



**PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC  
PADA GRAF RODA TANK DAN KAITANNYA  
DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR  
TINGKAT TINGGI**

**SKRIPSI**

Oleh

**Sindy Putri Amalia Ma'rufah**

**NIM 110210101062**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2015**



**PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC  
PADA GRAF RODA TANK DAN KAITANNYA  
DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR  
TINGKAT TINGGI**

**SKRIPSI**

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Pendidikan Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Pendidikan

Oleh

**Sindy Putri Amalia Ma'rufah**

**NIM 110210101062**

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN  
UNIVERSITAS JEMBER**

**2015**

## PERSEMBAHAN

Segala puji bagi Allah, Tuhan yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang, serta sholawat dan salam semoga terlimpah kepada makhluk ciptaan-Mu yang paling mulia, Nabi Muhammad S.A.W., kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Ayahanda Drs. Suryanto dan ibunda Dra. Atas Mamie, serta kakak laki-lakiku Achmad Pratama Surya Admaja yang senantiasa mengalirkan rasa cinta dan kasih sayang serta cucuran keringat dan doa yang tiada pernah putus, selalu mendukung setiap perjalanan hidupku, selalu menghiasi hariku dengan dengan tawa penuh kasih sayang dan doa. Bagiku, Kalianlah orang-orang terhebat di dunia ini;
2. Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., dan Bapak Prof. Drs. Slamir, M.Comp.Sc., Ph.D.. selaku pembimbing skripsi yang dengan sabar telah memberikan ilmu dan bimbingan selama menyelesaikan skripsi ini;
3. Para guru dan dosen, yang telah memberikan ilmu dan membimbing dengan penuh kesabaran;
4. Sahabat-sahabatku "AK": Agustin, Karina, Rara, Masyita, Riska dan Ridho yang senantiasa membantuku dan menorehkan pengalaman-pengalaman hidup yang indah dan tak terlupakan;
5. Teman seperjuanganku : Enin, Inge, Ridho, Agnes, Husnul, Masyita, Rizky Titie dan pecinta graf lainnya yang telah membagi ilmu dan pengalaman berharga;
6. Sahabat-sahabat SMA-ku: Ratna, Olive, Siti, Adinda, Yayan, Syam dan Bima yang telah menemani dan menguatkan untuk menggapai cita-citaku;
7. Keluargaku di kos Jl. Kalimantan 1 no 73 : Mery, Agustin, Mbak Yuni, Mbak Farida, Ibu Asir sekeluarga yang telah memberikan warna dalam hidupku selama beberapa tahun ini, terimakasih atas kehangatan keluarga yang telah kalian berikan. Kalian adalah keluarga kedua bagiku;

8. Teman-teman AM-B (Laila, Gathut, Joyo, Fauzi, Hapiz, Rizal) dan teman-teman PPL serta teman-teman Pendidikan Matematika angkatan 2011, terima kasih atas dorongan semangat dan bantuannya selama masa proses penyelesaian skripsiku;
9. Almamater Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.



## HALAMAN MOTTO

"Dan tiadalah Kami mengutus kamu, melainkan untuk (menjadi) rahmat bagi semesta alam."

(Q.S. Al-Anbiya' : 107)

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(Q.S. Al-Insyirah : 5)

"Aku tak mau mimpi yang tanggung-tanggung, karena ku yakin, kuasa Tuhanku tak tanggung-tanggung."

(Ahmad Rifa'i Rif'an)

"Jadilah kamu manusia yang pada kelahirannya semua orang tertawa bahagia, tetapi hanya kamu sendiri yang menangis; dan pada kematianmu semua orang menangis sedih, tetapi hanya kamu sendiri yang tersenyum."

(Mahatma Gandhi)

**HALAMAN PERNYATAAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Sindy Putri Amalia Ma'rufah

NIM : 110210101062

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Pelabelan Total Super  $(a, d)$ -Sisi Antimagic pada Graf Roda Tank dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Februari 2015

Yang menyatakan,

Sindy Putri Amalia Ma'rufah

NIM. 110210101062



**SKRIPSI**

**PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC  
PADA GRAF RODA TANK DAN KAITANNYA  
DENGAN KETERAMPILAN BERPIKIR  
TINGKAT TINGGI**

Oleh

**Sindy Putri Amalia Ma'rufah**

**NIM 110210101062**

Dosen Pembimbing 1 : Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

Dosen Pembimbing 2 : Prof. Drs. Slamir, M.Comp.Sc., Ph.D.

HALAMAN PENGAJUAN

PELABELAN TOTAL SUPER  $(a, d)$ -SISI ANTIMAGIC PADA  
GRAF RODA TANK DAN KAITANNYA DENGAN  
KETERAMPILAN  
BERPIKIR TINGKAT TINGGI

SKRIPSI

Diajukan untuk dipertahankan di depan Tim Penguji sebagai salah satu persyaratan untuk menyelesaikan Program Pendidikan Sarjana Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam dengan Program Studi Pendidikan Matematika pada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember

Oleh:

Nama : Sindy Putri Amalia Ma'rufah  
NIM : 110210101062  
Tempat dan Tanggal Lahir : Probolinggo, 22 november 1992  
Jurusan / Program Studi : Pendidikan MIPA / P. Matematika

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc, Ph.D  
NIP. 19680802 199303 1 004

Prof. Drs. Slamir, M.Comp.Sc., Ph.D.  
NIP. 19670420 199201 1 001



**HALAMAN PENGESAHAN**

Skripsi berjudul Pelabelan Total Super ( $a, d$ )-Sisi Antimagic pada Graf Roda Tank dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi telah diuji dan disahkan oleh Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan pada:

Hari : Jum'at

Tanggal : 20 Februari 2015

Tempat : Gedung 3 FKIP UNEJ

Tim Penguji :

Ketua,

Sekretaris,

Susi Setiawani, S. Si., M.Sc.

NIP.19700307 199512 2 001

Anggota I,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP.19680802 199303 1 004

Prof. Drs. Slamini, M.Comp.Sc., Ph.D.

NIP.19670420 199201 1 001

Anggota 2,

Arif Fatahillah, S.Pd., M.Si.

NIP. 19820529 200912 1 003

Mengetahui,

Dekan Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan

Universitas Jember

Prof. Dr. Sunardi, M.Pd

NIP. 19540501 198303 1 005

## RINGKASAN

**Pelabelan Total Super  $(a,d)$ -Sisi Antimagic pada Graf Roda Tank dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi;** Sindy Putri Amalia Ma'rufah, 110210101062; 2015: 106 halaman; Program Studi Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember.

Ilmu pengetahuan dan Teknologi semakin berkembang seiring dengan kemajuan jaman. Berbagai macam Ilmu Pengetahuan yang telah berkembang pada saat ini. Salah satu contohnya yakni matematika. Berbagai macam cabang Ilmu di dalam matematika, salah satunya yaitu matematika diskrit yang di dalamnya terdapat pokok bahasan mengenai teori graf. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek diskrit tersebut. Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan cacah yang disebut label. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic (SEATL), dimana  $a$  bobot sisi terkecil dan  $d$  nilai beda.

Graf Roda Tank yang dinotasikan dengan  $TW_{m,n}$  merupakan pengembangan dari graf *cycle* yang dihubungkan satu sama lainnya. Graf ini merupakan graf yang memiliki dua ekspan pada indeks  $m$  dan indeks  $n$ . Gabungan diskonektif graf Roda Tank merupakan gabungan saling lepas dari  $k$  duplikat graf Roda Tank dan dinotasikan dengan  $cTW_{m,n}$ . Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui apakah graf Roda Tank memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic. Selain itu akan diterapkannya tahapan-tahapan yang terdapat pada Taksonomi Bloom hingga mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan teorema tentang pelabelan graf, kemudian diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada  $TW_{m,n}$  dan  $cTW_{m,n}$ . Hasil penelitian ini berupa lemma dan teorema baru mengenai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic  $TW_{m,n}$  dan  $cTW_{m,n}$  yaitu sebagai berikut:

1. Ada pelabelan titik  $(m + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $(Tw_{m,n})$  jika  $n \geq 8$ ,  $n$  genap dan  $m \geq 3$  yang telah dibuktikan pada lemma 4.4.1.
2. Ada pelabelan total super  $(3mn - m + 1, 0)$ , dan  $(mn + m + 3, 2)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  jika  $m \geq 3$  dan  $n \geq 8$ ,  $n$  genap. Pada kasus ini dibagi menjadi dua kasus yakni  $d = 0$  dan  $d = 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.4.1..
3. Ada pelabelan total super  $(2mn + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  jika  $m \geq 3$ ,  $m$  ganjil dan  $n \geq 8$ ,  $n$  genap yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.4.2.
4. Ada pelabelan titik  $(\frac{mn+1}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan Graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$ ,  $n = 6q + 4$ ,  $q$  sembarang dan  $c \geq 3$ ,  $c$  ganjil, telah dibuktikan pada lemma 4.6.1.
5. Ada pelabelan total super  $(\frac{6mnk - 2mk - k + 3}{2}, 0)$ , dan  $(\frac{2mnk + 2mk + k + 5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.6.1.
6. Ada pelabelan total super  $(2mnk + 2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.6.2.

Hasil penelitian diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup pelabelan graf dan bisa digunakan sebagai acuan oleh peneliti lain untuk meneliti pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf-graf khusus yang lain.

## KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Pelabelan Total Super  $(a, d)$ -Sisi Antimagic pada Graf Roda Tank dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Dekan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
3. Ketua Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
4. Ketua Laboratorium Komputer Program Studi Pendidikan Matematika Jurusan Pendidikan MIPA FKIP;
5. Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing I dan Prof. Drs. Slamir, M.Comp.Sc., Ph.D. selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
6. Dosen dan Karyawan Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember;
7. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Akhirnya penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

Jember, Februari 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . .	i
HALAMAN PERSEMBAHAN . . . . .	ii
HALAMAN MOTTO . . . . .	iv
Halaman Pernyataan . . . . .	v
Halaman Pengajuan . . . . .	vii
Halaman Pengesahan . . . . .	viii
RINGKASAN . . . . .	ix
Kata Pengantar . . . . .	xi
DAFTAR ISI . . . . .	xiv
DAFTAR GAMBAR . . . . .	xvi
DAFTAR TABEL . . . . .	xvii
DAFTAR LAMBANG . . . . .	xviii
<b>1 PENDAHULUAN . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	4
1.3 Batasan Masalah . . . . .	4
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	5
1.5 Manfaat Penelitian . . . . .	5
<b>2 TINJAUAN PUSTAKA . . . . .</b>	<b>7</b>
2.1 Terminologi Dasar Graf . . . . .	7
2.2 Jenis-jenis graf . . . . .	9
2.3 Graf Khusus . . . . .	10
2.3.1 Graf khusus populer ( <i>well-known special graph</i> ) . . . . .	10
2.3.2 Graf khusus yang belum populer . . . . .	10
2.4 Aplikasi Graf . . . . .	18
2.5 Fungsi dan Barisan Aritmatika . . . . .	20
2.5.1 Fungsi . . . . .	20
2.5.2 Barisan Aritmatika . . . . .	20



2.5.3	Aksioma, Lemma, Teorema, Corollary, Konjektur dan Open Problem . . . . .	21
2.6	Pelabelan Graf . . . . .	22
2.6.1	Definisi Pelabelan Graf . . . . .	22
2.6.2	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi antimagic . . . . .	24
2.7	Hasil-Hasil Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif . . . . .	28
2.8	Graf Roda Tank $Tw_{m,n}$ . . . . .	32
2.9	Berpikir Tingkat Tinggi . . . . .	33
2.9.1	Berpikir Tingkat Tinggi dalam Pelabelan Total Super Sisi Antimagic . . . . .	35
<b>3</b>	<b>METODE PENELITIAN</b> . . . . .	<b>37</b>
3.1	Metode Penelitian . . . . .	37
3.2	Definisi Operasional . . . . .	38
3.2.1	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic . . . . .	38
3.2.2	Graf Roda Tank $Tw_{m,n}$ . . . . .	38
3.2.3	Gabungan Saling Lepas Graf Roda Tank $cTw_{m,n}$ . . . . .	39
3.3	Teknik Penelitian . . . . .	40
3.4	Observasi . . . . .	41
<b>4</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b> . . . . .	<b>43</b>
4.1	Graf Roda Tank $TW_{m,n}$ . . . . .	43
4.2	Jumlah Titik dan Sisi pada Graf Roda Tank $(TW_{m,n})$ . . . . .	43
4.3	Batas Atas $d$ graf Roda Tank $(TW_{m,n})$ . . . . .	44
4.4	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -EATL pada graf Roda Tank $(TW_{m,n})$ . . . . .	45
4.5	Gabungan graf Roda Tank $cTwm, n$ . . . . .	58
4.5.1	Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan graf Roda Tank $cTwm, n$ . . . . .	58
4.5.2	Batas Atas $d$ gabungan graf Roda Tank $cTwm, n$ . . . . .	59
4.6	Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi Antimagic pada Gabungan Graf Roda Tank $(cTwm, n)$ . . . . .	60
4.7	Berfikir Tingkat Tinggi Dalam Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic Pada Graf Roda Tank $cTwm, n$ . . . . .	91



