ANALISA LOCATING INDEPENDENT DOMINATING SET *PADA GRAF KHUSUS dan GRAF OPERASI COMB SISI*

SKRIPSI

Oleh

Komariyah
NIM 121810101079

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

***ANALISA* LOCATING INDEPENDENT DOMINATING SET**
PADA GRAF KHUSUS dan GRAF OPERASI COMB SISI

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat
untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1)
dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

Komariyah
NIM 121810101079

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2016

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk :

1. Orang tuaku tercinta Abi Fajri dan Umi Halilah serta Kakak-adekku Mas Sofiullah, Maysaratul Mukharromah dan Simmatut Diniyatul Qoyyimah yang telah memberikan rasa cinta dan kasih sayangnya serta dukungan moril, materil dan doa untukku yang tidak pernah berhenti agar meraih cita-cita;
2. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., Bu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., dan Bapak Kusbudiono S.Si., M.Si. yang dengan sabar tulus dan ikhlas membimbing sehingga skripsi ini terselesaikan;
3. guru-guruku dari Taman Kanak-kanak sampai Perguruan Tinggi yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. teman-teman pejuang graf, teman-teman terdekatku dan Bathics12 yang selalu berbagi duka maupun suka, dan selalu memberikan semangat;
5. Alamamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTO

”man jadda wa jadda.”

”Jangan pernah merugikan orang lain.”

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

nama : Komariyah

NIM : 121810101079

menyatakan dengan sesungguhnya bawha karya ilmiah yang berjudul ”Analisa *Locating Independent Dominating Set* pada Graf Khusus dan Graf Operasi Comb Sisi” adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali kutipan yang sudah saya sebutkan sumbernya, belum pernah diajukan pada institusi manapun, dan bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa ada tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Desember 2016

Yang menyatakan,

Komariyah

NIM. 121810101079

SKRIPSI

ANALISA *LOCATING INDEPENDENT DOMINATING SET*
PADA GRAF KHUSUS DAN GRAF OPERASI COMB SISI

Oleh

Komariyah
NIM 121810101079

Pembimbing:

Dosen Pembimbing Utama	: Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.
Dosen Pembimbing Anggota	: Kusbudiono, S.Si., M.Si.

PENGESAHAN

Skripsi berjudul ”Analisa *Locating Independent Dominating Set* pada Graf Khusus dan Graf Operasi Comb Sisi” telah diuji dan disahkan pada:

hari, tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Tim Penguji:

Dosen Pembimbing Utama,	Dosen Pembimbing Anggota,
Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.	Kusbudiono, S.Si., M.Si.
NIP. 198408012008012006	NIP. 197704302005011001
Dosen Penguji I,	Dosen Penguji II,
Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.	Dian Anggraeni, S.Si., M.Si.
NIP. 196808021993031004	NIP. 198202162006042002

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Drs. Sujito, Ph.D.

NIP. 196102041987111001

RINGKASAN

Analisa *Locating Independent Dominating Set* pada Graf Khusus dan Graf Operasi Comb Sisi; Komariyah, 121810101079; 2016: 70 halaman; Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Teori graf adalah cabang kajian matematika yang mempelajari sifat-sifat graf dimana graf terdiri dari himpunan benda-benda yang disebut simpul (*Vertex*) yang terhubung oleh sisi (*Edge*). Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan terkenal di *swiss* yang bernama Leonhard Euler. Teori graf berkembang dan meningkat pesat pada pertengahan 1960-an, salah satunya yaitu teori *dominating set*. *Locating independent dominating set* merupakan perluasan dari *independent dominating set* dan *locating dominating set*(1980) yang dikembangkan dari teori *dominating set*.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah *locating independent dominating set*. *Locating independent dominating set* merupakan suatu konsep penentuan titik seminimal mungkin pada graf dengan ketentuan titik sebagai *locating independent dominating set* menjangkau semua titik yang ada disekitarnya dan tidak *adjacent*. Kardinalitas minimum dari *locating independent dominating set* disebut *locating independen domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_{Li}(G)$. Saat ini *locating independent dominating set* tidak hanya dikembangkan pada graf khusus saja, tetapi juga diterapkan pada graf operasi. Graf operasi merupakan operasi terhadap dua graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Jenis-jenis graf operasi diantaranya operasi amalgamasi, comb product, *shackle* dan graf operasi comb sisi. Pada penelitian ini peneliti akan mengembangkan teori *locating independent dominating set* pada graf khusus dan graf operasi comb sisi. Tujuan penelitian ini adalah menentukan banyaknya titik dan sisi pada graf operasi comb sisi, menentukan *locating independent dominating set* dan nilai *locating independent dominating set*

dari beberapa graf khusus dan operasi comb sisi sehingga dihasilkan 10 teorema baru, diantaranya adalah:

1. **Teorema 4.1** Misal G adalah graf khusus berupa graf buku segiempat $B_{4,n}$ untuk $n \geq 2$, maka *Locating independent dominating number* dari G adalah γ_{Li} $(B_{4,n})$=n

2. **Teorema 4.2** Misal G adalah graf khusus berupa graf prisma $H_{4,n}$ untuk $n \geq 3$ dan n genap, maka *Locating independent dominating number* dari G adalah γ_{Li} $(H_{4,n})$=2n.

3. **Teorema 4.3** Misal G adalah graf khusus berupa graf roda W_n untuk $n \geq 6$ dan n genap, maka *Locating independent dominating number* dari G adalah γ_{Li} (W_n)=$\frac{n}{2}$.

