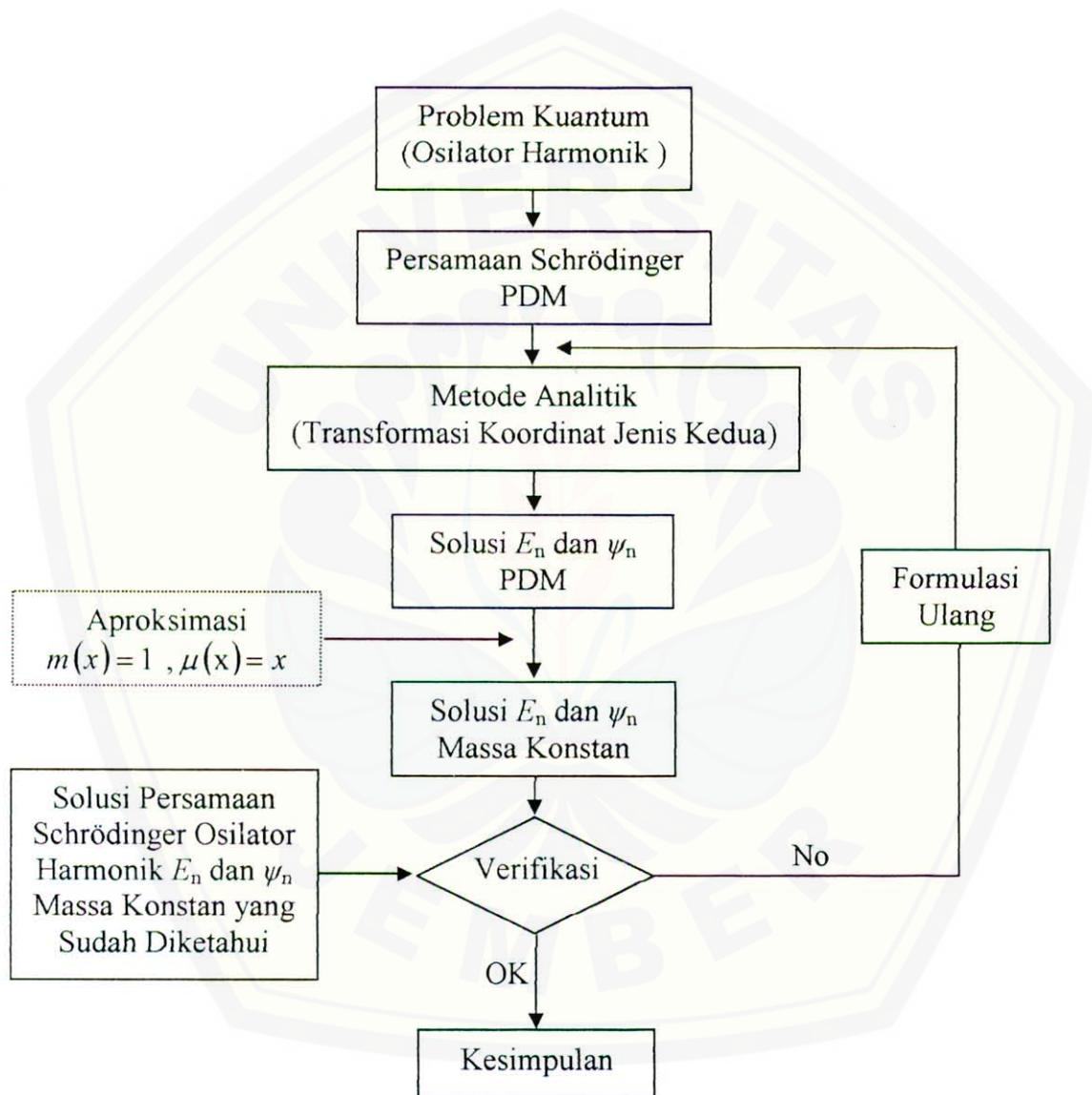
Transformasi Koordinat jenis kedua adalah salah satu metode untuk mencari solusi analitik persamaan gelombang kuantum dengan cara mentransformasi persamaan gelombang kuantum tersebut menjadi bentuk persamaan diferensial orde kedua yang sering dijumpai dalam matematika dengan solusi yang sudah diketahui; bisa berbentuk fungsi khusus yang hipergeometrik (*hypergeometric function*) maupun hipergeometrik terpadu (*confluent hypergeometric function*).

3.2.3 Osilator harmonik

Osilator harmonik adalah gerak osilasi di mana gaya yang bekerja pada sistem sebanding dengan simpangan tetapi arahnya berlawanan, atau gerakan bolak-balik di mana percepatannya sebanding dengan simpangan dari titik acuan 0 (posisi setimbangnya) dan arahnya selalu menuju titik 0 ini.

3.3 Desain Penelitian

Problem kuantum yang menjadi bahasan dalam penelitian ini adalah sistem osilator harmonik. Garis besar dari apa yang akan dilaksanakan dalam penelitian ini digambarkan dalam diagram berikut:



Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian

Problem kuantum yang menjadi bahasan dalam penelitian ini adalah osilator harmonik dengan massa bergantung posisi (PDM). Secara garis besar, langkah pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mencari solusi persamaan Schrödinger PDM secara analitik dengan menggunakan metode Transformasi Koordinat jenis kedua yaitu berupa nilai eigen energi (E_n) dan fungsi eigen (ψ_n). Langkah kedua adalah menjalankan aproksimasi $m(x)=1$ dan $\mu(x)=x$ agar diperoleh solusi analitik sistem osilator harmonik untuk massa konstan.

Kemudian kita bandingkan solusi persamaan Schrödinger masa konstan setelah dijalankan aproksimasi tersebut dengan solusi persamaan Schrödinger massa konstan yang sudah diketahui. Bila keduanya tidak cocok, maka kita lakukan pengecekan ulang dari awal untuk langkah persamaan Schrödinger PDM sampai kita mendapatkan solusi persamaan Schrödinger massa konstan melalui aproksimasi hingga benar-benar cocok dengan solusi persamaan Schrödinger massa konstan. Setelah keduanya cocok maka kita dapat menarik kesimpulan dari hasil perhitungan telah didapat tersebut.