4.8 Hasil dan Pembahasan . . . . .	102
<b>5 KESIMPULAN DAN SARAN . . . . .</b>	<b>105</b>
5.1 Kesimpulan . . . . .	105
5.2 Saran . . . . .	106
<b>DAFTAR PUSTAKA . . . . .</b>	<b>107</b>



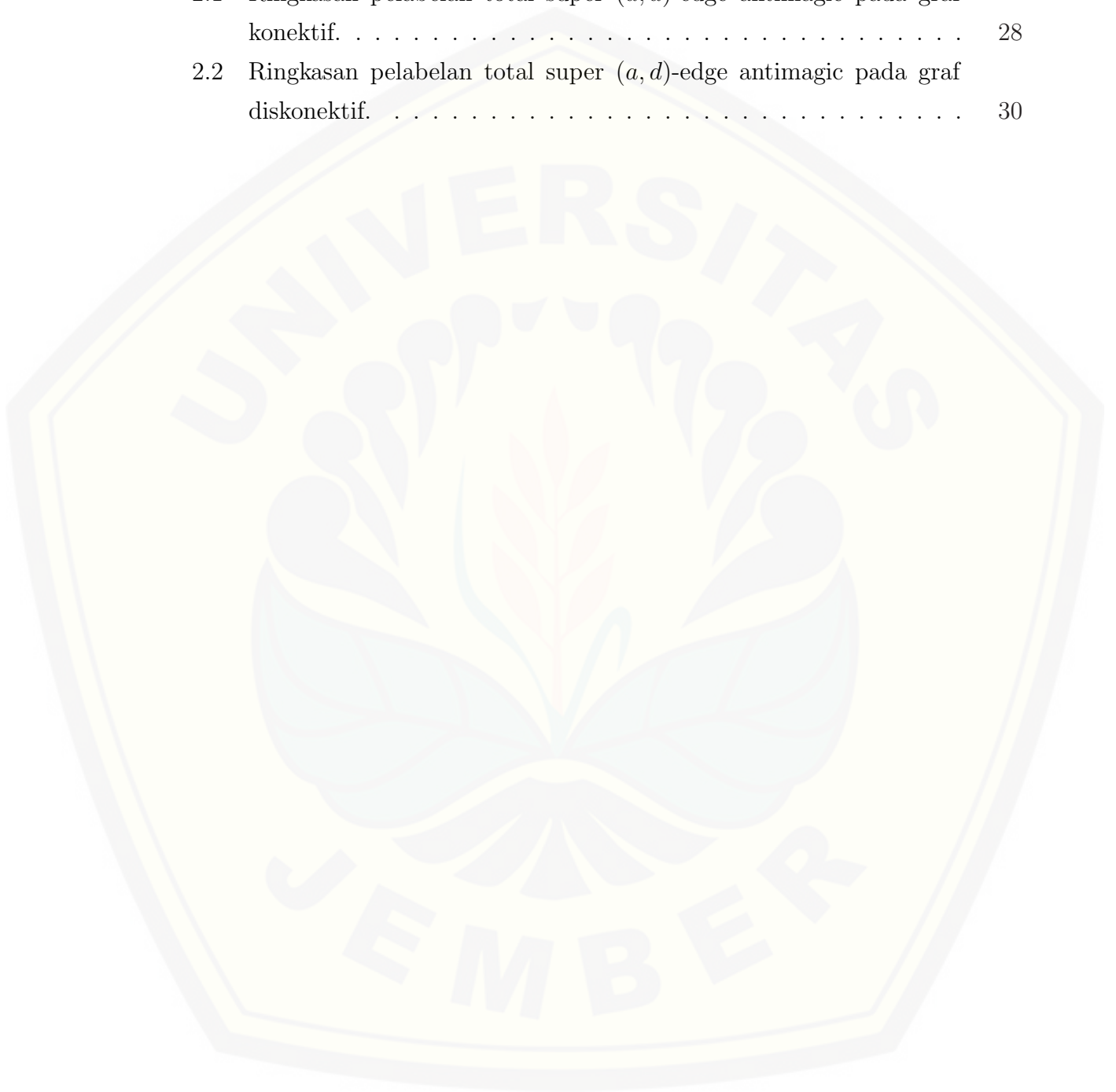
DAFTAR GAMBAR

1.1	Konigsberg . . . . .	3
2.1	Graf $G_1$ dan $G_2$ . . . . .	8
2.2	Contoh graf tidak sederhana dan graf sederhana . . . . .	8
2.3	Graf Buku Segitiga $Bt_5$ . . . . .	11
2.4	Graf UFO $U_{m,n}$ . . . . .	11
2.5	Graf Roket $R_{m,n}$ . . . . .	12
2.6	Graf Siput $S_4$ . . . . .	12
2.7	Graf Tangga Tiga-siklus $TCL_3$ . . . . .	13
2.8	Graf tunas kelapa $CR_{n,m}$ . . . . .	14
2.9	Graf Gunung Berapi . . . . .	14
2.10	Graf Kelelawar $Bat_n$ . . . . .	15
2.11	Graf Gunung $M_{2n}$ dengan $n = 2, M_4$ . . . . .	15
2.12	Graf Diamond Ladder $Dl_4$ . . . . .	16
2.13	Graf Ulat Sutra $Sw_n$ . . . . .	16
2.14	Graf Rantai Pentagon $\mathfrak{PC}_n$ . . . . .	17
2.15	Graf Tribun $\mathfrak{T}_n$ . . . . .	18
2.16	Graf Lampion $\mathcal{L}_{n,m}$ . . . . .	19
2.17	ip adress . . . . .	19
2.18	(a),(b),(c) Jenis-jenis Pelabelan . . . . .	23
2.19	Pola barisan bilangan dengan selisih tiap suku adalah 1 . . . . .	27
2.20	Graf Roda Tank . . . . .	33
2.21	Tahapan Taksonomi Bloom . . . . .	34
3.1	Graf Roda Tank . . . . .	38
3.2	Graf Roda Tank $3Tw_{8,3}$ . . . . .	39
3.3	Rancangan Penelitian . . . . .	41
3.4	$Tw_{3,8}$ . . . . .	42
4.1	Graf Roda Tank . . . . .	44

4.2	Pelabelan titik $(7,1)$ -sisi antimagic pada Roda Tank $(TW_{m,n})$ . . .	48
4.3	SEATL graf Roda Tank $(Tw_{5,8})$ dengan $d = 0$ . . . . .	50
4.4	SEATL graf Roda Tank $(Tw_{5,8})$ dengan $d = 2$ . . . . .	53
4.5	SEATL graf Roda Tank $(Tw_{5,8})$ dengan $d = 1$ . . . . .	56
4.6	Graf $5Tw_{5,10}$ . . . . .	68
4.7	Graf $5Tw_{5,10}$ . . . . .	78
4.8	Graf $5Tw_{5,10}$ . . . . .	89
4.9	. . . . .	92
4.10	Graf Roda Tank . . . . .	93
4.11	$d=0$ . . . . .	95
4.12	$d=2$ . . . . .	96
4.13	$d=1$ . . . . .	96
4.14	gabungan 3 . . . . .	97
4.15	gabungan 5 . . . . .	97
4.16	klasifikasi fungsi titik . . . . .	98
4.17	klasifikasi bobot sisi . . . . .	99
4.18	klasifikasi bobot sisi . . . . .	100

DAFTAR TABEL

2.1	Ringkasan pelabelan total super $(a, d)$ -edge antimagic pada graf konektif. . . . .	28
2.2	Ringkasan pelabelan total super $(a, d)$ -edge antimagic pada graf diskonektif. . . . .	30



## DAFTAR LAMBANG

$Tw_{m,n}$	= Lambang untuk graf Roda Tank
$cTw_{m,n}$	= Lambang untuk gabungan graf Roda Tank
$x_{i,j}$	= Titik ke-i dalam komponen ke-j pada lingkaran pada graf Roda Tank
$x_{i,j}^c$	= Titik ke-i dalam komponen ke-j <i>copy</i> ke-c pada titik gabungan graf Roda Tank
$f_a(x_{i,j})$	= Fungsi bijektif pelabelan titik pada graf Roda Tank
$f_a(x_{i,j}x_{i,j+1})$	= Fungsi bijektif label sisi lingkaran pada graf Roda Tank
$f_a(x_{i,n}x_{i,1})$	= Fungsi bijektif label sisi pada sisi akhir di lingkaran antar dua titik pada graf Roda Tank
$f_a(x_{i,j}x_{i,n-j+3})$	= Fungsi bijektif label sisi didalam lingkaran pada graf Roda Tank
$f_a(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})$	= Fungsi bijektif label sisi yang menghubungkan titik antara lingkaran satu dengan lingkaran selanjutnya pada graf Roda Tank
$f_a(x_{1,n-j+2}x_{m,j})$	= Fungsi bijektif label sisi yang menghubungkan titik awal pada lingkaran dengan titik akhir pada lingkaran terakhir pada graf Roda Tank
$f_a(x_{i,j}^c)$	= Fungsi bijektif pelabelan titik pada graf gabungan Roda Tank
$f_a(x_{i,j}^c x_{i,j+1}^c)$	= Fungsi bijektif label sisi lingkaran pada graf gabungan Roda Tank
$f_a(x_{i,n}^c x_{i,1}^c)$	= Fungsi bijektif label sisi pada sisi akhir di lingkaran antar dua titik pada graf gabungan Roda Tank
$f_a(x_{i,j}^c x_{i,n-j+3}^c)$	= Fungsi bijektif label sisi didalam lingkaran pada graf gabungan Roda Tank
$f_a(x_{i,j}^c x_{i+1,n-j+1}^c)$	= Fungsi bijektif label sisi yang menghubungkan titik antara lingkaran satu dengan lingkaran selanjutnya pada graf gabungan Roda Tank
$f_a(x_{1,n-j+2}^c x_{m,j}^c)$	= Fungsi bijektif label sisi yang menghubungkan titik awal pada lingkaran dengan titik akhir pada lingkaran terakhir pada graf gabungan Roda Tank

## BAB 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Ilmu pengetahuan dan Teknologi semakin berkembang seiring dengan kemajuan jaman. Berbagai macam Ilmu Pengetahuan yang telah berkembang pada saat ini. Salah satu contohnya yakni matematika, matematika merupakan ilmu yang penting bagi kehidupan manusia dan juga ilmu hitung yang mendasari berbagai macam ilmu lainnya. Kemampuan menghitung, mengukur, menurunkan dan menggunakan suatu rumus adalah salah satu kegunaan dari matematika yang diperlukan dalam kehidupan sehari-hari.

Matematika harus dipelajari seseorang secara individual terkait dengan proses berpikir logis yang bermanfaat bagi seseorang dalam mengambil suatu kesimpulan dan termasuk memecahkan masalah. Berpikir merupakan suatu kegiatan mental yang dialami seseorang jika mereka dihadapkan pada suatu masalah atau situasi yang harus dipecahkan. Hal ini menunjukkan ketika seseorang memecahkan suatu masalah ataupun ingin memahami sesuatu, maka orang tersebut melakukan aktivitas berpikir. Sesuatu dikatakan masalah apabila penyelesaiannya membutuhkan multi informasi. Masalah dikategorikan sulit atau tinggi dapat diselesaikan dengan keterampilan berpikir tingkat tinggi.

Berpikir tingkat tinggi terjadi ketika seseorang mengambil informasi baru dan informasi yang tersimpan dalam memori dan saling berhubungan atau menata kembali dan memperluas informasi untuk mencapai tujuan atau menemukan jawaban yang mungkin dalam situasi membingungkan. Membahas mengenai berpikir tingkat tinggi, berarti membahas level kognitif yang terdapat dalam taksonomi bloom, yaitu aspek mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, dan mengkreasi. Berpikir tingkat tinggi dimulai dari 4-6 level dari bawah. Tiga level pertama merupakan berpikir tingkat rendah, tiga level berikutnya adalah berpikir tingkat tinggi. Namun demikian pembuatan level ini bukan berarti bahwa level rendah tidak penting. Justru tingkat rendah ini harus dilalui



dulu untuk naik ketingkat berikutnya. Semakin tinggi level yang dicapai semakin sulit kemampuan berpikirnya. Selain itu kemampuan mengkomunikasikan gagasan melalui model matematika yang dapat berupa kalimat dan persamaan matematika, diagram, grafik atau tabel juga merupakan kegunaan lain dari matematika.