4. **Teorema 4.4** Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf bintang S_m dan graf roda W_n untuk $m \geq 3$ $n \geq 6$ dan n genap, maka γ_{Li} $(S_m \trianglerighteq W_n) = \frac{nm-2m}{2}$+1.

5. **Teorema 4.5** Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf bintang S_n dan graf lingkaran C_m untuk $n \geq 3$ $m \geq 5$ dan m ganjil, maka γ_{Li} $(S_n \trianglerighteq C_m) = \frac{n(m-1)}{2}$.

6. **Teorema 4.6** Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf bintang S_n dan graf lintasan P_m untuk $n \geq 3$ $m \geq 4$ dan m genap, maka γ_{Li} $(S_n \trianglerighteq P_m) = \lfloor \frac{n(m-1)}{2} + 1 \rfloor$.

7. **Teorema 4.7** Misal G adalah graf hasil graf operasi comb sisi dari graf lingkaran C_n dan graf *ladder* L_m untuk $n \geq 3$, $m \geq 3$ maka γ_{Li} $(C_n \trianglerighteq L_m) = mn - n$.

8. **Teorema 4.8** Misal G adalah graf hasil graf operasi comb sisi dari graf lingkaran C_n dan graf lingkaran C_3, untuk $n \geq 3$, maka γ_L $(C_n \trianglerighteq C_3) = n$.

9. **Teorema 4.9** Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf lintasan P_n dan graf lingkaran C_3, untuk $n \geq 3$ maka $\gamma_{Li}\left(P_n \trianglerighteq C_3\right) = n - 1$.

10. **Teorema 4.10** Misal G adalah graf hasil operasi comb sisi dari graf lingkaran C_n dan graf lintasan P_m untuk $n \geq 3$,$m \geq 6$ dan m genap maka $\gamma_{Li}\left(C_n \trianglerighteq P_m\right) = \frac{mn-2n}{2}$.

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala kuasa-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul ”Analisa *Locating Independent Dominating Set* pada Graf Khusus dan Graf Operasi Comb Sisi”. Penulisan tugas akhir ini dilakukan guna memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Pada kesempatan ini, dengan segala hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing utama dan Bapak Kusbudiono, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing anggota;
2. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. dan ibu Dian Anggraeni, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun;
3. Bapak Kosala Dwidja Purnomo, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis selama menjadi mahasiswa;
4. Dosen dan Karyawan jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. Teman-teman terdekatku yang selalu membantuku dan menorehkan pengalaman indah yang tak terlupakan;
6. Teman-teman pejuang graf;
7. teman-teman Bathics12 yang selalu setia memberikan dukungan;
8. serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis mengharap kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini juga penelitian selanjutnya. Semoga tugas ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Jember, Desember 2016

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah cabang kajian matematika yang mempelajari sifat-sifat graf dimana graf terdiri dari himpunan benda-benda yang disebut simpul (*Vertex*) yang terhubung oleh sisi (*Edge*). Teori graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan terkenal di *swiss* yang bernama Leonhard Euler. Teori graf berkembang dan meningkat pesat pada pertengahan 1960-an, salah satunya yaitu teori *dominating set*. *Locating independent dominating set* merupakan perluasan dari *independent dominating set* dan *locating dominating set*(1980) yang dikembangkan dari teori *dominating set*.

Menurut de jaenish dalam Haynes dan Henning (2002) himpunan D dari titik graf sederhana G dikatakan *independent dominating set* jika tidak ada dua titik yang bertetangga pada graf G. Kardinalitas terkecil dari *independent dominating set* disebut *independent dominating number* yang dinotasikan dengan $i(G)$. *Independent dominating set* D dengan $|D| = i(G)$ dinamakan minimum *independent dominating set*. Menurut Slater (2002) suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan himpunan dominasi lokasi atau *locating dominating set* jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $\emptyset \neq N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi lokasi disebut *locating domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$. Sehingga *locating independent dominating set* adalah suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan *locating independen dominating set* jika tidak ada dua titik D yang bertetangga pada graf G dan untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $\emptyset \neq N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas minimum dari *locating independent dominating set* disebut *locating* *independen domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_{Li}(G)$.

Penelitian sebelumnya tentang dominasi dan himpunan independen dominasi telah banyak dilakukan diantaranya pada penelitian oleh Agustin dan Dafik(2014) tentang *dominating set* pada graf jaring laba-laba Wb_n, parasut PC_n, helm $H_{n,m}$, dan regular $A_{2n,m}$. Wardani (2014) juga melakukan penelitian tentang *dominating set* pada beberapa graf khusus dan mengaplikasikan teori *dominating set* pada analisis topologi jaringan *Wide Area Network* (WAN). Solehah (2016)melakukan penelitian tentang *independent domination number* pada beberapa graf operasi. Selanjutnya penelitian tentang *locating dominating set* oleh Chen *et.al* (2011) yang berjudul ”*Identifying codes and locating dominating sets on paths and cycles*”. Penelitian terbaru oleh Canoy *et.al* (2014) mencari *locating dominating set* pada *corona dan composition graph*, Argiroffo (2015) yang berjudul ”*A polyhedral approach to locating dominating sets in graph*”, Foucaud(2016) yang berjudul *”Locating dominating set in twin free graph”*, dan Desvandai (2016) analisa himpunan dominasi lokasi pada model topologi graf khusus dan operasinya.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, maka peneliti tertarik untuk menganalisa teori *locating independent dominating set* pada beberapa graf khusus dan graf operasi comb sisi. Pada penelitian kali ini jenis graf yang digunakan yaitu graf konektif dan tidak berarah. Proses awal penelitian ini yaitu menentukan kardinalitas titik dan kardinalitas sisi pada graf khusus dan graf operasi comb sisi, kemudian menentukan titik-titik yang memenuhi syarat *locating independent dominating set*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

a. Bagaimana menentukan banyaknya titik dan sisi pada graf operasi comb sisi?