3.4 Analisa Data

Analisa data dilakukan dengan cara menjalankan aproksimasi pada solusi persamaan Schrödinger PDM dengan mensubstitusi $m(x)=1$ dan $\mu(x)=x$. Aproksimasi dijalankan untuk mereduksi solusi analitik persamaan Schrödinger PDM agar menjadi solusi analitik persamaan Schrödinger untuk massa konstan. Untuk membuktikan bahwa solusi analitik persamaan schrödinger PDM tersebut telah benar, maka ketika pada solusi tersebut dijalankan aproksimasi di atas hasilnya harus sesuai dengan solusi analitik persamaan Schrödinger sistem osilator harmonik untuk massa konstan sebagaimana yang sudah ada. Sehingga dari sini kita akan dapat menarik sebuah kesimpulan bagaimana bentuk solusi

analitik persamaan Schrödinger PDM untuk sistem osilator harmonik yang tidak lain merupakan generalisasi untuk massa konstan.





BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Persamaan Schrödinger PDM adalah sebuah persamaan yang menyatakan dinamika suatu sistem kuantum PDM. Secara umum, bentuk persamaan Schrödinger PDM dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{m'}{m} \frac{d\psi(x)}{dx} + 2m[E - V_{eff}(x)]\psi(x) = 0 .$$

Dengan menggunakan metode transformasi koordinat jenis kedua pada sistem osilator harmonik 1 dimensi diperoleh solusi sistem PDM yaitu fungsi eigen $\psi_n(x)$ sebagai berikut

$$\psi_n(x) = m^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\omega\mu^2} H_n(\sqrt{\omega}\mu).$$

Selanjutnya dari persamaan fungsi eigen $\psi_n(x)$ tersebut juga dapat disimpulkan bahwa nilai eigen energi E_n sistem osilator harmonik PDM adalah

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega ,$$

Untuk mengetahui bahwa hasil perhitungan tersebut telah konsisten, kita lakukan aproksimasi massa konstan terhadap persamaan-persamaan terkait (kasus PDM) yaitu dengan mengambil bentuk $m(x)=1$ dan $\mu(x)=x$ pada persamaan fungsi eigen $\psi_n(x)$ dan nilai eigen energi E_n sistem osilator harmonik PDM. Di mana persamaan-persamaan tersebut mereduksi menjadi persamaan-persamaan untuk kasus massa konstan. Dari hasil aproksimasi diperoleh bahwa nilai eigen energi E_n adalah

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega ,$$

di mana nilai eigen energi E_n sistem PDM mempunyai bentuk yang sama dengan nilai eigen energi E_n sistem massa konstan. Sedangkan hasil aproksimasi fungsi eigen $\psi_n(x)$ diperoleh

$$\psi_n \cong e^{-\frac{1}{2}\omega\mu^2} H_n(\sqrt{\omega}x),$$

di mana terlihat bahwa fungsi eigen $\psi_n(x)$ sistem PDM berbeda dengan fungsi eigen $\psi_n(x)$ sistem massa konstan, yaitu dengan adanya faktor pengali terhadap fungsi posisi yang tidak berdimensi $m(x)$ pada sistem PDM. Perbedaan fungsi eigen $\psi_n(x)$ ini mempunyai dampak pada perbedaan sifat dinamika dari sistem kuantum tersebut. Sehingga dapat dilihat bahwa hasil perhitungan yang didapat tersebut sudah konsisten dengan solusi sistem massa konstan. Sehingga kita dapat menyatakan bahwa sistem PDM merupakan generalisasi dari sistem massa konstan. Kasus osilator harmonik PDM ini diantaranya dapat diaplikasikan dalam bidang semikonduktor, sebagai salah satu contoh adalah pada sebuah struktur *GaAs/Al_zGa_{1-z}As/GaAs* QW.

5.2 Saran

Adapun beberapa saran dari penulis dengan adanya penelitian ini diantaranya adalah:

- Karena kebanyakan fenomena osilasi dalam fisika adalah tak linear, sehingga akan lebih bermanfaat jika dilanjutkan dengan sebuah penelitian tentang sistem osilator harmonik tak linear untuk kasus PDM non-relativistik.
- Untuk mengetahui apakah E_n dalam semua sistem PDM sama dengan E_n -nya dalam sistem massa konstan, maka diperlukan penelitian lebih lanjut untuk sistem-sistem yang lain; misalnya sistem atom Hidrogen.

DAFTAR PUSTAKA

- Alhaidari, A. D. (Tanpa Tahun a). *Nonrelativistic Green's Function for System with Position - Dependent Mass*. <http://arxiv.org/ftp/cond-mat/papers/0303/0303537.pdf> [7 Mei 2007].
- Alhaidari, A. D. (Tanpa Tahun b). *Solutions of The Nonrelativistic Wave with Position-Dependent Effective Mass*. <http://arxiv.org/ftp/quant-ph/papers/0207/0207061.pdf> [25 Februari 2007].
- Alonso, M. dan Finn, E. J. 1994. *Dasar-dasar Fisika Universitas*. Edisi kedua, Jilid 1 Mekanika dan Termodinamika. Jakarta: Erlangga.
- Arfken dan Weber. 1990. *Mathematical Methods for Physics*. Fifth Edition. United States of America: Harcourt Academic Press.
- Beiser, A. 1987. *Konsep Fisika Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Boas, L. M. 1983. *Mathematical Methods In The Physical Sciences*. 2nd Edition. New York: John Wiley & Son.
- Gönül, B dan Koçak, M. 2005. *Explicit Solutions for N-Dimensional Schrödinger Equations with Position-Dependent Mass*. <http://www.arxiv.org/vc/quant-ph/papers/0512/0512035v1.pdf> [20 Maret 2007].
- Greenhow, R. C. 1995. *Introductory Quantum Mechanics*. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia.
- Griffiths, D. J. 1995. *Introduction to Quantum Mechanics*. New Jersey: Prentice Hall.
- Guo-Xing, Ju., Chang-Ying, Cai., Yang, Xiang., Zhong-Zhou, Ren. 2005a. *The Coordinate Transformation and The Exact Solutions of The Schrodinger Equation with Position-Dependent Effective Mass*. <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0601004> [26 Februari 2007].
- Guo-Xing, Ju., Xiang, Y., Ren, Z. 2005b. *The Localization of s-Wave and Quantum Effective Potential of a Quasi-Free Particle with Position-Dependent Mass.* <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0601005> [26 Februari 2007].
- Halliday, D dan Resnick, R. 1978. *Fisika*. Edisi ke 3, Jilid 1. Jakarta: Erlangga.