Berbagai macam cabang Ilmu di dalam matematika, salah satunya yaitu matematika diskrit yang di dalamnya terdapat pokok bahasan mengenai teori graf. Teori graf banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Persoalan-persoalan ini akan lebih jelas untuk diterangkan bila dapat direpresentasikan dalam bentuk graf. Graf adalah himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu himpunan pasangan tidak terurut dari titik-titiknya yang disebut dengan sisi. Hingga saat ini pemanfaatan teori graf sangat membantu dalam pengaplikasiannya seperti dalam jaringan transportasi, komunikasi, pendesainan chip dan lain sebagainya. Walaupun pemanfaatannya sangat banyak, yang menarik adalah bahwa Teori graf hanya mempelajari titik dan garis.

Teori graf ini bermula dari tujuh jembatan yang terdapat di kota konigsberg di Prusia timur yang menghubungkan empat wilayah disekitarnya, dan bagaimana seseorang dapat melintasi kota dengan menyeberangi ketujuh jembatan tersebut tanpa mengulangi jembatan tersebut dua kali. Pada tahun 1736 oleh L. Euler seorang ahli matematika dari Swiss untuk mencoba memecahkan Masalah Jembatan Konigsberg. Euler mencoba solusi dari permasalahan bagaimana menyeberangi semua pulau dimulai dari sebarang pulau dan melewati semua pulau melalui jembatan itu tepat hanya satu kali dari tempat berangkat sampai kembali ke tempat semula. Permasalahan jembatan Konigsberg tersebut dapat direpresentasikan dalam aplikasi teori graf. Pada permasalahan ini lokasi sepanjang kota yang dihubungkan oleh jembatan merupakan representasi *vertex*, sedangkan jembatan yang menghubungkan antar lokasi merupakan representasi *edge*. Berikut disajikan model graf yang gambar oleh Euler ditunjukkan pada Gambar 1.1.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan



(a) Jembatan Konisberg di Jerman (b) Representasi dalam graf

Gambar 1.1 Konigsberg

bagian bilangan cacah yang disebut label. Pelabelan graf pertama kali muncul pada pertengahan tahun 1960-an yang diawali sebuah hipotesis oleh Ringel dan Rosa (Dafik, 2007:17).

Berdasarkan ada atau tidaknya label, graf dapat dibedakan menjadi dua yaitu *labeling* graf dan *non labeling* graf. Pelabelan (*labeling*) pada sebuah graf  $G$  adalah suatu pemetaan (fungsi bijektif) yang memetakan beberapa himpunan bagian dari elemen graf tersebut menuju ke sebuah himpunan bilangan bulat yang bernilai positif. Jika domain dari pemetaan tersebut berupa himpunan *vertex* maka pelabelan (*labeling*) tersebut dinamakan *vertex labeling*, sedangkan jika domainnya adalah himpunan *edge* maka pelabelannya dinamakan *edge labeling*. Selain itu terdapat pula total *labeling* yaitu pelabelan yang terjadi jika domainnya merupakan penggabungan dari himpunan *vertex* dan himpunan *edge*.

Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super( $a, d$ )-sisi antimagic (SEATL), dimana  $a$  bobot sisi terkecil dan  $d$  nilai beda. Pelabelan ini diperkenalkan oleh Simanjutak, Bertault dan Miller pada tahun 2000 (Dafik, 2007:19). Pada graf diskonektif, hanya sedikit famili graf yang diketahui mempunyai pelabelan total super( $a, d$ )-EATL. Masalah ini cukup sulit karena melibatkan angka pelabelan lebih banyak pada setiap komponen graf konektif terpisahnya dan tidak ada jaminan jika graf  $G$  mempunyai pelabelan total super( $a, d$ )-EATL kemudian pada gabungan graf diskonektifnya mempunyai pelabelan total super( $a', d'$ )-EATL. Oleh karena itu penelitian-

penelitian lanjutan sangat diperlukan.

Salah satu jenis graf yang belum diketahui pelabelan super  $(a, d)$ -EATL adalah graf Roda Tank. Graf Roda Tank yang dinotasikan dengan  $TW_{m,n}$  merupakan pengembangan dari graf *cycle* yang dihubungkan satu sama lainnya. Graf ini merupakan graf yang memiliki dua eksplan pada indeks  $m$  dan indeks  $n$ . Gabungan diskonektif graf Roda Tank merupakan gabungan saling lepas dari  $k$  duplikat graf Roda Tank dan dinotasikan dengan  $cTW_{m,n}$ .

Dalam penelitian ini akan dibahas tentang pelabelan total super  $(a, d)$ -EATL pada graf Roda Tank konektif dan gabungan atau diskonektif karena belum pernah ditemukan sebelumnya. Selain itu peneliti akan menerapkan tahapan-tahapan yang terdapat pada Taksonomi Bloom hingga mencapai keterampilan berpikir tingkat tinggi. Oleh karena itu, pada penelitian ini peneliti memilih judul "**Pelabelan Total Super  $(a, d)$ -Sisi Antimagic pada Graf Roda Tank dan Kaitannya dengan Keterampilan Berpikir Tingkat Tinggi**".

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana batas atas pelabelan total super  $(a,d)$ -EATL pada graf Roda Tank konektif dan diskonektif?
2. Bagaimana pelabelan total super  $(a,d)$ -EATL pada graf Roda Tank konektif?
3. Bagaimana pelabelan total super  $(a,d)$ -EATL pada graf Roda Tank diskonektif?
4. Bagaimana kaitan pelabelan total super  $(a,d)$ -EATL pada graf Roda Tank dalam menciptakan keterampilan berpikir tingkat tinggi?

## 1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian masalahnya dibatasi pada:

1. graf berhingga yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda (paralel) serta bukan graf berarah(*directed graph*);
2. pelabelan total super( $a, d$ )-EATL pada graf Roda Tank konektif akan disimbolkan dengan  $Tw_{m,n}$  dan gabungan graf Roda Tank diskonektif disimbolkan dengan  $cTw_{m,n}$ , dimana  $m \geq 3$ ,  $n \geq 10$ ,  $c \geq 3$  dan  $c$  bilangan ganjil;  $m, n, c \in N$ . Dalam hal ini,  $c$  merupakan banyaknya graf Roda Tank yang digabung, yaitu minimal 3 graf Roda Tank, sedangkan  $m$  dan  $n$  merupakan ketentuan dari definisi graf Roda Tank ;
3. Menggunakan taksonomi bloom yang telah direvisi;

## 1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui batas atas pelabelan total super ( $a, d$ )-EATL pada graf Roda Tank konektif dan diskonektif;
2. untuk mengetahui pelabelan total super ( $a, d$ )-EATL pada graf Roda Tank konektif;
3. untuk mengetahui pelabelan total super ( $a, d$ )-EATL pada graf Roda Tank diskonektif;
4. untuk mengetahui kaitan pelabelan total super ( $a, d$ )-EATL pada graf Roda Tank dalam menciptakan keterampilan berpikir tingkat tinggi.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian adalah:

1. Menambah wawasan baru dalam bidang teori graf labeling dan sekaligus memperkaya temuan-temuan algoritma pelabelan total super( $a, d$ )-EATL pada graf Roda Tank untuk graf khusus;



2. memberikan motivasi kepada pembaca untuk meneliti pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf dari jenis yang lain;
3. melatih peneliti dalam proses berpikir tingkat tinggi terutama terkait dengan mengingat dasar graf, memahami definisi pada graf, menerapkan batas atas, menganalisis pola, mengevaluasi fungsi dan terakhir mengkreasi lema, teorema dalam membuktikannya.



## BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

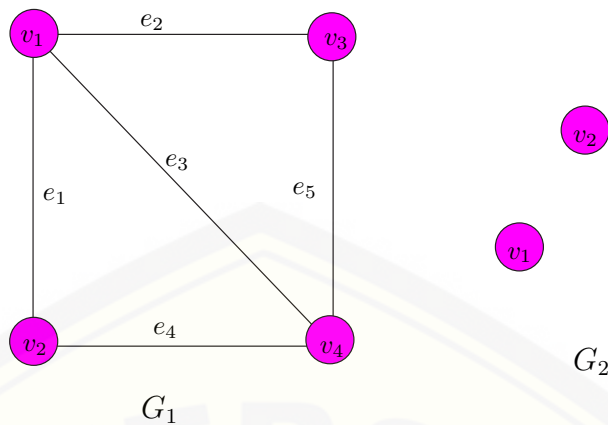
### 2.1 Terminologi Dasar Graf

Pengetahuan dasar mengenai graf sangat dibutuhkan dalam penelitian ini, karena batasan masalah ke-1 yang digunakan peneliti, penjelasannya pada terminologi dasar graf ini. Sebuah graf didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan  $(V, E)$  dimana  $V$  adalah sebuah himpunan tidak kosong yang berhingga yang anggota-anggotanya dinamakan simpul (verteks).  $E$  adalah sebuah himpunan sisi (edge) yang menghubungkan sepasang simpul. Graf dilambangkan dengan  $G = (V, E)$  Dimana  $V$  tidak boleh kosong, sedangkan  $E$  boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi Vertexnya harus ada minimal satu. Bila  $(V, E)$  adalah himpunan berhingga maka graf yang demikian disebut dengan graf berhingga (*finite graph*).

Suatu graf dengan  $p$  buah verteks dan  $q$  buah sisi ditulis dengan  $G(p, q)$ . Secara umum graf dapat digambarkan dengan suatu diagram dimana verteks yang ditunjukkan sebagai titik yang dinotasikan dengan  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  dan sisi yang digambarkan dengan sebuah garis lurus atau dengan garis lengkung yang menghubungkan dua verteks  $v_i, v_j$  dan dinotasikan  $e_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, q$  disebut dengan simpul-simpul verteks dari  $e_k$

Gambar 2.1.  $G_1$  adalah graf dengan  $V(G_1) = v_1, v_2, v_3, v_4$  dan  $E(G_1) = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$ , dengan  $e_1 = v_1v_2$ ,  $e_2 = v_1v_3$ ,  $e_3 = v_1v_4$ ,  $e_4 = v_2v_4$ ,  $e_5 = v_3v_4$ . Titik  $v_1$  dan  $v_2$  berhubungan langsung, sisi  $e_1$  terkait dengan titik  $v_1$  dan  $v_2$ . Karena  $E(G_2) = \emptyset$ , maka  $G_2$  adalah graf kosong. menurut Munir (2012:365) mengatakan dua titik dikatakan berhubungan (*adjacent*) jika ada sisi yang menghubungkan keduanya dan sebuah sisi dikatakan menempel untuk titik yang menghubungkan sisi tersebut. Sejumlah sisi yang menempel pada sebuah titik disebut derajat titik (*degree*). Graf reguler merupakan graf dimana (*degree*) disetiap titik pada graf tersebut sama (Gary Chartrand, 2012: 38). Sebagai contoh, graf pada gambar 2.1,  $v_1$  berhubungan dengan  $v_3$  dan  $v_3$  berhubungan dengan  $v_4$ , dan sisi  $e_1$  menempel

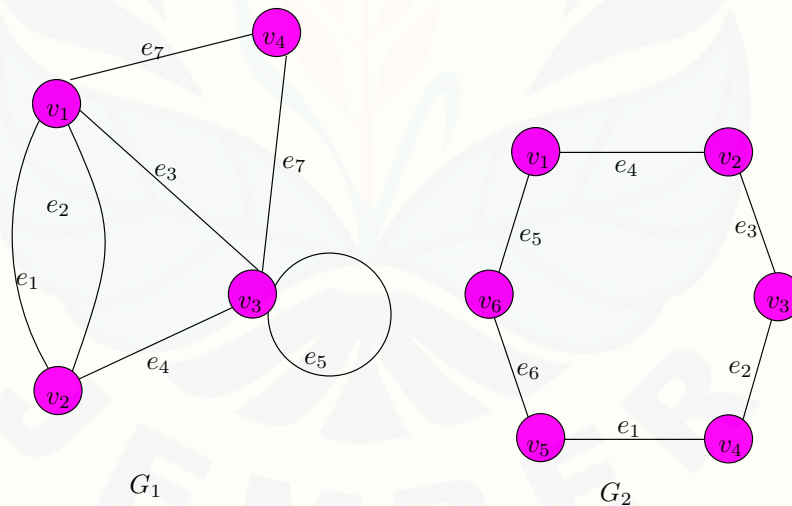




Gambar 2.1 Graf  $G_1$  dan  $G_2$

dengan titik  $v_1$  dan  $v_2$ . Titik  $v_4$  derajat 3,  $v_1$  memiliki derajat 3.

Sebuah sisi yang menghubungkan pasangan simpul yang sama atau bisa disebut juga sebuah sisi yang berawal dan berakhir pada verteks yang sama disebut dengan loop. Dan dua atau lebih sisi yang mempunyai verteks-verteks ujung yang sama disebut dengan sisi paralel. Sebuah graf yang di dalamnya tidak terdapat loop dan sisi paralel disebut dengan graf sederhana.