b. Bagaimana menentukan *locating independent dominating set* pada graf khusus dan graf operasi comb sisi?

c. Bagaimana menentukan *locating independent dominating number* dari graf khusus dan graf operasi comb sisi?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka permasalahan dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

a. Graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf konektif dan graf yang tidak berarah;
b. Graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf roda (W_n), *book* $(B_{4,n})$, prisma $(B_{4,n})$ dan graf khusus yang dioperasikan dengan operasi comb sisi adalah graf bintang (S_n), lintasan (P_n), lingkaran (C_n), *ladder* (L_n).
c. Graf operasi comb sisi yang digunakan dalam penelitian ini adalah $S_n \trianglerighteq W_m$, $S_n \trianglerighteq C_m$, $S_n \trianglerighteq P_m$, $C_n \trianglerighteq L_m$, $C_n \trianglerighteq P_m$, $C_n \trianglerighteq C_3$, dan $P_n \trianglerighteq C_3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. menentukan banyaknya titik dan banyaknya sisi pada graf operasi comb sisi;
b. menentukan *locating independent dominating set* pada graf khusus dan graf operasi comb sisi;
c. menentukan *locating independent dominating number* dari hasil graf khusus dan graf operasi comb sisi

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah :

a. menambah pengetahuan dan wawasan baru mengenai teori himpunan dominasi khususnya *locating independent dominating set*;

b. hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu dan aplikasi dalam masalah *locating independent dominating set* pada graf-graf lainnya.

1.6 Kebaruan Penelitian

Kebaruan yang didapatkan dari penelitian ini adalah :

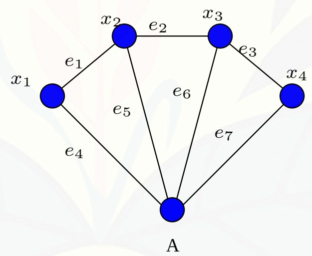
a. graf yang digunakan berupa graf operasi comb sisi dari graf lintasan (P_n), graf lingkaran (C_n), graf *ladder* (L_n), graf bintang S_n;

b. himpunan dominasi yang diteliti berupa *locating independent dominating set*

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik $(v1, v2)$ dimana $v1, v2 \in V$, yang disebut sisi (*edges*). himpunan titik dari G disebut V, dan himpunan sisi dari G disebut E. Seringkali kita menuliskan himpunan titik dari graf G adalah $V(G)$ dan himpunan sisi dari graf G adalah $E(G)$ (Munir,2009). *Vertex* (V) adalah titik pada suatu graf yang dapat dilabeli huruf dan bilangan asli atau menggabunggakan keduanya seperti $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, sedangkan *edge* ($E$) adalah sisi yang menghubungkan titik i dan titik j, sehingga e dapat ditulis sebagai (v_i, v_j) atau $e = (v_i v_j)$. Contoh graf dapat dilihat pada Gambar 2.1



Gambar 2.1 Contoh Graf G

Pada gambar 2.1 graf G merupakan suatu contoh graf dengan $|V(G)| = 5$ dan $|E(G)| = 7$, himpunan titik $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4,$ dan A$\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_2, \cdots, e_7\}$. Jumlah titik pada graf G disebut order dari G dinotasikan $|V(G)|$ sedangkan jumlah sisinya disebut size dari G dinotasikan $|E(G)|$. Graf yang mempunyai order v = $|V(G)|$ dan size e = $|E(G)|$ dapat ditulis (v, e) graf. Suatu graf dengan v buah verteks dan e buah sisi ditulis dengan $G(v, e)$. Berdasarkan definisi dan contoh tersebut maka suatu graf G dimungkinkan tidak mempunyai satu buah sisi $E(G)$ (boleh kosong) namun minimal mempunyai satu buah titik $V(G)$. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial. Secara geometri sebuah graf digambarkan dalam sekumpulan titik (simpul) di dalam bidang dua dimensi yang dihubungkan oleh sekumpulan sisi atau garis.

Dua buah titik pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) apabila kedua titik terhubung dengan sebuah garis atau sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G. Sedangkan sebuah titik pada suatu graf dikatakan bersisian (*incident*) dengan sebuah sisi pada graf tersebut apabila titik tersebut merupakan titik ujung dari sisi tersebut. Menurut Hartsfield dan Ringel (1994), sebuah titik v_1 dikatakan *incident* dengan sebuah sisi e_1 jika v_1 merupakan titik ujung dari e_1, demikian juga e_1 dikatakan *incident* dengan v_1 jika v_1 merupakan titik ujung dari e_1. Sebagai contoh, pada graf G Gambar 2.1, A *adjacent* dengan x_1, x_2, x_3, dan x_4. Sedangkan x_1 dan x_2 *incident* dengan e_1.

Banyaknya sisi yang *incident* pada suatu titik dinamakan derajat (*degree*). Jika semua titik pada graf G mempunyai derajat $(degree)$ yang sama n maka graf G disebut graf regular n, jika tidak maka graf tersebut dikatakan non-reguler. Derajat terkecil dari suatu graf G yang dinotasikan dengan $\delta(G)$ adalah derajat terkecil yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Derajat terbesar dari suatu graf G yang dinotasikan dengan $\Delta(G)$ adalah derajat terbesar yang dimiliki suatu titik diantara titik-titik yang lain. Pada Gambar 2.1 diperoleh bahwa $\Delta\ (G) = 4$.