- Koç, R. dan Şahinoğlu, G. 2005. *Scattering in Abrupt Heterostructures Using a Position Dependent Mass Hamiltonian*. http://arxiv.org/PS_cache/quant-ph/pdf/0510/0510172v1.pdf [6 Mei 2007].
- Krane, K. S. 1992. *Fisika Modern*. Jakarta: UI-Press.
- Mustafa, O. dan Mazharimousavi, S. H. 2006. *Ordering Ambiguity Revisited Via Position Dependent Mass Pseudo-Momentum Operator*. <http://www.citebase.org/fulltext?format=application%2Fpdf&identifier=oai%3AarXiv.org%3Aquant-ph%2F0607158> [26 Februari 2007].
- Prasetio, L., Setiawan, S., dan Hien, T. K. 1992. *Mengerti Fisika*. Yogyakarta: Andi Offset Yogyakarta.
- Ram, L. R dan Mohan. 2002. *Finite Element and Boundary Element Applications in Quantum Mechanics*. New York: Oxford University Press Inc.
- Renreng, A. 1981. *Asas-asas Metode Matematika dalam Fisika*. Bandung: Penerbit Angkasa Bandung.
- Semiconductor Physics Group. 2004. *GaAs/AlGaAs heterostructures and two-dimensional electron or hole gases*. <http://www.sp.phy.cam.ac.uk/SPWeb/research/wafer.html> [28 Mei 2007].
- Quesne, C., Bagchi, B., Banerjee, A., Tkachuk, V. M. 2005. *Hamiltonians with position-dependent mass, deformations and supersymmetry*. <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0512046> [29 Februari 2007].
- Tanaka, T. 2005. *N-fold Supersymmetry in Quantum Systems with Position-dependent Mass..* <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0509132> [30 Februari 2007].
- Varberg, D., Purcell, E. J., dan Rigdon, S. E. 2007. *Kalkulus Edisi kedelapan Jilid 1*. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Von Roos, O. 1983. *Position-Dependent Effective Masses in Semiconductor Theory*. Phys. Rev. B 27, 7547–7552. URL:<http://link.aps.org/abstract/PRB/v27/p7547>. [29 Februari 2007].
- Weisstein, E. W. 2003. *Confluent Hypergeometric Function of the First Kind*. <http://mathworld.wolfram.com/ConfluentHypergeometricFunctionoftheFirstKind.html> [7 Mei 2007].
- Weisstein, E. W. 2004. *Hypergeometric Function*. <http://mathworld.wolfram.com/HypergeometricFunction.html> [7 Mei 2007].

- Weisstein, E. W. 2005. *Confluent Hypergeometric Function of the Second Kind*. <http://mathworld.wolfram.com/ConfluentHypergeometricFunctionoftheSecondKind.html> [7 Mei 2007].
- Weisstein, E. W. 2006. *Hermite Polynomial*. <http://mathworld.wolfram.com/HermitePolynomial.html> [7 Mei 2007].
- Wikipedia. Tanpa Tahun. *Aluminium Gallium Arsenide*. http://en.wikipedia.org/wiki/Aluminium_gallium_arsenide [7 Mei 2007].
- Wikipedia. 2006. *Confluent Hypergeometric Function*. http://en.wikipedia.org/wiki/Confluent_hypergeometric_function [7 Mei 2007].
- Yu, P. Y. dan Cardona, M. 1996. *Fundamentals of Semiconductors, Physics and Materials Properties*. Germany: Springer.

LAMPIRAN

A. Hasil Substitusi Persamaan (2.3) ke Persamaan (2.1)

Dari persamaan (2.3) berikut

$$\psi(r,t) = u(r)T(t).$$

kita substitusikan ke dalam persamaan (2.1), sehingga dapat ditulis:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u(r)T(t) + V(r)u(r)T(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [u(r)T(t)]$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} T(t) \nabla^2 u(r) + V(r)u(r)T(t) = i\hbar u(r) \frac{\partial}{\partial t} [T(t)]$$

kemudian membaginya dengan $u(r)T(t)$, sehingga diperoleh persamaan (2.4) berikut

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{u(r)} \nabla^2 u(r) + V(r) = i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{\partial}{\partial t} [T(t)]$$

$$\frac{1}{u(r)} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) u(r) = i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t}$$

B. Cara Mencari Solusi Persamaan (2.8)

Solusi dari persamaan (2.8) dapat dipecahkan secara langsung. Kita kalikan persamaan tersebut dengan $-i$ sehingga diperoleh

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} T(t) = -iE T(t)$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial}{\partial t} T(t) = -\frac{iE}{\hbar}$$

kemudian kita integrasikan persamaan di atas menjadi

$$\int \frac{1}{T(t)} dT(t) = \int -\frac{iE}{\hbar} dt$$

$$\ln T = -\frac{iE}{\hbar} t + c$$

$$\exp(\ln T) = \exp\left(-\frac{iE}{\hbar} t + c\right)$$

Sehingga diperoleh persamaan (2.10) berikut

$$T(t) = \exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right) \cdot \exp(c)$$

$$T(t) = A \exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right)$$

dengan A adalah konstanta.

C. Hubungan Komutasi Antara Operator Massa dan Momentum

Hubungan komutasi dua operator dalam kuantum secara umum ditulis dalam

$$[A, B] = AB - BA$$

Sehingga dapat kita cari komutasi dari operator massa dan momentum sebagai berikut

$$\begin{aligned} [M(\vec{r}), P(\vec{r})] \psi &= [M(\vec{r})P(\vec{r}) - P(\vec{r})M(\vec{r})] \psi \\ &= [-m_o m(\vec{r})i\hbar\nabla + i\hbar\nabla m_o m(\vec{r})] \psi \\ &= i\hbar m_o [\nabla m(\vec{r}) - m(\vec{r})\nabla] \psi \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan (2.12) berikut

$$[M(\vec{r}), P(\vec{r})] \psi = i\hbar m_o [m'(\vec{r}) - m(\vec{r})\nabla] \psi$$