Gambar 2.2 Contoh graf tidak sederhana dan graf sederhana

Berdasarkan gambar 2.2.  $G_1$  bukan graf sederhana karena memiliki loop

yaitu sisi  $e_5$  dan memiliki sisi rangkap yaitu  $e_1$  dan  $e_2$ .  $G_2$  merupakan graf sederhana.

## 2.2 Jenis-jenis graf

Mempelajari jenis-jenis graf ini untuk mengetahui bagaimana menggambar graf khusus yang simetris, mengetahui kardinalitas dari graf khusus bahwa memerlukan  $|V|, |E|, V$  dan  $E$ , dan mengetahui berbagai macam graf khusus yang telah ditemukan peneliti sebelumnya. Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf, maka graf digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf sederhana (*simple graf*) adalah graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi-ganda dinamakan graf sederhana. Contoh graf sederhana di-representasikan dengan jaringan komputer. Pada graf sederhana sisi merupakan pasangan tak terurut. Jadi sisi  $(u, v)$  sama saja dengan  $(v, u)$ .
2. Graf tak-sederhana (*unsimple-graf / multigraf*) adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Graf tak sederhana dibagi menjadi dua macam, yaitu graf ganda dan graf semu. Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Sedangkan graf semu adalah graf yang mengandung gelang. Sisi pada graf semu dapat terhubung ke dirinya sendiri.

Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi dua jenis:

1. Graf berhingga (*finite graf*) adalah graf yang jumlah simpulnya,  $n$  berhingga.
2. Graf tak-berhingga (*unfinite graf*) adalah graf yang jumlah simpulnya,  $n$  tidak berhingga banyaknya disebut graf tak berhingga.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis:

1. Graf tak-berarah (*undirected graf*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah.
2. Graf berarah (*directed graf atau digraf*) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah.

## 2.3 Graf Khusus

Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya, dapat diperluas sampai order  $n$  tetapi simetris. Graf khusus yang sudah populer dinamakan *well-known special graph* sedangkan graf khusus yang belum populer tetapi dengan karakteristik graf khusus dinamakan *unwell-known special graph*. Berikut ini beberapa contoh graf khusus.

### 2.3.1 Graf khusus populer (*well-known special graph*)

1. Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan  $n$  buah simpul dilambangkan dengan  $K_n$ .

2. Graf Bintang (*Star Graph*)

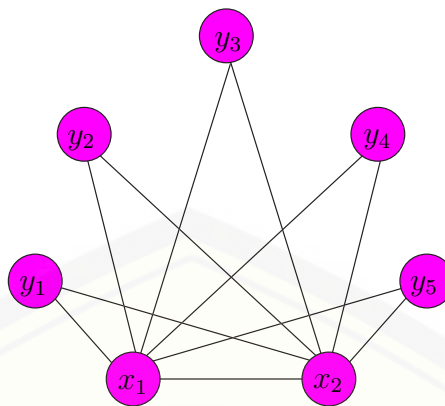
Graf Bintang adalah graf pohon yang terdiri dari 1 titik yang berderajat  $n - 1$  dan  $n - 1$  titik yang berderajat 1. Jadi, graf bintang  $S_n$  terdiri dari  $n$  titik dan  $n - 1$  sisi dengan  $n \geq 3$ .

3. Graf Lingkaran (*Cycle graph*)

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan  $n$  simpul dilambangkan dengan  $C_n$ .

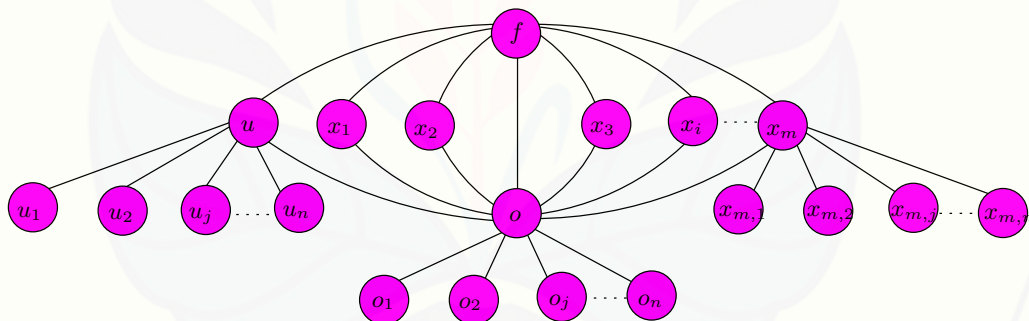
### 2.3.2 Graf khusus yang belum populer

1. Graf Buku Segitiga (Chandra, F.E.,2011) dinotasikan dengan  $Bt_n$  adalah suatu graf yang merupakan famili dari graf Komplete tripartite  $K_{m,n,l}$  dengan jumlah titik pada  $m$  dan  $n$  adalah satu dan jumlah titik pada  $l$  sebanyak  $n$ . Graf Buku Segitiga  $Bt_n$  merupakan graf yang terdiri dari  $n$  buah segitiga ( $n \geq 1$ ) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama. Sebagai ilustrasi perhatikan graf  $S_6$  pada Gambar 2.3. Graf tersebut tersusun dari 5 buah segitiga.



Gambar 2.3 Graf Buku Segitiga  $Bt_5$

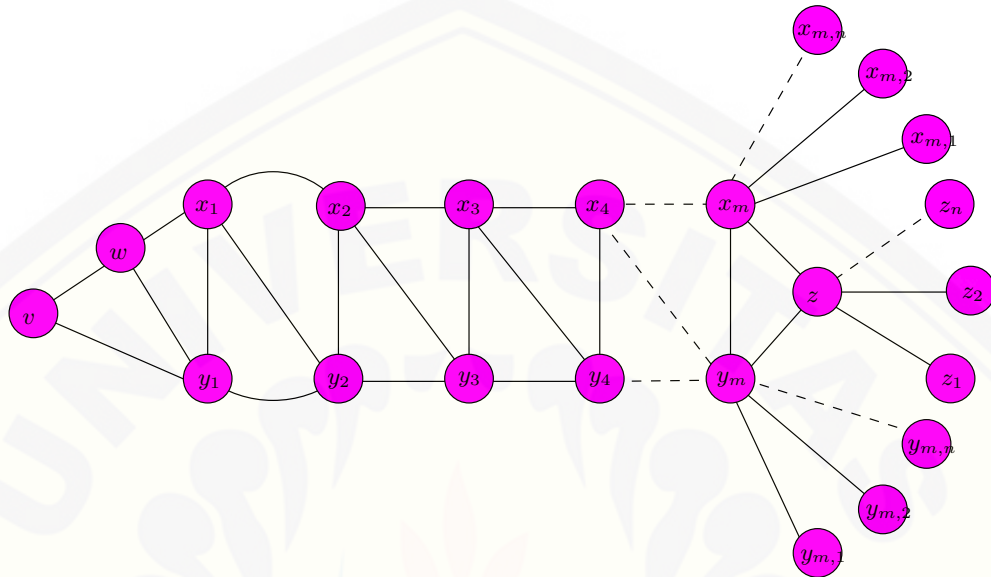
2. Graf UFO (Umilasari,R.,2013) yang dinotasikan dengan  $U_{m,n}$  adalah sebuah graf yang memiliki bentuk menarik yang dikembangkan dari graf Buku Segitiga. Graf UFO memiliki himpunan *vertex*,  $V = \{u, f, o, x_i, u_j, o_j, x_{mj}, ; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; m, n \in \mathbb{N}\}$  dan himpunan *edge*,  $E = \{fx_i, uf, fo, ox_i, x_m x_{mj}, uu_j, oo_j; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n; m, n \in \mathbb{N}\}$ . Gambar 2.4 merupakan Graf UFO,  $U_{m,n}$ .



Gambar 2.4 Graf UFO  $U_{m,n}$

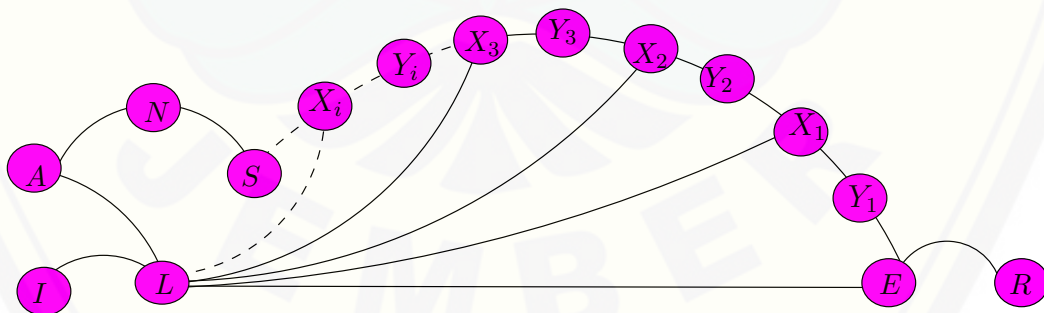
3. Graf Roket (Prastiwi,L.S.,2013) merupakan sebuah graf yang dinotasikan dengan  $R_{m,n}$  dimana  $n$  banyaknya percikan api yang keluar dari ekor Roket dan  $m$  adalah jumlah titik pada badan dari graf Roket. Graf Roket mempunyai  $2m + 3n + 3$  titik dan  $4m + 3n + 3$  sisi. Graf Roket mempunyai him-

punan titik  $R_{m,n}$  dimana  $V(R_{m,n}) = \{x_i, y_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{mj}, y_{mj}, z_j; 1 \leq j \leq n\} \cup \{v, w, z\}$   $ER_{m,n} = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}, x_i y_i, x_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{w x_1, v y_1, w y_1, v w\} \cup \{x_m z, y_m z, x_m x_{mj}, z z_j, y_m y_{mj}; 1 \leq j \leq n\}$ . Gambar 2.5 yang merupakan graf Raket  $R_{m,n}$ .



Gambar 2.5 Graf Raket  $R_{m,n}$

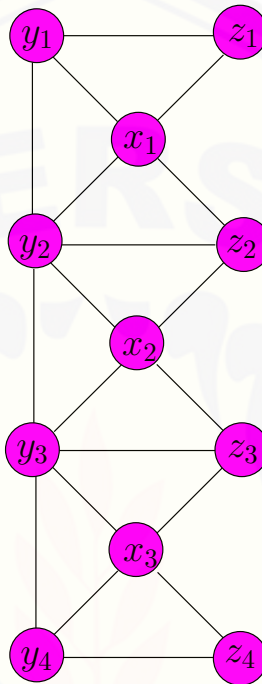
- Graf Siput (Dewi, N.R.,2013) dinotasikan  $S_n$  adalah sebuah graf dengan himpunan *vertex*,  $V = \{S, N, A, I, L, E, R, Y_i, X_i; 1 \leq i \leq n\}$  dan himpunan *edge*,  $E = \{RE, EY_1, Y_i X_i, X_i Y_{i+1}, X_n S, SN, NA, AL, IL, LE, LX_i; 1 \leq i \leq n\}$ . Gambar 2.6 merupakan contoh *Graf Siput* ( $S_n$ ).



Gambar 2.6 Graf Siput  $S_4$



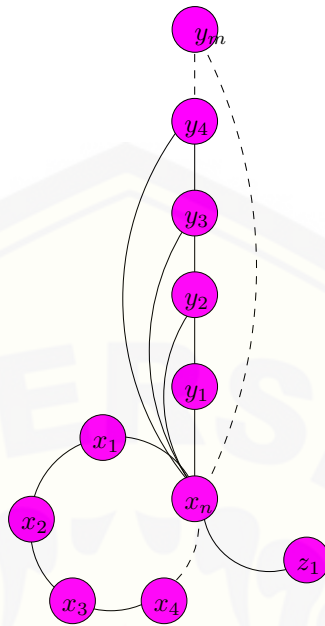
5. Graf tangga tiga-siklus (Azizah, K.M.F.,2012) adalah salah satu family dari graf ladder. Graf tangga tiga-siklus adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan  $TCL_n$  dimana  $V(TCL_n) = \{x_i, y_j, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n + 1\}$  dan  $E(TCL_n) = \{y_j z_j; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_i, x_i z_i, x_i y_{i+1}, x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$ . Gambar 2.7 adalah contoh graf  $TCL_3$ .