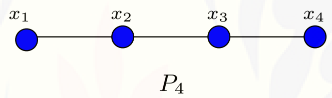
Barisan titik dan sisi yang diawali dan diakhiri dengan titik disebut jalan pada sebuah graf. Jalan dikatakan tertutup jika titik awal dan akhirnya sama. Jika titik dan jalan yang dilalui berbeda-beda maka disebut lintasan $(Path)$. Panjang (*lenght*) dari walk adalah jumlah sisi yang terdapat pada walk tersebut, sedangkan jika semua sisinya yang berbeda maka jalan tersebut disebut jejak $(trail)$. Sikel $(cycle)$ adalah jalan tertutup dengan barisan titik yang berbeda (lintasan yang tertutup).

2.2 Graf Khusus dan Graf Operasi Comb Sisi

Graf khusus adalah graf yang memiliki ciri-ciri tertentu yang mudah untuk dikenali serta memiliki keunikan dan karakteristik dalam bentuk khusus. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Graf khusus yang telah populer disebut *well-known special graph*. Berikut beberapa contoh graf khusus :

a. Graf Lintasan

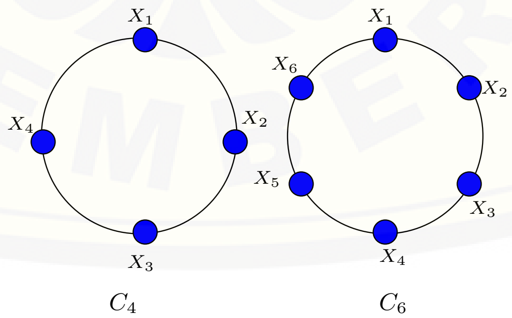
Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n buah titik dilambangkan dengan P_n dimana $n \geq 2$. Jumlah sisi pada graf lintasan yang terdiri dari n buah titik adalah $n - 1$ sisi (Damayanti, 2011). Contoh graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Contoh Graf Lintasan P_n

b. Graf Lingkaran (*Cycle Graph*)

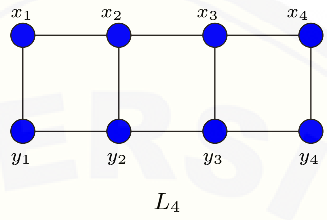
Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n dimana $n \geq 3$ (Gallian, 2009). Contoh graf lingkaran dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Contoh Graf Lingkaran C_n

c. Graf (*Ladder*)

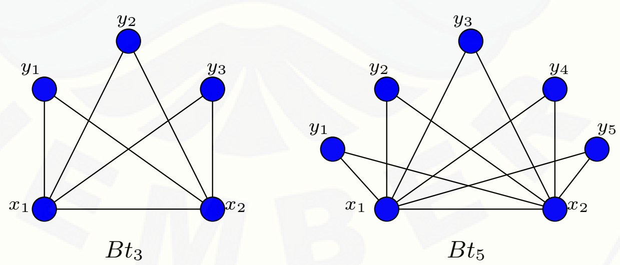
Graf *ladder* yang dilambangkan L_n adalah sebuah graf dengan himpunan titik $V(L_n) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(L_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$. Graf *ladder* L_n terdiri dari $2n$ titik dan $3n-2$ sisi dengan $n \geq 3$. Contoh graf *ladder* dapat dilihat pada gambar 4.8.



Gambar 2.4 Contoh Graf *Ladder* (L_n)

d. Graf Buku Segitiga (*Tringular Book*)

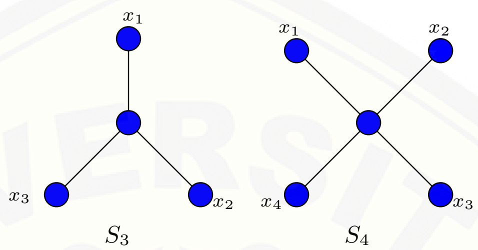
Graf buku segitiga yang dinotasikan dengan Bt_n yaitu graf yang terdiri dari sejumlah n buah segitiga ($n \geq 2$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik bersama (Dafik et al., 2013). Contoh graf buku segitiga dapat dilihat pada gambar 2.5.



Gambar 2.5 Contoh Graf buku segitiga (Bt_n)

e. Graf Bintang (*Star Graph*)

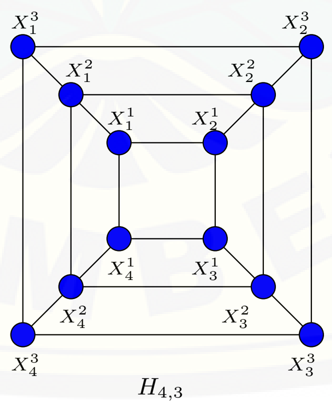
Graf bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik pusat yang berderajat n dan n titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang S_n terdiri dari $n+1$ titik dan n sisi dengan $n \geq 2$ (Slamin, 2009). Contoh graf bintang dapat dilihat pada gambar 2.6



Gambar 2.6 Contoh Graf bintang (S_n)

f. Graf Prisma

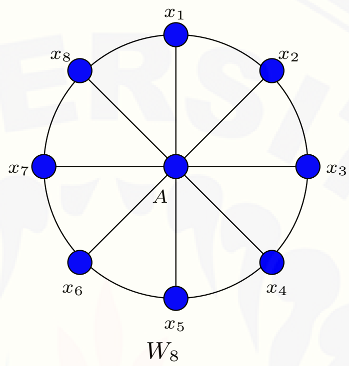
Graf prisma dinotasikan dengan $H_{4,n}$ yaitu sebuah graf yang memuat *cycle* ber-order 4 sebanyak n dan dihubungkan oleh graf lintasan P_n pada titik sejajar. Graf prisma $H_{4,n}$ terdiri dari $4n$ titik dan $8n-4$ sisi dengan $n \geq 2$(Lin et al., 2001). Contoh graf prisma dapat dilihat pada Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Contoh Graf Prisma $H_{4,n}$

g. Graf Roda (*Wheel Graph*)