D. Operator Energi Kinetik BenDaniel dan Duke

Dari bentuk umum operator energi kinetik sistem PDM yang diilhami oleh Von Roos, maka operator energi kinetik yang diperkenalkan Ben Daniel dan Duke dengan $\alpha = \gamma = 0$ dan $\beta = -1$, dapat ditulis:

$$\hat{T} = \frac{1}{4} \left[M^\alpha(\vec{r}) \vec{P} M^\beta(\vec{r}) \vec{P} M^\gamma(\vec{r}) + M^\gamma(\vec{r}) \vec{P} M^\beta(\vec{r}) \vec{P} M^\alpha(\vec{r}) \right]$$

$$\begin{aligned}
\hat{T} &= \frac{1}{4} \left[M^o(\vec{r}) \vec{P} M^{-1}(\vec{r}) \vec{P} M^o(\vec{r}) + M^o(\vec{r}) \vec{P} M^{-1}(\vec{r}) \vec{P} M^o(\vec{r}) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(1 \times \vec{P} \frac{1}{M(\vec{r})} \times \vec{P}(1) \right) + \left(1 \times \vec{P} \frac{1}{M(\vec{r})} \times \vec{P}(1) \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \times 2 \left[\vec{P} \cdot \frac{1}{M(\vec{r})} \vec{P} \right] \\
&= \vec{P} \cdot \frac{1}{2M(\vec{r})} \vec{P} \\
&= -i\hbar \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{2m_o m(\vec{r})} \left(-i\hbar \vec{\nabla} \right)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan (2.15) berikut

$$\hat{T} = \vec{P} \cdot \frac{1}{2M(\vec{r})} \vec{P} = -\frac{\hbar^2}{2m_o} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{m(\vec{r})} \vec{\nabla} \right) \right],$$

E. Cara untuk Mendapatkan Hamiltonian Persamaan (2.17)

Dengan memilih sistem satuan ($m_o = \hbar = 1$) dan hanya mempertimbangkan sistem untuk satu dimensi, kita turunkan Hamiltonian dari persamaan (2.16) menjadi:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= -\frac{(1)^2}{2(1)} \left[\frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \right) \right] + V(x) \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \right) \right] + V(x) \\
&= -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2} \frac{d(m^{-1})}{dx} \frac{d}{dx} + V(x)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan (2.17) berikut

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m'}{2m^2} \frac{d}{dx} + V(x)$$

F. Hasil Substitusi Persamaan (2.20) ke Persamaan (2.18)

Dari persamaan (2.20) berikut

$$\psi(x) = f(x)F(g(x)),$$

kita substitusikan ke dalam persamaan (2.18), sehingga dapat ditulis:

$$\frac{d^2 [f(x)F(g(x))]}{dx^2} - \frac{m'}{m} \frac{d [f(x)F(g(x))]}{dx} + 2m[E - V(x)]f(x)F(g(x)) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d [f(x)F(g(x))]}{dx} \right] - \frac{m'}{m} \frac{d [f(x)F(g(x))]}{dx} + 2m[E - V(x)]f(x)F(g(x)) = 0$$

dimisalkan:

$$U = f(x); \quad U' = f' \text{ dan}$$

$$V = F(g(x)); \quad V' = \frac{dF}{dg} \frac{dg}{dx} = g' \frac{dF}{dg}$$

maka

$$\frac{d}{dx} \left[f'F + f g' \frac{dF}{dg} \right] - \frac{m'}{m} \left[f'F + f g' \frac{dF}{dg} \right] + 2m[E - V(x)]fF = 0$$

$$\frac{d}{dx}(f'F) + \frac{d}{dx} \left[f g' \frac{dF}{dg} \right] - \frac{m'f'}{m}F - \frac{m'f g'}{m} \frac{dF}{dg} + 2m[E - V(x)]fF = 0$$

dimisalkan:

$$U = f g'; \quad U' = f'g' + f g'' \text{ dan}$$

$$V = \frac{dF}{dg} = F'; \quad V' = \frac{dF'}{dg} \frac{dg}{dx} = g' \frac{d^2F}{dg^2}$$

maka

$$\left(f''F + g'f' \frac{dF}{dg} \right) + \left(f'g' \frac{dF}{dg} + fg'' \frac{dF}{dg} \right) + f(g')^2 \frac{d^2F}{dg^2} - \frac{m'f'}{m}F - \frac{m'fg'}{m} \frac{dF}{dg} + 2m[E - V(x)]fF = 0$$

sehingga diperoleh persamaan (2.21) berikut

$$\frac{d^2 F}{dg^2} + \left[\frac{g''}{(g')^2} + \frac{2f'}{fg'} - \frac{m'}{mg'} \right] \frac{dF}{dg} + \left[\frac{f''}{f(g')^2} - \frac{m'f'}{mf(g')^2} + \frac{2m[E-V(x)]}{(g')^2} \right] F = 0.$$

G. Persamaan Schrödinger (2.33) dalam ξ dan K

Dari persamaan Schrödinger (2.30) berikut,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E \psi.$$

Jika suku pertama dinyatakan dalam ξ dan K , dengan

$$x \equiv \xi \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}; \quad \frac{\xi}{x} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}; \quad 2\alpha = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right),$$

$$K = \frac{2E}{\hbar\omega},$$

akan menjadi:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right) &= \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) \right] \psi \\ &= \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{d}{d\left(\xi \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right)} \left(\frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{d\left(\xi \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right)} \right) \right] \psi \\ &= \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \right) \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d}{d\xi} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{d\xi}{d(\xi)} \right) \right] \psi \\ &= \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{m\omega}{\hbar} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d}{d\xi} \right) \right] \psi \\ &= \left(-\frac{\hbar\omega}{2} \right) \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (2.30) akan menjadi

$$-\frac{\hbar\omega}{2} \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\xi \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right)^2 \psi = E \psi$$

$$-\frac{\hbar\omega}{2} \frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\xi^2 \hbar\omega\psi = E\psi$$

Apabila persamaan tersebut dikalikan dengan $-\frac{2}{\hbar\omega}$, maka akan diperoleh persamaan (2.33) berikut

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2\psi = -\frac{2E}{\hbar\omega}\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - K)\psi$$