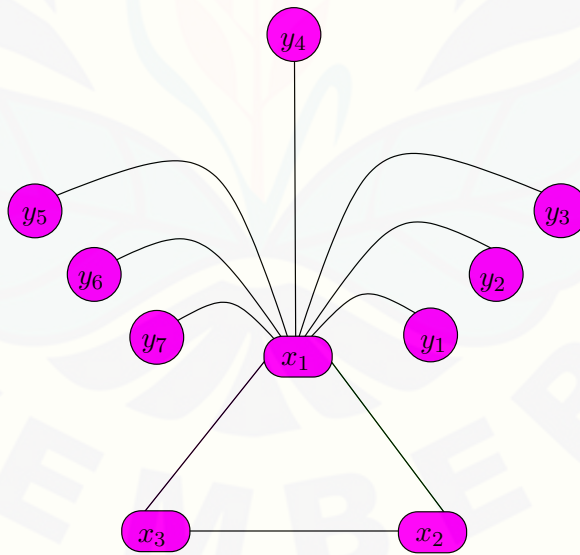
Gambar 2.7 Graf Tangga Tiga-siklus  $TCL_3$

6. Graf Tunas kelapa (Lestari, I.L.,2013)  $CR_{n,m}$  mempunyai himpunan titik  $V(CR_{n,m}) = \{x_i, y_j, z; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$  dan himpunan sisi  $E(CR_{n,m}) = \{x_n x_i, ; i = 1\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n y_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{x_n z\}$ . Gambar 2.8 merupakan graf tunas kelapa  $CR_{n,m}$ .
7. Graf Gunung berapi (Dewi, S.K.R.,2012) dinotasikan dengan  $(\vartheta_n)$  dengan  $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq n$  mempunyai himpunan titik  $V(\vartheta_n) = x_i, y_j; 1 \leq j \leq n$  dan himpunan sisi  $E(\vartheta_n) = x_1 x_2 \cup x_2 x_3 \cup x_1 y_j; 1 \leq j \leq n$  Gambar 2.9 menunjukkan contoh graf Gunung Berapi.



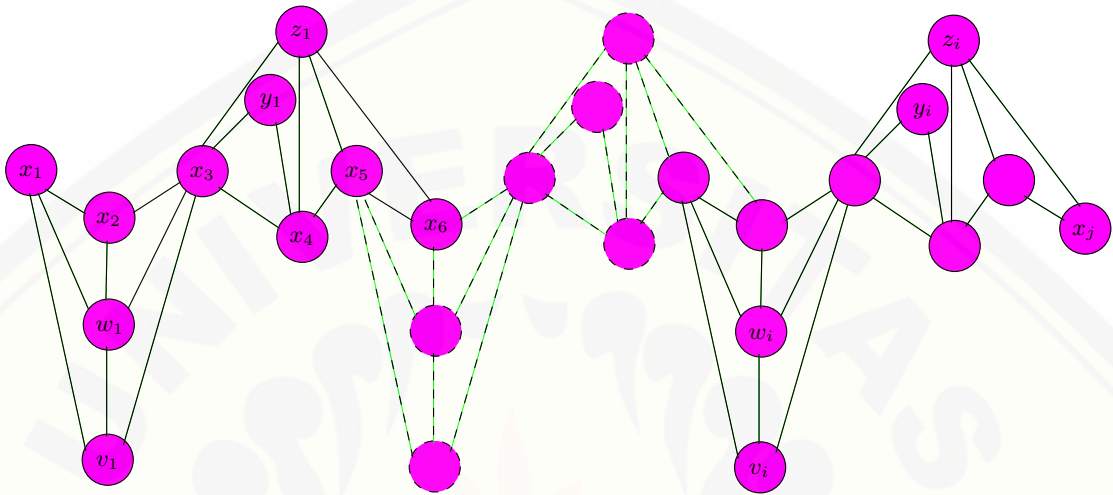


Gambar 2.8 Graf tunas kelapa  $CR_{n,m}$



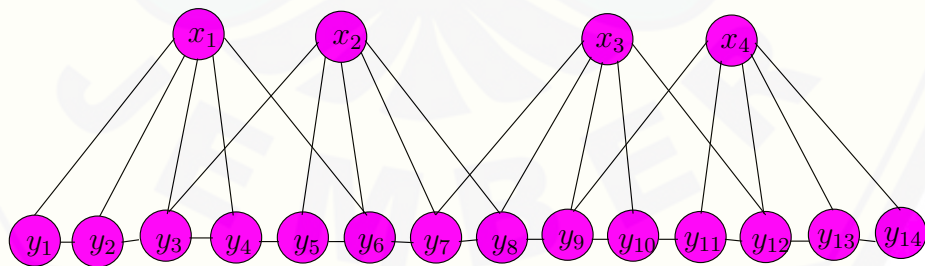
Gambar 2.9 Graf Gunung Berapi

8. Graf Kelelawar (Mukhlis, A.,2012) adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan  $Bat_n$  dimana  $V(Bat_n) = \{v_i, w_i, x_j, y_i, z_i; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4n + 2\}$  dan  $E(Bat_n) = \{v_i w_i, v_i x_{4i-3}, v_i x_{4i-1}, w_i x_{4i-3}, w_i x_{4i-2}, w_i x_{4i-1}, y_i x_{4i-1}, y_i x_{4i}, z_i x_{4i-1}, z_i x_{4i}, z_i x_{4i+1}, z_i x_{4i+2}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_j x_{j+1}; 1 \leq j \leq 4n + 1\}$ . Gambar 2.10 merupakan graf kelelawar  $Bat_n$ .



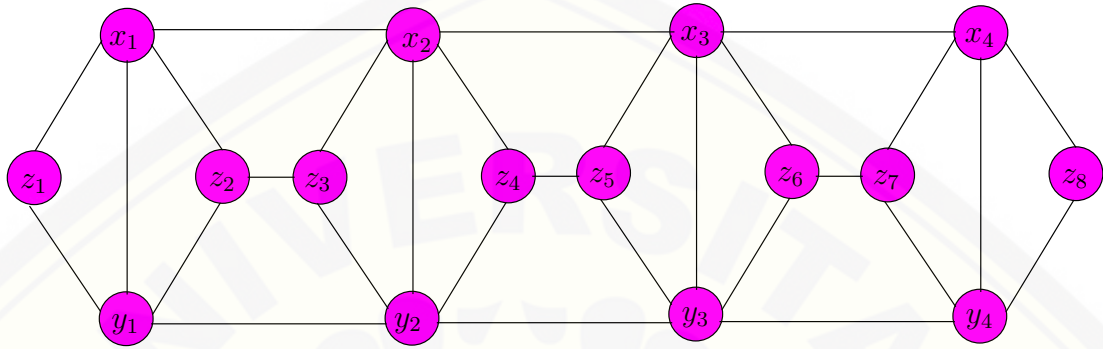
Gambar 2.10 Graf Kelelawar  $Bat_n$

9. Graf Gunung (Fajriatin, A.,2011) yang dinotasikan dengan  $M_{2n}$  adalah sebuah graf dengan himpunan *vertex*,  $|V| = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq 2n \text{ dan } 1 \leq j \leq 6n + 2, n \in \mathbb{N}\}$  dan himpunan *edge*,  $|E| = \{x_i y_{3i-2}, x_i y_{3i+3}$  untuk  $i$  ganjil,  $x_i y_{3i-3}, x_i y_{3i+2}$  untuk  $i$  genap,  $x_i y_{3i-1}, x_i y_{3i}, x_i y_{3i+1}$  untuk  $i$  sebarang,  $1 \leq i \leq 2n$  dan  $y_j y_{j+1}, 1 \leq j \leq 6n + 1\}$ . Gambar 2.11 merupakan contoh Graf Gunung,  $M_{2n}$ .



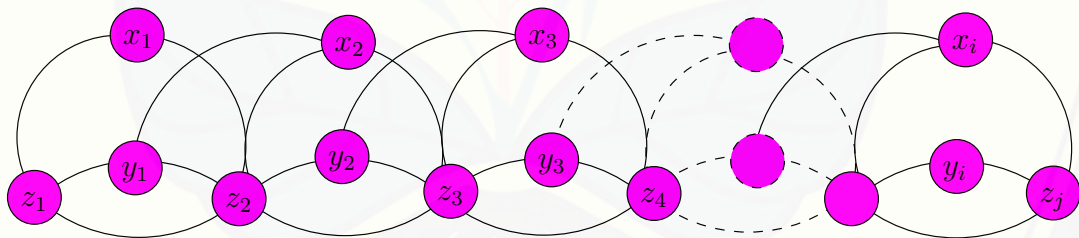
Gambar 2.11 Graf Gunung  $M_{2n}$  dengan  $n = 2, M_4$

10. Graf Diamond Ladder (Syakdiyah, L.,2011) adalah family dari graf Ladder. Graf ini graf yang dinotasikan dengan  $Dl_n$  dimana  $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2n\}$  dan  $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; 2 \leq j \leq 2n - 2 \text{ genap}\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$ . Gambar 2.12 adalah contoh graf  $Dl_4$ .



Gambar 2.12 Graf Diamond Ladder  $Dl_4$

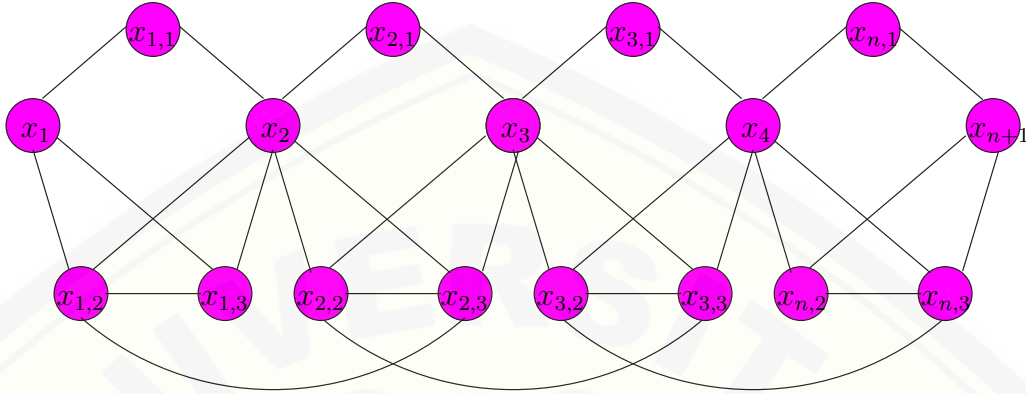
11. Graf Ulat Sutra(Dian,A.H.,2014)adalah satu graf yang menarik yang dikembangkan dari graf Snake. Graf Ulat sutra dinotasikan dengan  $Sw_n$  dimana himpunan titik  $Sw_n$  adalah  $V(Sw_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n + 1\}$  dan  $E(Sw_n) = \{x_i z_i, x_i z_{i+1}, z_i z_{i+1}, y_i z_i, y_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ . Gambar 2.13 merupakan graf Ulat sutra  $Sw_n$ .



Gambar 2.13 Graf Ulat Sutra  $Sw_n$

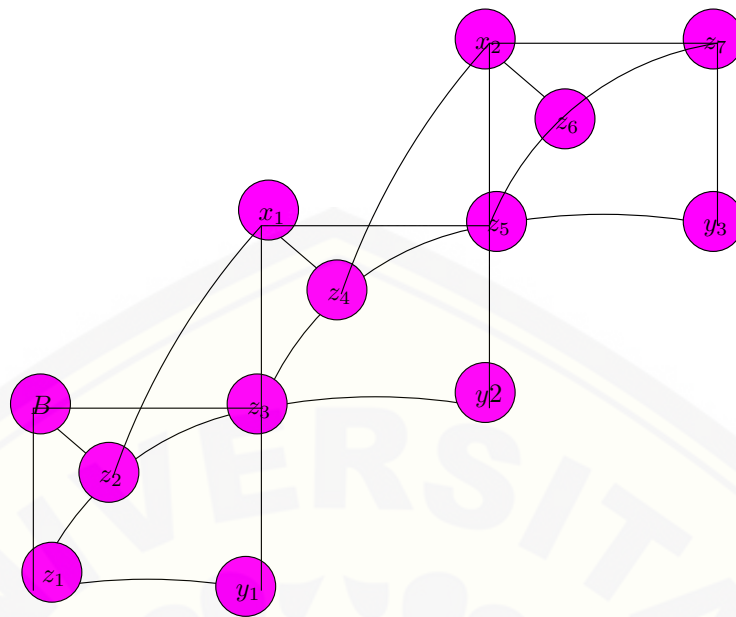
12. Graf Rantai Pentagon(Ermita,R.A.,2014)adalah salah satu graf yang dikembangkan dari graf Siklis dan graf Snake. Graf *Snake*, yang berupa *expand* dari graf pentagon, adalah graf yang salah satu titiknya dipakai bersama dengan graf lainnya. Graf Rantai Pentagon adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan  $\mathfrak{P}\mathfrak{C}_n$  dimana titik (vertex) adalah  $V\mathfrak{P}\mathfrak{C}_n = \{x_i, x_{i,j}; 1 \leq i \leq$

$n; 1 \leq j \leq 3\}$  dan Sisi (edge) adalah  $E\mathfrak{PC}_n = \{x_i, x_{i,j}; x_{i,j}, x_{i+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 3\} \cup \{x_{i,2}, x_{i,3}; x_{i,2}, x_{i+1,3}; 1 \leq i \leq n\}$ . Gambar 2.14 merupakan graf rantai pentagon  $\mathfrak{PC}_n$ .