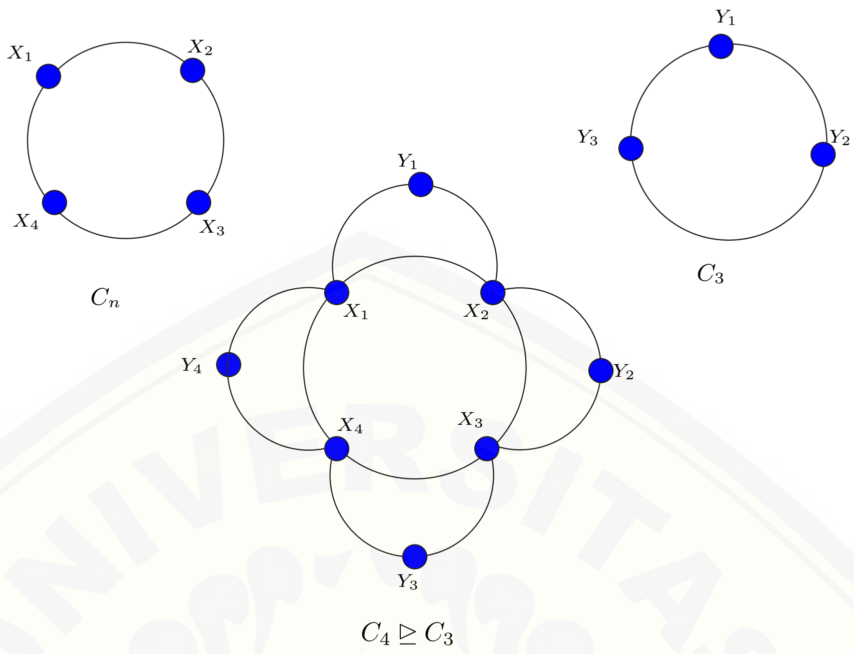
Graf roda $W_n (n > 3)$ adalah graf yang didapat dengan menghubungkan semua titik dari graf siklus C_n dengan suatu titik yang disebut titik pusat. Graf roda memiliki $V(G) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{A\} = n+1$ dan $E(G) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n x_1\} \cup \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} = 2n$ (Harary, 2007). Contoh graf roda dapat dilihat pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Contoh Graf Roda W_n

Operasi graf merupakan operasi terhadap dua buah graf atau lebih sehingga menghasilkan graf baru. Berikut merupakan operasi graf comb sisi beserta contohnya.

Definisi 2.1. *Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan $e \in E(H)$. Operasi comb sisi dari graf G dan H yang dinotasikan dengan $G \trianglerighteq H$ merupakan operasi graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan graf G dan $|E(G)|$ salinan graf H, kemudian merekatkan salinan ke-i dari graf H di sisi cangkok xy pada sisi ke-i dari graf G. Misal graf G dengan titik $|V(G)| = p_1$ dan sisi $|E(G)| = q_1$, serta graf H dengan titik $|V(H)| = p_2$ dan sisi $|E(H)| = q_2$. Maka banyaknya titik dan sisi pada graf $G \trianglerighteq H$ adalah $|V(G \trianglerighteq H)| = q_1(p_2 - 2) + p_1$ dan $|E(G \trianglerighteq H)| = q_1 q_2$ (Dafik* et al.*, 2016).* Contoh operasi comb sisi ($C_4 \trianglerighteq C_3$) dapat dilihat pada Gambar 2.9

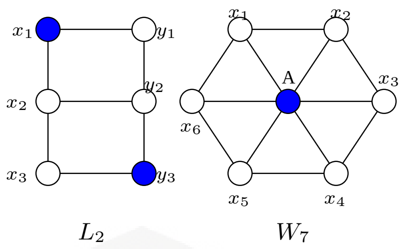


Gambar 2.9 Graf Hasil Operasi graf comb sisi pada graf *cycle* C_n dan C_3

2.3 *Independent Dominating Set, Locating Dominating Set, dan Locating Independent Dominating Set*

Menurut de jaenish dalam Haynes dan Henning (2002) himpunan D dari titik graf sederhana G dikatakan *independent dominating set* jika tidak ada dua titik yang bertetangga pada graf G. Kardinalitas terkecil dari *independent dominating set* disebut *independent dominating number* yang dinotasikan dengan $i(G)$. *Independent dominating set* D dengan $|D| = i(G)$ dinamakan minimum *independent dominating set*.

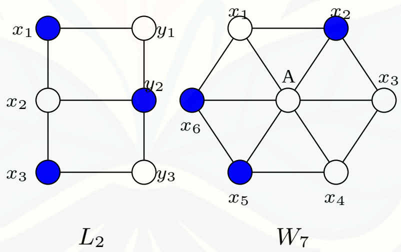
Contoh *independent dominating set* pada graf *ladder* dan *wheel* dapat dilihat pada gambar 2.10 dimana titik yang diwarnai hitam merupakan *independent dominating set*nya.



Gambar 2.10 *Independent Dominating Set* pada graf *ladder*L_2 dan roda W_6

suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan himpunan dominasi lokasi atau *locating dominating set* jika untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $\emptyset \neq N(u) \cap D \neq N(v) \cap D$ dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas minimum dari himpunan dominasi lokasi disebut *locating domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_L(G)$ (Slater, 2002).