H. Derivatif Fungsi Gaussian

Jika kita hitung derivatif dari fungsi Gaussian (2.34)

$$\psi(\xi) = h_n(\xi)e^{-\xi^2/2} = h_n(\xi)e^{-\alpha^2}$$

maka akan didapatkan:

$$\psi'(\xi) = h_n'(\xi)e^{-\alpha^2} - 2\alpha x h_n(\xi)e^{-\alpha^2}$$

sehingga diperoleh persamaan (2.35) berikut

$$\begin{aligned}\psi''(\xi) &= h_n''(\xi)e^{-\alpha^2} - 2\alpha x h_n'(\xi)e^{-\alpha^2} - 2\alpha h_n(\xi)e^{-\alpha^2} \\ &\quad - 2\alpha x h_n'(\xi)e^{-\alpha^2} + 4\alpha^2 x^2 h_n(\xi)e^{-\alpha^2} \\ &= [h_n''(\xi) - 4\alpha x h_n'(\xi) + (4\alpha^2 x^2 - 2\alpha)h_n(\xi)]e^{-\alpha^2} \\ &= [h_n''(\xi) - 4\alpha x h_n'(\xi) + (4\alpha^2 x^2 - 2\alpha)h_n(\xi)]e^{-\xi^2/2}\end{aligned}$$

I. Persamaan Diferensial (2.39) yang Harus Dipenuhi Oleh $h_n(\xi)$

Kita awali dengan mensubstitusikan persamaan (2.34) dan (2.35) ke dalam persamaan (2.30) berikut, sehingga kita dapatkan:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi = E\psi$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[h_n''(\xi) - 4\alpha x h_n'(\xi) + (4\alpha^2 x^2 - 2\alpha) h_n(\xi) \right] e^{-\xi^2/2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 h_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \\
 & = E h_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \\
 & -\frac{\hbar^2}{2m} h_n''(\xi) + \frac{2\hbar^2}{m} \alpha x h_n'(\xi) - \frac{\hbar^2}{2m} (4\alpha^2 x^2 - 2\alpha) h_n(\xi) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 h_n(\xi) = E h_n(\xi).
 \end{aligned}$$

Kita masukkan $\alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$ dan mengalikan persamaan di atas dengan $\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$,

sehingga dihasilkan:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\hbar^2}{2m} h_n''(\xi) + \frac{2\hbar^2}{m} \frac{m\omega}{2\hbar} x h_n'(\xi) - \frac{\hbar^2}{2m} \left(4 \left(\frac{m\omega}{2\hbar} \right)^2 x^2 - 2 \frac{m\omega}{2\hbar} \right) h_n(\xi) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 h_n(\xi) = E h_n(\xi) \\
 & -\frac{\hbar^2}{2m} h_n''(\xi) + \hbar\omega x h_n'(\xi) - \left(\frac{m\omega^2 x^2}{2} - \frac{\hbar\omega}{2} \right) h_n(\xi) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 h_n(\xi) = E h_n(\xi) \\
 & -\frac{\hbar^2}{2m} h_n''(\xi) + \hbar\omega x h_n'(\xi) + \left(\frac{\hbar\omega}{2} - E \right) h_n(\xi) = 0 \quad ; \times \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \\
 & -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} h_n''(\xi) + \hbar\alpha x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} h_n'(\xi) + \left(\frac{\hbar\omega}{2} - E \right) \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} h_n(\xi) = 0.
 \end{aligned}$$

Persamaan di atas harus diubah dalam bentuk $\frac{d}{d\xi}$, dengan

$$\begin{aligned}
 \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right) h_n''(\xi) & = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right) \frac{d^2 h_n(\xi)}{d\xi^2} \\
 & = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right) \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dh_n(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) \\
 & = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right) \frac{d}{d \left(\xi \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right)} \left(\frac{dh_n(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{d \left(\xi \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right)} \right) \\
 & = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \right) \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dh_n(\xi)}{d\xi} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{d\xi}{d(\xi)} \right) \\
 & = -\frac{\hbar\omega}{2} \frac{\xi}{x} \frac{d^2 h_n(\xi)}{d\xi^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\hbar\omega\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)h_n'(\xi) &= \left(\hbar\omega\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)\frac{d}{dx}h_n(\xi) \\
&= \left(\hbar\omega\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)\frac{dh_n(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} \\
&= \left(\hbar\omega\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)\frac{dh_n(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{d\left(\xi\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right)} \\
&= \left(\hbar\omega\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)\frac{dh_n(\xi)}{d\xi}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d\xi}{d\xi} \\
&= \hbar\omega x\left(\frac{\xi}{x}\right)^2\frac{dh_n(\xi)}{d\xi}
\end{aligned}$$

maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar\omega}{2}\frac{\xi}{x}\frac{d^2h_n(\xi)}{d\xi^2} + \hbar\omega x\left(\frac{\xi}{x}\right)^2\frac{dh_n(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{\hbar\omega}{2} - E\right)\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}h_n(\xi) &= 0 \\
-\frac{\hbar\omega}{2}\frac{\xi}{x}\frac{d^2h_n(\xi)}{d\xi^2} + \hbar\omega x\frac{\xi^2}{x^2}\frac{dh_n(\xi)}{d\xi} + \frac{\xi}{x}\left(\frac{\omega\hbar}{2} - E\right)h_n(\xi) &= 0.
\end{aligned}$$

Kemudian dengan mengalikan persamaan di atas dengan $-\frac{2x}{\omega\hbar\xi}$, maka diperoleh

persamaan (2.39) berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2h_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dh_n(\xi)}{d\xi} + \frac{\xi}{x}\left(-\frac{2x}{\omega\hbar\xi}\right)\left(\frac{\omega\hbar}{2} - E\right)h_n(\xi) &= 0 \\
\frac{d^2h_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dh_n(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right)h_n(\xi) &= 0 \\
\frac{d^2h_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dh_n(\xi)}{d\xi} + (K - 1)h_n(\xi) &= 0.
\end{aligned}$$

J. Fungsi Hipergeometri dan Hipergeometri Terpadu

Fungsi hipergeometri atau *hypergeometric function* adalah sebuah solusi dari persamaan diferensial hipergeometri (Weisstein, 2004). Persamaan diferensial hipergeometri diberikan dalam bentuk berikut

$$(x^2 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [(1 + a + b)x - c] \frac{dy}{dx} + ab y = 0, \quad (\text{J.1})$$

dengan a , b , dan c merupakan bilangan yang secara umum bukan bilangan bulat. Solusi dari persamaan (J.1) di sekitar $x = 0$ dapat dinyatakan sebagai

$$y = 1 + \frac{ab}{c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}. \quad (\text{J.2})$$

Fungsi ini dinamakan fungsi hipergeometri yang biasa dilambangkan dengan ${}_2F_1(a, b; c; x)$.

Banyak fungsi dari matematika fisika yang dapat diekspresikan sebagai kasus khusus dari fungsi hipergeometri. Sebagai contoh diantaranya adalah polinomial Legendre, polinomial Jacobi, dan lain-lain.