Gambar 2.14 Graf Rantai Pentagon  $\mathfrak{PC}_n$

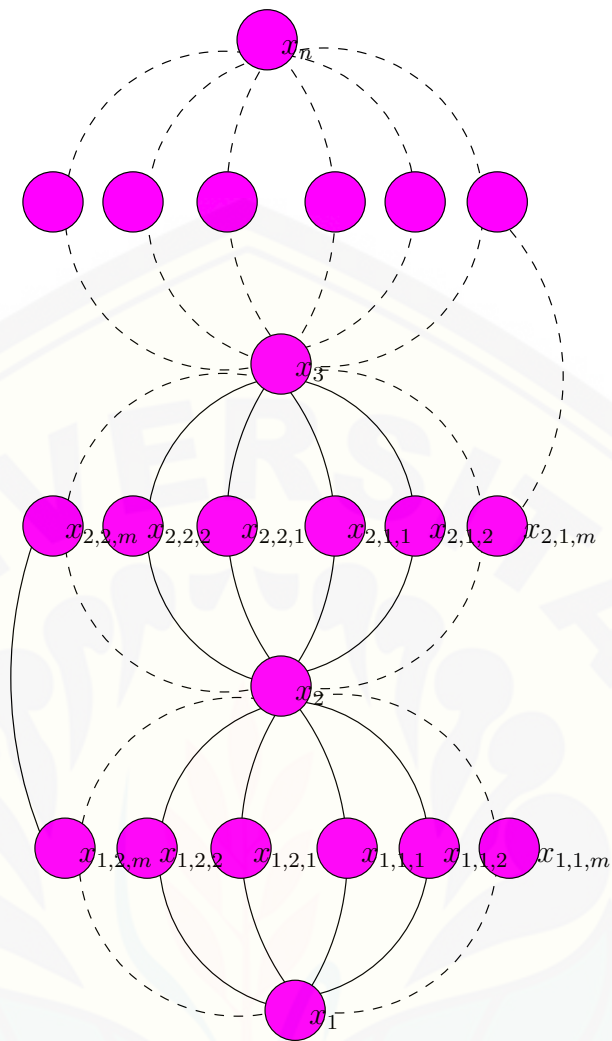
13. Graf Tribun (Muhlisatul, M,2014) adalah sebuah graf yang dikembangkan dari graf ular (*Snake*) dan dinotasikan dengan  $\mathfrak{T}_n$ . Bentuk dari graf Tribun dapat dilihat pada gambar 2.15. Graf Tribun memiliki himpunan *vertex*,  $\mathfrak{T}_n$  dimana titik (*vertex*) adalah  $V\mathfrak{T}_n = \{x_i, z_j, y_i, B; 1 \leq i \leq n \text{ dan } 1 \leq j \leq n\}$  dan Sisi (edge) adalah  $E\mathfrak{T}_n = \{Bz_1, Bz_2, Bz_3 \cup z_j z_{j+1}; 1 \leq j \leq n \cup x_i z_{2i+1}; 1 \leq i \leq n \cup x_i z_{2i+3}; 1 \leq i \leq n \cup y_i z_{2i+1}; 1 \leq i \leq n \cup y_i z_{2i-1}; 1 \leq i \leq n\}$
14. Graf Lampion (Robiyatul, A., 2014) adalah salah satu graf yang merupakan famili dari graf buku segitiga. Graf lampion adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan  $\mathcal{L}_{n,m}$  dimana  $V(\mathcal{L}_{n,m}) = \{x_i, x_{i,1,j}, x_{i,2,j}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\}$  dan  $E(\mathcal{L}_{n,m}) = \{x_i x_{i,1,j}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_i x_{i,2,j}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,1,j} x_{i+1,1,j}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,2,j} x_{i+1,2,j}; 1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{i,1,1} x_{i,2,1}; 1 \leq i \leq n+1\}$ . Berikut ini gambar 2.16 adalah gambar graf lampion,

Gambar 2.15 Graf Tribun  $\mathfrak{T}_n$ 

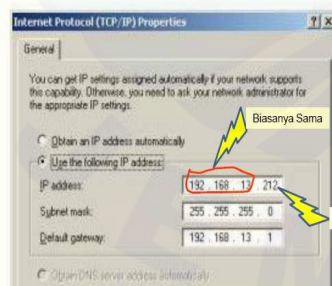
## 2.4 Aplikasi Graf

Teori Graf digunakan dalam kehidupan sehari-hari untuk mendeskripsikan model persoalan dan menggambarkannya secara konkret dan jelas. Selain itu graf juga dipergunakan untuk mempermudah menyelesaikan berbagai macam persoalan- persoalan yang sulit diselesaikan dengan perhitungan biasa. Salah satu contoh aplikasi graf yakni dalam menentukan IP adress yang terdapat dalam suatu topologi jaringan komputer. Terdapat 6 komputer yang terhubung ke sebuah server dengan topologi jaringan star. masing-masing komputer harus diberikan IP adress dan harus bersifat rahasia supaya tidak dimanfaatkan orang lain yang tidak berhak. Untuk memudahkan pendeteksian masalah penomoran IP adress harus diberikan pengkodean secara teratur. Namun demikian apabila ada masalah terdapat jaringan IP adress masing-masing komputer harus dapat dideteksi dengan mudah. Salah satu jalan adalah dengan memberikan tag code pada kabel penghubungnya. Yang mana biasanya dalam IP adress terdapat kode yang bersifat tetap dan berubah yang harus diatur(Dafik, 2008:8). Seperti gambar 2.17

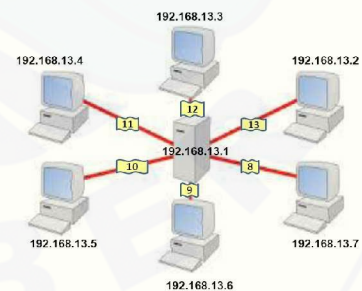




Gambar 2.16 Graf Lampion  $\mathcal{L}_{n,m}$



(a) IP Address



(b) Topologi Star

Gambar 2.17 ip address

## 2.5 Fungsi dan Barisan Aritmatika

Dalam proses menemukan lema, teorema pada pelabelan graf Train Whell membutuhkan materi fungsi dan barisan aritmatika sebagai pengetahuan dasar untuk membuktikannya.

### 2.5.1 Fungsi

Fungsi seringkali dikenal sebagai pemetaan. Fungsi " $f$ " dari himpunan  $A$  ke himpunan  $B$ , ditulis dengan notasi  $f : A \rightarrow B$ , adalah aturan korespondensi yang menghubungkan setiap  $x \in A$  dengan tepat satu anggota  $B$ . Himpunan  $A$  yaitu himpunan yang memuat elemen pertama dari elemen-elemen dalam  $f$ , disebut *domain*  $f$  dan dapat dinyatakan sebagai  $D_f$ . Himpunan  $B$  yaitu himpunan yang memuat elemen kedua dari elemen-elemen dalam  $f$ , disebut *range*  $f$  dan dinyatakan sebagai  $R_f$ . Notasi :  $f : A \rightarrow B$  menunjukkan bahwa  $f$  merupakan fungsi dari  $A$  ke  $B$ , yang sering juga dibaca " $f$  adalah pemetaan dari  $A$  ke  $B$ ", atau " $f$  memetakan  $A$  ke  $B$ ". Jika  $(a, b)$  anggota dari  $f$ , maka  $b = f(a)$  untuk  $(a, b) \in f$

Berikut ini disajikan beberapa fungsi-fungsi khusus.

#### 1. Fungsi Injektif

Suatu fungsi  $f : A \rightarrow B$  disebut fungsi injektif (fungsi satu-satu) jika dan hanya jika untuk tiap  $a_1, a_2 \in A$  dan  $a_1 \neq a_2$  berlaku  $f(a_1) \neq f(a_2)$ .

#### 2. Fungsi Surjektif

Suatu fungsi  $f : A \rightarrow B$  disebut fungsi surjektif atau fungsi onto atau fungsi kedalam jika dan hanya jika  $(R_f = B)$ , atau  $\forall y \in B, \exists x \in A, \ni f(x) = y$ .

#### 3. Fungsi Bijektif

Fungsi  $f : A \rightarrow B$  adalah fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi  $f$  merupakan fungsi injektif dan fungsi surjektif

### 2.5.2 Barisan Aritmatika

Suatu barisan  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$  disebut barisan aritmetika jika selisih dua suku yang berurutan adalah tetap. Barisan dalam  $R$  adalah suatu

fungsi yang menghubungkan setiap bilangan asli  $n = 1, 2, 3, \dots$  dengan tepat satu bilangan real.

Nilai untuk menentukan suku ke- $n$  dari barisan aritmatika. Perhatikan pada contoh ini 2, 7, 12, 17, 19, ... Misalkan  $U_1, U_2, U_3, \dots$  adalah barisan aritmatika, maka:

$$U_1 = 2 = 2 + 5(0)$$

$$U_2 = 7 = 2 + 5 = 2 + 5(1)$$

$$U_3 = 12 = 2 + 5 + 5 = 2 + 5(2)$$

·  
·  
·

$$U_n = 2 + 5(n - 1)$$

Secara umum, jika suku pertama ( $U_1$ ) =  $a$  dan beda suku yang berurutan adalah  $b$  maka dari rumus  $U_n = 2 + 5(n - 1)$  diperoleh 2 adalah  $a$  dan 5 adalah  $b$ . Oleh sebab itu, suku ke- $n$  dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$U_n = a + b(n - 1)$$

Barisan aritmetika yang mempunyai beda positif disebut barisan aritmetika naik, sedangkan jika bedanya negatif disebut barisan aritmetika turun.

$U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$  disebut barisan aritmatika, jika

$$U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} = \text{konstanta.}$$

$$U_n = a + (n - 1)b = bn + (a - b) \rightarrow \text{Fungsi linier dalam } n.$$

### 2.5.3 Aksioma, Lemma, Teorema, Corollary, Konjektur dan Open Problem

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi. Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah lemma dan corollary (akibat). Lemma adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema

lain. Lemma biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan lemma, setiap lemma dibuktikan secara individual. Corollary (akibat) adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan corollary adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain. Konjektur adalah sebuah proposisi yang dipradugakan sebagai hal yang nyata, benar, atau asli, sebagian besarnya didasarkan pada landasan inkonklusif (tanpa simpulan). Konjektur bertentangan dengan hipotesis (oleh karenanya bertentangan pula dengan teori, aksioma, atau prinsip), yang merupakan pernyataan yang mengandung perjanjian menurut landasan yang dapat diterima. Di dalam matematika, konjektur adalah proposisi yang tidak terbukti atau tidak memerlukan bukti atau juga teorema yang dianggap pasti benar adanya. *Open problem* (masalah terbuka atau pertanyaan terbuka) adalah beberapa masalah yang dapat secara akurat dinyatakan, dan belum diselesaikan (tidak ada solusi untuk diketahui).

## 2.6 Pelabelan Graf

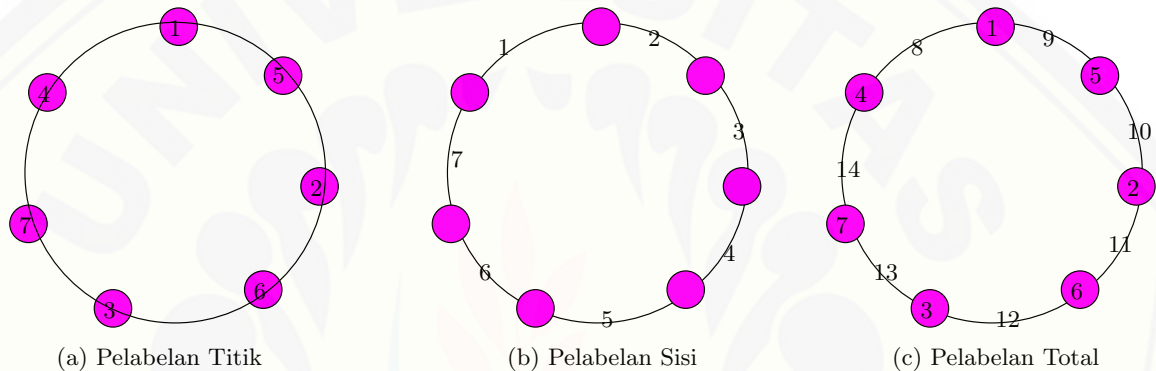
### 2.6.1 Definisi Pelabelan Graf

Dalam mencari fungsi sebuah graf, maka harus diketahui terlebih dahulu pola pelabelan pada graf tersebut. Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadleir (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super. Pada penelitian kali ini penulis akan mengkaji pelabelan titik, pelabelan sisi, dan pelabelan total. Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf (titik dan sisi) ke himpunan bilangan bulat positif. Secara umum, fungsi  $f$  yang memetakan himpunan  $A$  ke dalam  $B$  disebut fungsi satu-satu jika elemen-

elemen yang berbeda dalam  $B$  ditetapkan dengan elemen-elemen yang berbeda dalam  $A$ , atau  $f : A \rightarrow B$  adalah satu-satu jika  $f(a) = f(a')$  maka  $a = a'$ .

Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*).

Berdasarkan gambar 2.18 (a) merupakan contoh pelabelan titik yaitu hanya titik saja yang dilabeli, sedangkan gambar 2.18 (b) menunjukkan pelabelan sisi, dimana hanya sisi graf saja yang dilabeli dan pelabelan total dapat dilihat pada Gambar 2.18 (c), semua titik maupun sisi diberi label.



Gambar 2.18 (a),(b),(c) Jenis-jenis Pelabelan

Pada pelabelan titik, jumlah label dua titik yang menempel pada suatu sisi disebut *bobot sisi*  $w(e)$ . Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka disebut pelabelan titik sisi ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang berbeda dan himpunan bobot sisi dari semua sisi membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan titik sisi anti ajaib (*edge antimagic vertex labelling* (EAVL)).

Bobot sisi pada pelabelan total  $e = uv$ ,  $wt(e)$  adalah suatu harga yang diberikan dengan menjumlahkan label sisi  $e$  dengan label dua titik  $u$  dan  $v$  yang menempel dengan sisi  $e$ , yaitu:  $wt(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v)$ .

Jika semua sisi mempunyai bobot sisi yang sama maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total-sisi-ajaib. Jika semua sisi mempunyai bobot sisi berbeda



yang membentuk barisan aritmatika dengan suku pertama  $a$  dan beda  $d$  maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total sisi anti ajaib (antimagic).

### 2.6.2 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi antimagic

Sebuah pemetaan satu-satu  $f$  dari  $V(G)$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$  disebut pelabelan titik  $(a, d)$ -sisi antimagic jika himpunan bobot sisinya  $w(uv) = f(u) + f(v)$  pada semua sisi  $G$  adalah  $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-1)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$  keduanya adalah bilangan bulat, sedangkan Pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu  $f$  dari  $V(G) \cup E(G)$  ke bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$  sehingga himpunan bobot sisinya  $w(t)(uv) = f(u) + f(v) + f(uv)$  pada semua sisi  $G$  adalah  $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-1)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$  keduanya bilangan bulat. Sebuah pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic disebut pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic jika  $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$  dan  $f(E) = \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$ .

Dengan kata lain, pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada sebuah graf  $G = (V, E)$  adalah pelabelan titik dengan bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p\}$  dan pelabelan sisi dengan bilangan bulat  $\{p+1, p+2, \dots, p+q\}$  dari sebuah graf  $G$  dimana  $p$  adalah banyaknya titik dan  $q$  adalah banyaknya sisi pada graf  $G$ , sedemikian hingga himpunan bobot dari sisinya adalah  $W = \{w(x, y) | xy \in E(G)\} = \{a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-a)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$ , dimana  $\alpha(u)$  adalah label dari titik  $u$ ,  $\alpha(v)$  adalah label dari titik  $v$  dan  $\alpha(uv)$  adalah label dari sisi  $uv$ . Untuk mencari batas atas nilai beda  $d$  pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dapat ditentukan dengan lemma berikut ini seperti (dalam Dafik: 2009).

**Lema 2.6.1.** *Jika sebuah graf  $(p, q)$  adalah pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic maka  $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$*

Misalkan graf  $(p, q)$  adalah pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan pemetaan  $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$ . Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil  $f(u) + f(uv) + f(v) = 1 + (p+1) + 2 = p+4$ . Dapat ditulis:  $p+4 \leq a$

Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi

terbesar yaitu dengan menjumlahkan dua label titik terbesar  $(p-1)$  dan  $p$  dengan satu label sisi terbesar  $(p+q)$ , sehingga diperoleh:  $(p-1) + (p+q) + p = 3p+q-1$ . Akibatnya:

$$\begin{aligned} a + (q-1)d &\leq 3p+q-1 \\ &\leq \frac{3p+q-1-(p+4)}{q-1} \\ &\leq \frac{2p+q-5}{q-1} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dari persamaan (2.1) terbukti bahwa  $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$  sehingga diperoleh  $d$  dari berbagai famili graf.  $\square$

Dafik, Robiyatul pada tahun 2014 menemukan lema yang dapat digunakan untuk mengatakan bahwa lema berikut digunakan untuk menemukan pelabelan total super  $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf untuk jumlah sisi ganjil. Karena lema berikut sangat penting maka disajikan bersama pembuktiannya.

**Lema 2.6.2.** *Misalkan  $\Psi$  merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan  $\Psi = \{c, c+1, c+2, \dots, c+k\}$ , dengan  $k$  genap. Maka terdapat sebuah permutasi  $\Pi(\Psi)$  dari anggota-anggota himpunan  $\Psi$  sehingga  $\Psi + \Pi(\Psi)$  juga merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan yaitu  $\Psi + \Pi(\Psi) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2}\}$ .*

*Bukti.* Misal  $\Psi$  adalah suatu himpunan bilangan berurutan  $\Psi = \{v_i | v_i = c + (i-1), 1 \leq i \leq k+1\}$  dan  $k$  adalah genap. Selanjutnya didefinisikan nilai permutasi  $\Pi(\Psi) = \{w_i | 1 \leq i \leq k+1\}$  dari anggota  $\Psi$  adalah sebagai berikut:

$$w_i = \begin{cases} c + i + \frac{k}{2} - 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq \frac{k}{2} + 1 \\ c + i - (\frac{k}{2} + 2), & \text{jika } \frac{k}{2} + 2 \leq i \leq k + 1 \end{cases}$$

untuk membuktikan lema 2.6.2, langkah pertama yang harus dilakukan adalah mensubstitusikan nilai  $i$  sesuai batasan yang diberikan maka akan diperoleh  $w_i$  sebagai berikut:

Untuk  $1 \leq i \leq \frac{k}{2} + 1$  maka akan diperoleh hasil: untuk  $i = 1$ , maka  $w_1 = c + \frac{k}{2}$ ;

untuk  $i = 2$ , maka  $w_2 = c + \frac{k}{2} + 1$ ; untuk  $i = \frac{k}{2}$ , maka  $w_{\frac{k}{2}} = c + k - 1$ ; ...; untuk  $i = \frac{k}{2} + 1$ , maka  $w_{\frac{k}{2}+1} = c + k$ .

Sedangkan untuk nilai  $\frac{k}{2} + 2 \leq i \leq k + 1$  diperoleh hasil: untuk  $i = \frac{k}{2} + 2$ , maka  $w_{\frac{k}{2}+2} = c$ ; untuk  $i = \frac{k}{2} + 3$ , maka  $w_4 = c + 1$ ; ...; untuk  $i = k$ , maka  $w_k = c + \frac{k}{2} - 2$ ; untuk  $i = k + 1$ , maka  $w_{k+1} = c + \frac{k}{2} - 1$ .

Jika  $\mathfrak{C}$  dinyatakan dalam himpunan  $v_i$  dan  $\Pi(\Psi)$  dinyatakan dalam himpunan  $w_i$  seperti telah disampaikan sebelumnya, maka akan diperoleh:  $\Psi + \Pi(\Psi) = \{v_i + w_i | 1 \leq i \leq k + 1\}$

Berdasarkan substitusi nilai  $i$ , maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{untuk } i = 1 \rightarrow v_1 + w_1 &= c + \left(c + \frac{k}{2}\right) \\ &= 2c + \frac{k}{2} \\ \text{untuk } i = 2 \rightarrow v_2 + w_2 &= (c + 1) + \left(c + 2 + \frac{k}{2} + 1\right) \\ &= 2c + \frac{k}{2} + 2 \\ &\dots \\ \text{untuk } i = \frac{k}{2} \rightarrow v_{\frac{k}{2}} + w_{\frac{k}{2}} &= \left(c + \frac{k}{2} - 1\right) + \left(c + \frac{3k}{2} - 2\right) \\ &= 2c + \frac{3}{2}k - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{untuk } i = \frac{k}{2} + 1 \rightarrow v_{\frac{k}{2}+1} + w_{\frac{k}{2}+1} &= (c + \frac{k}{2}) + (c + k) \\
 &= 2c + \frac{3k}{2} \text{ untuk } i = \frac{k}{2} + 2 \rightarrow \\
 v_{\frac{k}{2}+2} + w_{\frac{k}{2}+2} &= (c + \frac{k}{2} + 1) + (c) \\
 &= 2c + \frac{k}{2} + 1 \dots \\
 \text{untuk } i = k \rightarrow v_k + w_k &= (c + k - 1) + (c + \frac{k}{2} - 2) \\
 &= 2c + \frac{3}{2} - 3 \\
 \text{untuk } i = k + 1 \rightarrow v_{k+1} + w_{k+1} &= (c + k) + (c + \frac{k}{2} - 1) \\
 &= 2c + \frac{3k}{2} - 1
 \end{aligned}$$

Jika diurutkan mulai dari nilai terkecil hingga terbesar, maka diperoleh:  $\{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \dots, 2c + \frac{3k}{2}\}$ . Dengan demikian rumusan tersebut terbukti benar.  $\square$

Secara sederhana lema tersebut dapat diperlihatkan berdasarkan pola seperti disajikan oleh gambar 2.19 berikut.

$v_i$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$w_i$	25	26	27	28	29	30	20	21	22	23	24
	30	32	34	36	38	40	31	33	35	37	39

Gambar 2.19 Pola barisan bilangan dengan selisih tiap suku adalah 1

Selanjutnya teorema 2.6.1 digunakan untuk membuktikan pelabelan super  $(a, 1)$  untuk gabungan sebuah graf  $G_i$  dari graf tunggal yang sudah diketahui.

**Teorema 2.6.1.** *Misalkan  $G_s$  untuk  $s = 1, 2, \dots, m$  adalah graf dengan jumlah titik  $p$  dan jumlah sisi  $q$  dan memiliki pelabelan super  $(a, 1)$ -EAT. Maka, gabungan saling lepas dari  $\cup_{s=1}^m G_s$  juga memiliki super  $(b, 1)$ -EAT.*

**Bukti.** Misalkan  $G_s, s = 1, 2, \dots, m$  adalah sebuah graf yang memiliki  $p$  titik dan  $q$  sisi. Perlu diketahui bahwa  $G_i$  tidak harus isomorfis dengan  $G_j$  untuk

$i = j$ . Misalkan untuk setiap  $G_s, s = 1, 2, \dots, m$  memiliki sebuah pelabelan super  $(a, 1)$ -EAT berdasarkan  $f_s$ , sedemikian hingga:

$$\begin{aligned} f_s &= V(G_s) \rightarrow \{1, 2, \dots, p\} \\ &= E(G_s) \rightarrow \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\} \end{aligned}$$

dan  $\{f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv); uv \in E(G_s)\} = \{a, a + 1, \dots, a + q - 1\}$

Definisi pelabelan  $f$  untuk semua titik dan sisi dari  $\cup_{s=1}^m G_s$  adalah sebagai berikut:


$$f(x) = \begin{cases} m[(f_1)_s(x) - 1] + s, & \text{jika } x \in V(G_s) \\ m(f_1)_s(x) + 1 - s, & \text{jika } x \in E(G_s) \end{cases}$$

Bobot total dari gabungan  $\cup_{s=1}^m G_s$  adalah  $\{f(u) + f(v) + f(uv) : uv \in E(\cup_{s=1}^m G_s)\}$  sama dengan  $\{m(a - 2) + 2, m(a - 2) + 3, \dots, m(a + q - 2) + 1\}$

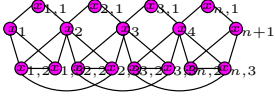
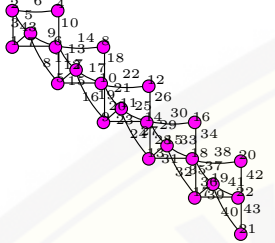
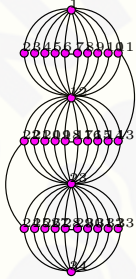
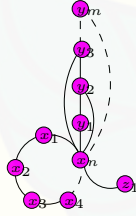
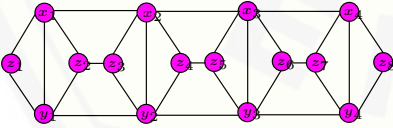
## 2.7 Hasil-Hasil Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic pada Graf Diskonektif

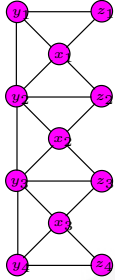
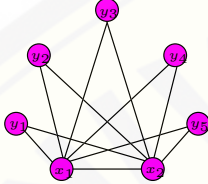
Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf konektif dan diskonektif yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Rangkuman yang tersedia pada bagian ini merupakan hasil penelitian yang diterbitkan sejak tahun 2010. Sedangkan hasil pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf konektif dan diskonektif yang ditemukan pada tahun sebelumnya dapat dilihat pada lampiran.