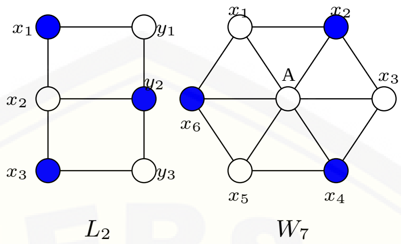
Contoh *locating dominating set* pada graf *ladder* dan *wheel* dapat dilihat pada gambar 2.11 dimana titik yang diwarnai hitam merupakan *locating dominating set*nya sehingga $V - D$ tidak memiliki irisan yang sama.



Gambar 2.11 *Locating Dominating Set* pada graf *ladder*L_2 dan roda W_6

locating independent dominating set merupakan *independent dominating set* dan *locating dominating set* sehingga *locating independent dominating set* adalah suatu himpunan titik D pada graf $G = (V, E)$ dikatakan *locating independen dominating set* jika tidak ada dua titik D yang bertetangga pada graf G dan untuk setiap pasangan titik yang berbeda u dan v pada $V(G) - D$ memenuhi syarat $\emptyset \neq N(u) \cap D \neq N(v) \cap$

D dimana $N(u)$ adalah himpunan titik tetangga dari u. Kardinalitas minimum dari *locating independen dominating set* disebut *locating independen domination number* yang disimbolkan dengan $\gamma_{Li}(G)$.



Gambar 2.12 *Locating Independent Dominating Set* pada graf *ladder* L_2 dan roda W_6

Gambar 2.10 menunjukkan bahwa irisan yang dimiliki graf tersebut memenuhi syarat *independent dominating set* dan *locating dominating set* sehingga pada graf dengan titik yang diwarnai hitam merupakan *locating independent dominating set*nya.

Beberapa hasil penelitian *independent dominating set* dan *locating dominating set* terdahulu dapat dilihat pada tabel berikut :

Tabel 2.1 *Independen Domination Number* Pada Sebarang Graf Khusus

$Graph$	$i(G)$	Keterangan
graf $C_n \Box S_m$ untuk $n, m \geq 3$	$\frac{1}{2}(mn - m + n - 1)$, untuk n ganjil $\frac{1}{2}(mn + n)$, untuk n genap	Solehah
graf $P_2 \otimes C_n$ untuk $n \geq 3$	$\lceil \frac{2n}{3} \rceil$, untuk $n \equiv 1$ $(mod$ 3) $\lceil \frac{2n}{3} + 1 \rceil$, untuk n lainnya	Solehah
graf $(P_n[Bt_m])$ untuk $n, m \geq 3$	$\lceil \frac{n}{3} \rceil$	Solehah
graf $amal(Bt_n, v, r)$ untuk $n \geq 3$	1	Solehah
graf $P_n^{Bt_m}$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$	$\frac{n-1}{2}$, untuk n ganjil $\frac{n}{2}$, untuk n genap	Solehah
graf $L_3^{Bt_m}$ untuk $n = 3$ dan $m \geq 3$	n	Solehah
graf $C_n^{Bt_m}$ untuk $n \geq 4$,n genap dan $m \geq 3$	$\frac{n}{2}$	Solehah
graf $P_n^{B_m}$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$	$\frac{1}{2}(2mn - 2m + n - 1)$, untuk n ganjil $mn - m + \frac{n}{2}$, untuk n genap	Solehah

Tabel 2.2 *Locating Domination Number* Pada Sebarang Graf Khusus

$Graph$	$\gamma_L(G)$	Keterangan
P_2	1	Slater
P_3	2	Slater
P_n	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil, n > 3$	Slater
C_4, C_5	2	Slater
C_6	3	Slater
C_n	$\lceil \frac{2n}{5} \rceil, n > 6$	Slater
Graf Lengkap, K_n	$n - 1, n > 1$	Slater
$K_{1,n-1}$	$n - 1, n > 2$	Slater
$K_{r,n-r}$	$n - 2, r > 1, n > 4$	Slater
Graf Roda $W_{1,4}$	2	Slater
$W_{1,5}, W_{1,6}$	3	Slater
$W_{1,n-1}$	$\lceil \frac{2n-2}{5} \rceil, n > 7$	Slater
Graf Thin Sun (T_n)	n, $n \geq 4$	Argiroffo *et al.*, 2015
Graf Twin Free (G)	$\gamma_L \leq \frac{2n}{3}$	Foucaud *et al.*, 2016
Graf Trees (T)	$\gamma_L(T) = \frac{n}{2}, n \geq 2$	Foucaud *et al.*, 2016
Graf Helm (H_n),untuk $n \geq 3$	$\gamma_L(H_n) = n$	Desvandai, 2016