Kalau persamaan diferensial hipergeometri kita nyatakan dalam z dan mengalikan dengan tanda (-), maka akan diperoleh

$$z(1-z) \frac{d^2 y}{dz^2} + [c - (1+a+b)z] \frac{dy}{dz} - ab y = 0. \quad (\text{J.3})$$

Persamaan kita transformasikan dengan memasukkan $z = \frac{x}{b}$, maka akan diperoleh

$$x \left(1 - \frac{x}{b} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[c - \left(\frac{1+a}{b} + 1 \right) x \right] \frac{dy}{dx} - a y = 0. \quad (\text{J.4})$$

Persamaan diferensial yang baru ini kalau kita hubungkan dengan persamaan diferensial hipergeometri, maka penyelesaiannya akan berbentuk ${}_2F_1\left(a, b; c; \frac{x}{b}\right)$ di sekitar $x = 0$.

Kalau diambil $b \rightarrow \infty$, maka penyelesaian yang bersangkutan ini dinamakan “fungsi hipergeometri terpadu jenis pertama atau *confluent hypergeometric function of the first kind*” yaitu merupakan bentuk degenerasi dari fungsi hipergeometri yang biasa dilambangkan sebagai

$${}_1F_1(a; c; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r x^r}{r!(c)_r}. \quad (\text{J.5})$$

Persamaan diferensial yang bersangkutan dengan penyelesaian (J.5) diberikan oleh

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (c - x) \frac{dy}{dx} - ay = 0. \quad (\text{J.6})$$

Persamaan inilah yang kita sebut sebagai persamaan diferensial hipergeometri terpadu (Renreng, 1981: 171). Pernyataan terpadu atau *confluent* dalam hal ini menunjukkan pada titik singular dari sebuah persamaan diferensial, pada bola Riemann. Di mana biasanya persamaan hipergeometri mempunyai tiga titik singular (dalam posisinya secara umum), pertemuan atau *confluence* di sini menyiratkan kasus degenerasi oleh *singularities* yang dibawa bersama dengan proses pembatasan atau *limiting* (Wikipedia, 2006).

Fungsi hipergeometri terpadu jenis kedua atau *confluent hypergeometric function of the second kind* memberikan solusi kedua yang tidak berhubungan dengan garis-garis lurus dari persamaan diferensial hipergeometri terpadu (J.6). Fungsi ini dilambangkan dengan $U(a, b, z)$ dan didefinisikan oleh

$$U(a, b, z) = \pi \csc(\pi b) \left[\frac{{}_1F_1(a; b; z)}{\Gamma(a-b+1)} - \frac{z^{1-b} {}_1F_1(a-b+1; 2-b; z)}{\Gamma(a)} \right] \quad (\text{J.7})$$

$$= z^{-a} {}_2F_0(a, 1+a-b; -z^{-1}),$$

dengan ${}_1F_1(a; b; z)$ adalah sebuah fungsi hipergeometri terpadu jenis pertama, $\Gamma(z)$ adalah fungsi gamma, dan ${}_2F_0(a; b; z)$ adalah *generalized hypergeometric function* (Weisstein, 2005). Adapun beberapa contoh kasus khusus yang dapat diekspresikan sebagai fungsi hipergeometri terpadu diantaranya adalah fungsi

Bessel, polinomial Hermit, polinomial Laguerre, fungsi Airy, dan lain-lain (Weisstein, 2003).

K. Tabel Polinomial Hermit

Untuk polinomial Hermit berikut:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad (\text{K.1})$$

nilai H_n untuk $n = 0, 1, 2, \dots$ diberikan pada tabel berikut:

Tabel K.1 Polinomial Hermit

$H_0(x)$	=	1
$H_1(x)$	=	$2x$
$H_2(x)$	=	$4x^2 - 2$
$H_3(x)$	=	$8x^3 - 12x$
$H_4(x)$	=	$16x^4 - 48x^2 + 12$
$H_5(x)$	=	$32x^5 - 160x^3 + 120x$
$H_6(x)$	=	$64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$
$H_7(x)$	=	$128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$
$H_8(x)$	=	$256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$

Sumber: Arfken dan Weber (1990)

Polinomial Hermit dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (2x)^n {}_2F_0\left(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}(n-1); -x^{-2}\right) \\ &= 2^n x^n (x^2)^{-n/2} U\left(-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}; x^2\right), \end{aligned} \quad (\text{K.2})$$

dengan $U(a, b, x)$ adalah fungsi hipergeometri terpadu jenis kedua atau *confluent hypergeometric function of the second kind*, yang dapat disederhanakan menjadi

$$H_n(x) = 2^n U\left(-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}, x^2\right), \quad (\text{K.3})$$

(Weisstein, 2006).

L. Menggambar Kurva V_m Terhadap x

Dari persamaan potensial V_m (4.47) pada rentang $(0 \leq x \leq 99,243)A^\circ$ atau $0 \leq z \leq 0,32$ maka data V_m yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

Tabel L.1 Variasi Potensial V_m Persamaan (4.47) untuk struktur $GaAs/Al_zGa_{1-z}As/GaAs$

z	$d (A^\circ)$	$x (A^\circ)$	$V_m (eV)$
0,00	100	$\pm 0,000$	$1,734 \times 10^1$
0,01	100	$\pm 17,544$	$-1,382 \times 10^{-3}$
0,02	100	$\pm 24,811$	$-3,467 \times 10^{-4}$
0,03	100	$\pm 30,387$	$-1,543 \times 10^{-4}$
0,04	100	$\pm 35,088$	$-8,686 \times 10^{-5}$
0,05	100	$\pm 39,229$	$-5,561 \times 10^{-5}$
0,06	100	$\pm 42,974$	$-3,863 \times 10^{-5}$
0,07	100	$\pm 46,417$	$-2,839 \times 10^{-5}$
0,08	100	$\pm 49,622$	$-2,174 \times 10^{-5}$
0,09	100	$\pm 52,632$	$-1,718 \times 10^{-5}$
0,10	100	$\pm 55,479$	$-1,391 \times 10^{-5}$
0,11	100	$\pm 58,186$	$-1,150 \times 10^{-5}$
0,12	100	$\pm 60,774$	$-9,664 \times 10^{-6}$
0,13	100	$\pm 63,255$	$-8,235 \times 10^{-6}$
0,14	100	$\pm 65,643$	$-7,101 \times 10^{-6}$
0,15	100	$\pm 67,947$	$-6,186 \times 10^{-6}$
0,16	100	$\pm 70,175$	$-5,437 \times 10^{-6}$
0,17	100	$\pm 72,335$	$-4,816 \times 10^{-6}$
0,18	100	$\pm 74,432$	$-4,296 \times 10^{-6}$
0,19	100	$\pm 76,472$	$-3,856 \times 10^{-6}$
0,20	100	$\pm 78,459$	$-3,480 \times 10^{-6}$
0,21	100	$\pm 80,396$	$-3,156 \times 10^{-6}$
0,22	100	$\pm 82,288$	$-2,876 \times 10^{-6}$
0,23	100	$\pm 84,137$	$-2,631 \times 10^{-6}$
0,20	100	$\pm 85,947$	$-2,417 \times 10^{-6}$
0,25	100	$\pm 87,719$	$-2,227 \times 10^{-6}$
0,26	100	$\pm 89,457$	$-2,059 \times 10^{-6}$
0,27	100	$\pm 91,161$	$-1,910 \times 10^{-6}$