BAB 3. METODE PENELITIAN

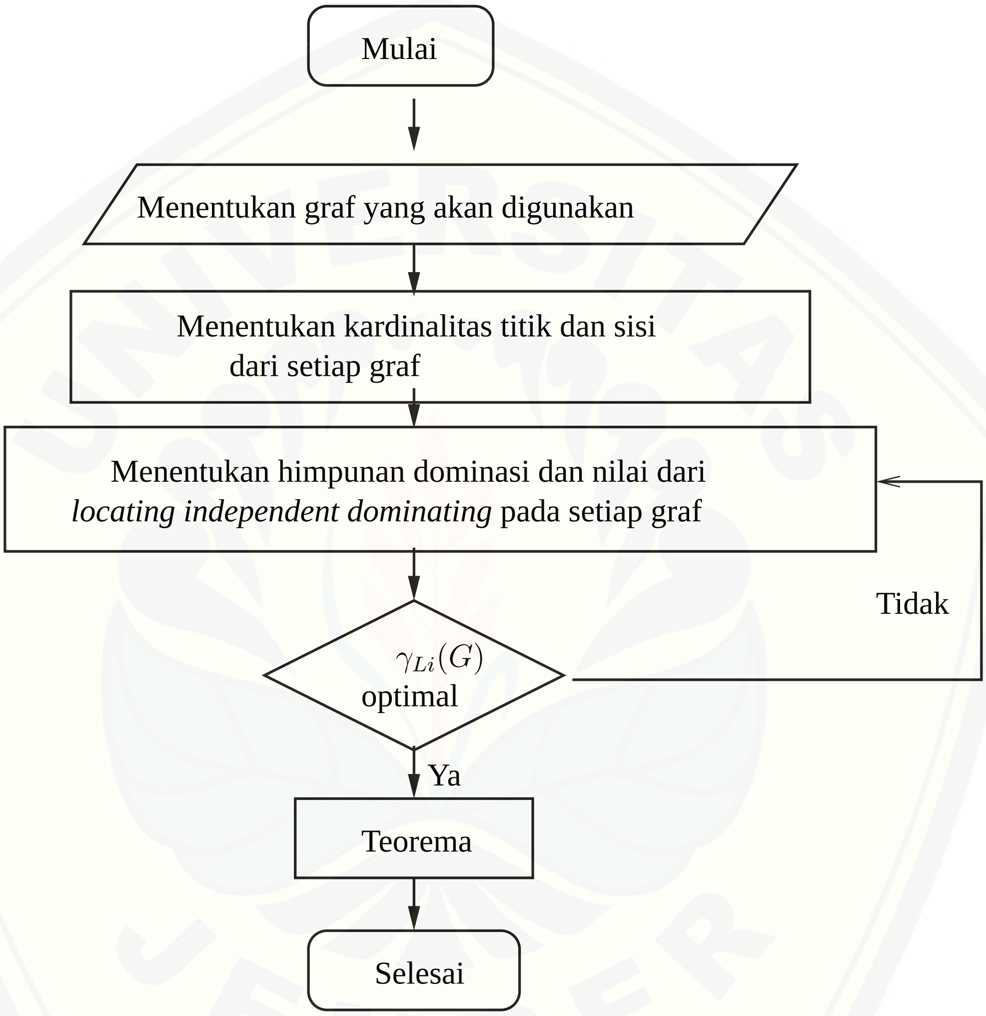
3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan ke dalam penelitian eksploratif, yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya dan data dalam penelitian ini adalah data sekunder yang digunakan berupa graf-graf khusus dan graf operasi comb sisi.

3.2 Rancangan Penelitian

Rancangan penelitian untuk *locating independent dominating set* pada graf khusus dan graf operasi eksponensial digambarkan dalam bagan yang diilustrasikan oleh Gambar 3.1. Uraian dari rancangan penelitian ini sebagai berikut:

a. menentukan objek penelitian berupa graf-graf khusus dan operasi comb sisi;
b. menentukan banyak titik dan banyak sisi pada graf khusus dan operasi comb sisi;
c. menentukan titik-titik *locating independen dominating set* pada graf khusus dan operasi comb sisi;
d. menganalisa graf-graf khusus dan operasi comb sisi dengan teori *locating independen dominating set*;
e. Menganalisa keoptimalan dari *locating independen dominating number*;
f. Sehingga menghasilkan teorema dan akibat tentang *locating independen dominating number*nya ($\gamma_{Li}(G)$)



Gambar 3.1 Rancangan Penelitian

BAB 5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

a. Banyaknya titik dan sisi pada graf operasi comb sisi dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $|V(S_m \trianglerighteq W_n)| = mn + 1$ dan $|E(S_m \trianglerighteq W_n)| = 2mn$
2. $|V(S_n \trianglerighteq C_m)| = mn - n + 1$ dan $|E(S_n \trianglerighteq C_m)| = mn$
3. $|V(S_n \trianglerighteq P_m)| = mn - n + 1$ dan $|E(S_n \trianglerighteq P_m)| = mn - n$
4. $|V(C_n \trianglerighteq L_m)| = 2mn - n$ dan $|E(C_n \trianglerighteq L_m)| = 3nm - 2n$
5. $|V(C_n \trianglerighteq C_3)| = 2n$ dan $|E(C_n \trianglerighteq C_3)| = 3n$
6. $|V(P_n \trianglerighteq C_3)| = 2n - 1$ dan $|E(P_n \trianglerighteq C_3)| = 3n - 3$
7. $|V(C_n \trianglerighteq P_m)| = mn - n$ dan $|E(C_n \trianglerighteq P_m)| = mn - n$

b. Banyaknya titik dominator pada graf khusus dan graf operasi comb sisi dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $D(B_{4,n}) = \{x_i; 1 \leq i \leq n;$ i ganjil $\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n;$ i genap$\}$.
2. $D(H_{4,n}) = \{x_1^{k_{ganjil}}, x_2^{k_{genap}}, x_3^{k_{ganjil}}, x_4^{k_{genap}}; 1 \leq k \leq n\}$.
3. $D(W_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n; i\ genap\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n;$ i genap$\}$.
4. $D(S_m \trianglerighteq W_n) = \{A, x_i^j; 1 \leq i \leq n-2; 1 \leq j \leq m,$i genap $\}$.
5. $D(S_n \trianglerighteq C_m) = \{x_i^j; 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq n,$i ganjil $\}$.
6. $D(S_n \trianglerighteq P_m) = \{A, x_i^j; 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq n,$i genap $\}$.
7. $D(C_n \trianglerighteq L_m) = \{y_i^j; 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq n;$i ganjil$\} \cup \{z_i^j; 1 \leq i \leq m-1; 1 \leq j \leq n;$i genap$\}$.

8. $D(C_n \trianglerighteq C_3) = \{y_i; 1 \leq i \leq n\}$.
9. $D(P_n \trianglerighteq C_3) = \{y_i; 1 \leq i \leq n-1\}$.
10. $D(C_n \trianglerighteq P_m) = \{x_i^j; 1 \leq i \leq n-1; 1 \leq j \leq m$,i genap $\}$.

c. *Locating independent dominating number* pada beberapa graf khusus dan graf operasi eksponensial dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. γ_{Li} $(B_{4,n})$=n, untuk $n \geq 2$.
2. γ_{Li} $(H_{4,n})$=2n, untuk $n \geq 3$ dan n genap.
3. γ_{Li} (W_n)=$\frac{n}{2}$, untuk $n \geq 6$ dan n genap.
4. γ_{Li} $(S_m \trianglerighteq W_n) = \frac{nm-2m}{2} + 1$, untuk $m \geq 3$ $n \geq 6$ dan n genap.
5. γ_{Li} $(S_n \trianglerighteq C_m) = \frac{n(m-1)}{2}$, untuk $n \geq 3$ $m \geq 5$ dan m ganjil.
6. γ_{Li} $(S_n \trianglerighteq P_m) = \lfloor \frac{n(m-1)}{2} + 1 \rfloor$, untuk $n \geq 3$ $m \geq 4$ dan m genap.
7. maka γ_{Li} $(C_n \trianglerighteq L_m) = mn - n$, untuk $n \geq 3$, $m \geq 3$.
8. γ_L $(C_n \trianglerighteq C_3) = n$, untuk $n \geq 3$.
9. γ_{Li} $(P_n \trianglerighteq C_3) = n-1$, untuk $n \geq 3$.
10. γ_{Li} $(C_n \trianglerighteq P_m) = \frac{mn-2n}{2}$, untuk $n \geq 3$,$m \geq 6$ dan m genap.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian berkaitan *locating independent dominating set* pada graf khusus dan graf operasi comb sisi maka peneliti memberikan saran kepada pembaca untuk meneliti *locating independent dominating set* pada graf khusus lainnya dan operasi graf yang lainnya seperti operasi *amalgamation*, comb product dan lain sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

Agustin, I. H. 2014. *Penerapan Teori Dominating Set dalam Instalasi Client Hub untuk Jaringan Intranet di Universitas Jember*. Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember.

Agustin, I. H. dan Dafik. 2014. On The Domination Number of Some Families of Special Graphs. *Prosiding* Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember, **1**(1): 139-143.

Argiroffo, G.R., Bianchi, S.M .2015. ”A Polyhedral Approach to Locating-Dominating Sets in Graphs”. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **50**: 89-94.

Canoy, S.R., Jr., Malacas, G.A. 2014. ”Locating-Dominating Sets in Graphs”. *Journal of Applied Mathematical Sciences*, **8** (88): 4381-4388.

Chen, C., Lu, C., Miao, Z. 2011. ”Identifying Codes and LocatingDominating Sets on Paths and Cycles”. *Discrete Applied Mathematics*, **159**: 1540-1547.

Dafik dkk. 2013. Super Antimagicness of Tringular Book dan Diamond Ladder Graph. *Prosiding of IICMA*. 1-8.

Dafik dkk. 2016. On the total r-dynamic coloring of graph: A new graph coloring study. *Proceeding of ICMETA*. 1-8

Damayanti, R.T .2011. *Automorfisma graf bintang dan graf lintasan*. Universitas Brawijaya, **2**, 35-40.

Desvandai, R. B. 2016. *Analisa Himpunan Dominasi Lokasi pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya*. Skripsi. Jember. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Foucaud,F., Henning,M.A. 2016. ”Locating-Dominating Sets in Twin-Free Graphs”. *Journal of Discrete Applied Mathematics*, **200**: 52-58.

Gallian, J.A .2009. ”Dinamyc survey of graph labeling”. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 11-16

Harary, F. 2007. *Graph Theory*. New London : Wesley.

Hartsfield, N. and Ringel, G. 1994. *Pearls in Graph Theory*. London : Academic Press Limited.

Haynes, T.W and Henning, M.A. 2002. Total Domination Good Vertices in Graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, **26**: 305-315.

Lin, Slamin, dan Miller, M. 2001.*On d-antimagic labelings of antiprism*. University of New Castle Australia.

Munir, R. 2009.*Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan: Pendekatan Teori graf*. Jember: Universitas Jember

Slater, P. J. 1995. *Locating dominating sets and locating-dominating sets, in: Y. Alavi, A. Schwenk (Eds.)*. Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Proceedings of Seventh Quad. International Conference on the Theory and Applications of Graphs, Wiley, New York.

Slater, P. J. 2002. ”Fault-Tolerant Locating-Dominating Sets”. *Discrete Mathematics*, **249**: 179-189.

Solehah, S. A. 2016. *Independent Domination Number pada Beberapa Graf Operasi*. Skripsi. Jember. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Wardani, D. A. R., Agustin, I. H., Dafik. 2014. Bilangan Dominasi dari Graf-graf Khusus: *Prosiding* Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika. Jurnal: UAD Yogyakarta, **1**: 78-82.