z	d (Å°)	x (Å°)	V_m (eV)
0,28	100	$\pm 92,833$	$-1,776 \times 10^{-6}$
0,29	100	$\pm 94,477$	$-1,655 \times 10^{-6}$
0,30	100	$\pm 96,092$	$-1,547 \times 10^{-6}$
0,31	100	$\pm 97,680$	$-1,449 \times 10^{-6}$
0,32	100	$\pm 99,243$	$-1,360 \times 10^{-6}$

Kemudian dari persamaan potensial V_m (4.54) pada rentang $(-20 \leq x \leq 20)$ Å° maka data V_m yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

Tabel L.2 Variasi Potensial V_m Persamaan (4.54) Terhadap Variabel x

x (Å°)	V_m (eV)
0	-0,2500
-1	-0,2083
-2	-0,1667
-3	-0,1477
-4	-0,1389
-5	-0,1343
-6	-0,1316
-7	-0,1299
-8	-0,1288
-9	-0,1280
-10	-0,1275
-11	-0,1270
-12	-0,1267
-13	-0,1265
-14	-0,1263
-15	-0,1261
-16	-0,1260
-17	-0,1259
-18	-0,1258
-19	-0,1257
-20	-0,1256

M. Operator dalam Mekanika Kuantum

Operator adalah lambang matematika yang menggambarkan transformasi sebuah fungsi ke dalam bentuk fungsi yang lain. Sehingga secara umum, sebuah operator \hat{O} diaplikasikan terhadap sebuah fungsi $\psi(x)$ akan menghasilkan fungsi $f(x)$ yang lain.

$$\hat{O}\psi(x) = f(x). \quad (\text{M.1})$$

Sebuah fungsi $\psi(x)$ dikatakan sebagai fungsi eigen dari sebuah operator \hat{O} adalah jika aplikasinya dalam operator \hat{O} tersebut menghasilkan fungsi $\psi(x)$ yang sama yang dikalikan dengan sebuah konstanta yang disebut nilai eigen a . Persamaan eigen yang menggambarkan operasi tersebut dapat kita tulis dalam bentuk:

$$\hat{O}\psi(x) = a\psi(x). \quad (\text{M.2})$$

Dalam mekanika kuantum, pengamatan kuantitas dilakukan dengan cara menerapkan operator dari besaran fisis yang bersangkutan terhadap fungsi gelombang sistem.

Misal untuk mengetahui nilai energi total suatu sistem PDM, kita dapat menyelesaikan persamaan eigen di atas dengan cara menerapkan operator energi total sistem PDM $\hat{E} = \hat{T} + \hat{V}_{eff}$ terhadap fungsi eigen $\psi(x)$ yang terkait. Perhitungan ini nantinya akan menghasilkan sebuah fungsi eigen $\psi(x)$ juga yang dikalikan dengan sebuah konstanta tertentu. Besar nilai dari konstanta inilah yang kita sebut sebagai nilai eigen energi E_n . Dari uraian tersebut maka persamaan eigen dapat kita tulis dengan bentuk:

$$\hat{E}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \quad (\text{M.3})$$

dengan \hat{E} adalah operator energi total sistem PDM yang dinyatakan sebagai:

$$\hat{E} = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m'}{2m^2} \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \omega^2 [\mu(x)]^2 + \frac{1}{8m} \left[\frac{m''}{m} - \frac{7}{4} \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \right]. \quad (\text{M.4})$$

Di samping itu, untuk mendapatkan informasi mengenai perilaku dari sebuah sistem biasanya kita dapat mengetahuinya dengan menentukan nilai rata-rata tertinggi dari suatu besaran fisis yang diinginkan dalam rentang tertentu; yaitu dengan menggunakan harga harap. Berikut adalah beberapa contoh langkah mencari kuantitas besaran fisis dari sebuah sistem:

M.1 Energi Total Sistem PDM

Untuk mendapatkan nilai rata-rata tertinggi dari energi total sistem PDM, kita dapat menerapkan operator $\hat{E} = \hat{T} + \hat{V}_{eff}$ (persamaan M.4) sistem PDM terhadap fungsi gelombang sistem dengan menggunakan harga harap berikut:

$$\begin{aligned} \langle \hat{E} \rangle &= \int \psi^*(x) \hat{E} \psi(x) dx \\ &= \int \psi^*(x) \left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m'}{2m^2} \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \omega^2 [\mu(x)]^2 + \frac{1}{8m} \left[\frac{m''}{m} - \frac{7}{4} \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \right] \right) \psi(x) dx \\ &= \int \psi^*(x) \left[\left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m'}{2m^2} \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \omega^2 [\mu(x)]^2 + \frac{1}{8m} \left[\frac{m''}{m} - \frac{7}{4} \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \right] \right) \psi(x) \right] dx \end{aligned}$$

Sehingga nilai eigen yang dihasilkan nanti dapat kita sebut sebagai nilai eigen energi total sistem PDM.

M.2 Energi Kinetik Sistem PDM

Demikian juga untuk mendapatkan nilai rata-rata tertinggi dari energi kinetik sistem PDM, kita dapat menerapkan operator energi kinetik \hat{T} sistem PDM terhadap fungsi gelombang sistem dengan menggunakan harga harap berikut:

$$\langle \hat{T} \rangle = \int \psi^*(x) \hat{E}_k \psi(x) dx$$

$$\langle \hat{T} \rangle = \int \psi^*(x) \left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m'}{2m^2} \frac{d}{dx} \right) \psi(x) dx$$

$$\langle \hat{T} \rangle = \int \psi^*(x) \left[\left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m'}{2m^2} \frac{d}{dx} \right) \psi(x) \right] dx \quad ,$$

dengan \hat{T} adalah operator energi total sistem PDM yang dinyatakan sebagai:

$$\hat{T} = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m'}{2m^2} \frac{d}{dx} \quad . \quad (M.5)$$

M.3 Energi Potensial Efektif Sistem PDM

Dengan cara yang sama, maka untuk mendapatkan nilai rata-rata tertinggi dari energi potensial efektif sistem PDM, kita dapat menerapkan operator energi potensial efektif \hat{V}_{eff} sistem PDM terhadap fungsi gelombang sistem dengan menggunakan harga harap berikut:

$$\begin{aligned} \langle \hat{V}_{eff} \rangle &= \int \psi^*(x) \hat{V}_{eff} \psi(x) dx \\ &= \int \psi^*(x) \left(\frac{1}{2} \omega^2 [\mu(x)]^2 + \frac{1}{8m} \left[\frac{m''}{m} - \frac{7}{4} \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \right] \right) \psi(x) dx \\ &= \int \psi^*(x) \left[\left(\frac{1}{2} \omega^2 [\mu(x)]^2 + \frac{1}{8m} \left[\frac{m''}{m} - \frac{7}{4} \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \right] \right) \psi(x) \right] dx \end{aligned}$$

dengan \hat{V}_{eff} adalah operator energi total sistem PDM yang dinyatakan sebagai:

$$\hat{V}_{eff} = \frac{1}{2} \omega^2 [\mu(x)]^2 + \frac{1}{8m} \left[\frac{m''}{m} - \frac{7}{4} \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \right] \quad . \quad (M.6)$$

Begitu juga jika kita ingin mengetahui besaran fisis yang lain dari sistem, kita dapat menerapkan operator yang terkait dengan menggunakan harga harap seperti di atas. Hasil yang didapatkan dari perhitungan harga harap ini merupakan nilai rata-rata tertinggi dari kuantitas suatu besaran fisis tertentu untuk rentang

yang dimaksudkan. Misal untuk posisi x kita dapat menerapkan operator $\hat{x} = x$, untuk momentum p kita dapat menerapkan operator $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$, dan sebagainya.

L. Potensial Riil $V(x)$ Sistem Osilator Harmonik Massa Konstan

Jika kita anggap bahwa massa sistem dari potensial efektif $V_{eff}(x)$ osilator harmonik persamaan (4.29) adalah konstan [dengan mengambil $m(x)=1$ dan $\mu(x)=x$], maka persamaan (4.29) menjadi

$$V_{eff}(x) = \frac{1}{2} \omega^2 [\mu(x)]^2 + \frac{1}{8m} \left[\frac{m''}{m} - \frac{7}{4} \left(\frac{m'}{m} \right)^2 \right] \xrightarrow[\mu(x)=x]{m(x)=1} V(x) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2,$$

dengan $V(x)$ adalah potensial riil sistem osilator harmonik massa konstan.

**DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
UNIVERSITAS JEMBER**

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Jl. Kalimantan Kampus Tegalboto Jember 68121. Telp (0331) 334293 Fax (0331) 330225

SURAT KETERANGAN SELESAI PENELITIAN

Dengan ini kami selaku Dosen Pembimbing Utama/Dosen Pembimbing Anggota yang mengawasi penelitian/percobaan dari mahasiswa di bawah ini

Nama : FARIDA KUSWANDARI
NIM : 031810201133
Jurusan/PS : Fisika
Semester : 8

Menerangkan dengan sebenarnya bahwa mahasiswa yang bersangkutan betul-betul telah selesai melaksanakan penelitian/percobaan tentang :

Solusi Analitik Persamaan Schrodinger Sistem Osilator Harmonik Dengan Massa Bergantung Posisi Menggunakan Metode Transformasi Koordinat

Bertempat : di Jurusan Fisika FMIPA Unej

Dimulai tanggal 3 Februari 2007 s/d Mei 2007

Surat keterangan ini dibuat sebagai persyaratan pengajuan permohonan ujian Tugas Akhir/Skripsi.

Demikian untuk diketahui dan dipergunakan sebagaimana mestinya.

Jember, 05 Mei 2007

Dosen Pembimbing Utama

Dosen Pembimbing Anggota

Sutisna, S.Pd, MSi
NIP. 132 257 929

Artoto Arkundato, SSi, MSi
NIP. 132 236 059



DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
UNIVERSITAS JEMBER

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Jl. Kalimantan Kampus Tegalboto Jember 68121. Telp (0331) 334293 Fax (0331) 330225

SURAT KETERANGAN SELESAI PERBAIKAN SKRIPSI

Dengan ini kami selaku Tim Penguji Tugas Akhir / Skripsi dari mahasiswa di bawah ini

Nama : FARIDA KUSWANDARI
NIM : 031810201133
Jurusan/PS : Fisika
Semester : 8
Tanggal Ujian : 22 Juni 2007
Judul Tugas akhir : Solusi Analitik Persamaan Schrodinger Sistem Osilator Harmonik Dengan Massa Bergantung Posisi Menggunakan Metode Transformasi Koordinat.



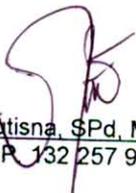
Menerangkan dengan sebenarnya bahwa mahasiswa yang bersangkutan betul-betul telah melaksanakan perbaikan Tugas Akhir / Skripsi sebelum berakhirnya batas waktu yang telah ditentukan.

Demikian surat keterangan ini dibuat untuk diketahui dan dipergunakan sebagaimana mestinya.

Mengetahui
Tim Penguji Skripsi

Jember, 27 Juni 2007

Ketua


Sutisna, SPd, Msi
NIP. 132 257 929

Jember, 26 Juni 2007

Sekretaris


Artoto Arkundato, Ssi, Msi
NIP. 132 236 059

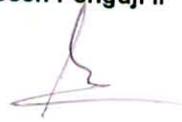
Jember, 26 Juni 2007

Dosen Penguji I


Mutmainnah, SSi, Msi
NIP. 132 162 505

Jember, 26 Juni 2007

Dosen Penguji II


Ir. Misto, Msi
NIP. 131 945 799