Tabel 2.1: Ringkasan pelabelan total super  $(a, d)$ -edge antimagic pada graf konektif.

Notasi Graf	$d$	Hasil	Open Problem
$(Sw_n)$ ( <i>Graf Ulat Sutra</i> ) 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$  (Dian, A.H,2014)	-
$V\mathfrak{P}e_n$ ( <i>Graf Rantai Pentagon</i> )	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$	



Notasi Graf	$d$	Hasil	Open Problem
		(Ermita, A.R,2014)	-
$\mathcal{T}_n$ (Graf Tribun) 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$  (Muhlisatul, M,2014)	-
$\mathcal{L}_{n,m}$ (Graf Lampion) 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$  (Robiyatul, A,2014)	-
$(S_n)$ (Graf Siput)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ (Dewi, N.R,2013)	-
$CR_{n,m}$ (Tunas Kelapa) 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}; n \geq 3; m \geq 2$  (Lestari, I.L, 2013)	-
$U_{m,n}$ (Graf UFO)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\} ; n \geq 1; m \geq 1$ (Umilasari, R,2013)	-
$DL_n$ (Diamond) 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\} ; n \geq 2$  (L.Sya'diyah, 2011)	-
$St_n$ (Graf Tangga)	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 2$	-

Notasi Graf	$d$	Hasil	Open Problem
		(Aprilia, I, 2011)	-
$Bt_n$ ( <i>Buku segitiga</i> ) 	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$  (F.E.Chandra, 2011)	-

Tabel 2.2: Ringkasan pelabelan total super  $(a, d)$ -edge anti-magic pada graf diskonektif.

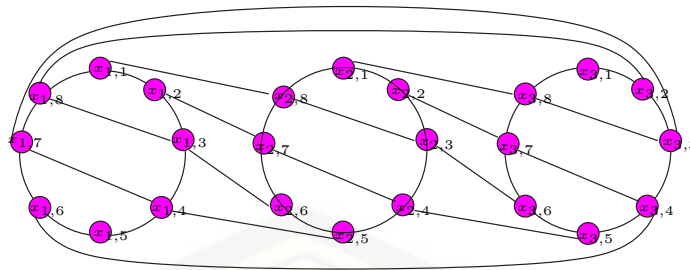
Notasi Graf	$d$	Hasil	Open Problem
$(Sw_n)$ <i>(Ulat Sutera)</i>	$d < 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ $m \geq 3$ ganjil (Dian, A.H.,2014)	
$V\mathfrak{P}e_n$ <i>(Rantai Pentagon)</i>	$d < 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ $m \geq 3$ ganjil (Ermita, A.R.,2014)	
$\mathfrak{T}_n$ <i>(Tribun)</i>	$d < 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ $m \geq 3$ ganjil (Muhlisatul, M,2014)	
$\mathcal{L}_{n,m}$ <i>(Lampion)</i>	$d < 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \geq 1$ $m \geq 3$ ganjil (Robiyatul, A,2014)	
$kP_{(n,2)}$ <i>(Petersen)</i>	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $k, n$ ganjil (Indayani.D.V , 2010)	jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $k, n$ genap

Notasi Graf	$d$	Hasil	Open Problem
$mF_{(n,k)}$ ( <i>Firecracker</i> )	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m \geq 2$ , $n \geq 2$ dan $k \geq 3$ (Z.Abidin , 2010)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jika <math>d \in \{0, 2\}</math> untuk <math>m, n</math> genap dan <math>k \geq 3</math></li> <li>• jika <math>d \in \{1, 3\}</math> untuk <math>m \geq 2</math> <math>n</math> ganjil dan <math>k \geq 3</math></li> </ul>
$(sCR_{n,m})$ ( <i>Tunas Kelapa</i> )	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $n \in \mathbb{N}; m \geq 2$ , dan $1 \leq k \leq 1$ (I.L.Lestari,2013)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jika <math>s</math> ganjil dimana <math>s \geq 3; n \in \mathbb{N}</math></li> </ul>
$m\mathcal{L}_{(i,j,k)}$ ( <i>Lobster Graph</i> )	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2, 3\}$ untuk $m \geq 3$ , $1 \leq i \leq n$ , $j = 2$ , dan $k = 1$ (R.Raty Rahmad , 2010)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jika <math>d = 3</math> untuk <math>m \geq 3</math> ganjil dan <math>n \geq i \geq 2</math> genap</li> <li>• jika <math>d \in \{1, 3\}</math> untuk <math>m \geq 3</math> ganjil dan <math>n \geq i \geq 2</math> ganjil</li> <li>• jika <math>d \in \{1, 3\}</math> untuk <math>m \geq 3</math> genap dan <math>n \geq i \geq 2</math></li> </ul>
$mE_n$ ( <i>m copies of graph E</i> )	$d < 4$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ , ganjil $n \geq 3$ (R.Deviyana , 2011)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jika <math>d = 1</math> untuk <math>m \geq 3</math> dan <math>n \geq 3</math> ganjil</li> <li>• jika <math>d = 3</math> untuk (<math>m \geq 3</math> dan <math>n \geq 3</math>) ganjil</li> <li>• jika <math>d = 3</math> untuk (<math>m \geq 3</math> dan <math>n \geq 3</math>) genap</li> </ul>
$sW_0(3, j, 2)$ ( <i>m copies of Generalized web</i> )	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil dan $s$ ganjil (Y. Anggraeni , 2011)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jika <math>d \in \{0, 1, 2\}</math> untuk <math>1 \leq j \leq m</math> genap dan <math>1 \leq k \leq s</math> genap</li> </ul>
$nDl_n$ ( <i>m copies of</i> )	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil $d \in \{1\}$ untuk $m \geq 2$ dan	<ul style="list-style-type: none"> <li>• jika <math>d \in \{0, 2\}</math> untuk <math>1 \leq j \leq m</math> genap</li> </ul>

Notasi Graf	$d$	Hasil	Open Problem
$graph\ Diamond$ )		$m$ sembarang (L. Syakdiyah, 2011)	
$nM_n$ ( $m$ copies of $graph\ gunung$ )	$d < 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil $d \in \{1\}$ untuk $m \geq 2$ dan $m$ sembarang (A. Fajriatin, 2011)	• jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $1 \leq j \leq m$ genap
$mBt_n$ ( $m$ copies of $triangular\ book$ )	$d \leq 3$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil dan $n \geq 1$ (F. E. Chandra, 2011)	• jika $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ genap dan $n \geq 1$
$mC_n^k \cup (\mu - 1)$ $C_n \cup \mu C_n^3$ ( cycle dengan $busur$ )	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $\mu \geq 1$ , $(\mu - 1) \leq m \leq \mu, n \geq 7$ dan $n$ ganjil (Y. Listiana, 2011)	• jika $d \in \{1\}$ untuk $\mu \geq 1, \mu - 1 \leq m \leq \mu$ , $m \neq \mu, n \geq 7$
$mSt_n$ ( $m$ copies of $stair\ graphs$ )	$d \leq 2$	$d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 3$ ganjil $n \geq 2$ $d \in \{0, 1, 2\}$ untuk $m \geq 2$ sembarang $n \geq 2$ (I. Aprilia, 2011)	• jika $d \in \{0, 2\}$ untuk $m \geq 2$ genap dan $n \geq 2$

## 2.8 Graf Roda Tank $Tw_{m,n}$

Graf Roda Tank adalah salah satu graf yang merupakan famili dari graf cycle. Graf ini merupakan salah satu contoh graf *Well-Defined* yang masih belum ditemukan pelabelannya. Ide munculnya graf Roda Tank ini berasal dari pengembangan graf cycle yang saling dihubungkan dan ditambahkan sisi pada salah satu ujungnya, sehingga sisi tersebut menghubungkan antara satu graf dengan graf lainnya. Graf Roda Tank adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan  $Tw_{m,n}$  dimana  $V(Tw_{m,n}) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ .  $E(Tw_{m,n}) = \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n}x_{i,1}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,n-j+3}; 1 \leq i \leq m, 3 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{1,n-j+2}x_{m,j}; 2 \leq j \leq \frac{n}{2}\}$



Gambar 2.20 Graf Roda Tank

## 2.9 Berpikir Tingkat Tinggi

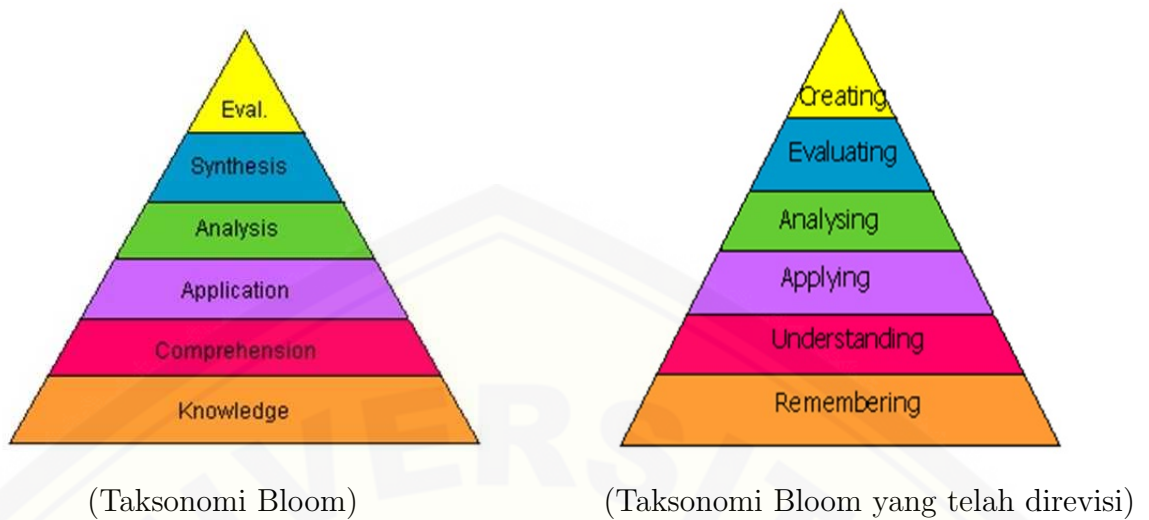
Penggunaan keterampilan berpikir tingkat tinggi ini dalam pelabelan total super  $(a,d)$ -EATL pada graf Train Whell untuk mengetahui hubungan tahapan taksonomi bloom pada proses menemukannya lema, teorema, dan algoritmanya. Berpikir adalah aktifitas mencurahkan daya pikir untuk maksud tertentu. Berpikir adalah identitas yang memisahkan status kemanusiaan manusia dengan lainnya. Karenanya sejauhmana manusia pantas disebut manusia dapat dibedakan dengan sejauhmana pula manusia tersebut menggunakan pikirannya. Berpikir menurut Santrock (2008) Berpikir melibatkan kegiatan memanipulasi dan mentransformasi informasi dalam memori. Kita berpikir untuk membentuk konsep, menalar, berpikir secara kritis membuat keputusan, berpikir secara kreatif dan memecahkan masalah. Berpikir tingkat tinggi (Higher Order Thinking Skill) termasuk juga berpikir kritis, berpikir logika, refleksi, metakognisi, dan berpikir kreatif. Berpikir tingkat tinggi ini berkaitan dengan taksonomi bloom yang dimulai dari tahapan menganalisis, evaluasi dan menciptakan.

Taksonomi Bloom meliputi: Pengetahuan, Pemahaman, Aplikasi, Analisis, Sintesis, dan Evaluasi. Yang telah direvisi menjadi tahapan Taksonomi Bloom yang baru yakni: mengingat, memahami, menerapkan, menganalisis, mengevaluasi, mengkreasi. Seperti pada gambar dibawah ini.

Berikut ini adalah penjelasan dan pilihan kata kerja kunci dari ranah kognitif yang telah direvisi: (Utari, R :10)

1. Mengingat adalah Kemampuan menyebutkan kembali informasi/ pengetahuan yang tersimpan di dalam ingatan. Kata kerja kuncinya: mendefinisikan, menyusun daftar, menjelaskan, mengingat, mengenali, menemukan





Gambar 2.21 Tahapan Taksonomi Bloom

kembali, menyatakan, mengulang, mengurutkan, menamai, menempatkan, menyebutkan.

2. Memahami adalah Kemampuan memahami instruksi dan menegaskan pengertian/ makna ide atau konsep yang telah diajarkan baik dalam bentuk lisan, tertulis maupun grafik/ diagram. Kata kerja kuncinya: Menerangkan, menjelaskan, menterjemahkan, menguraikan, mengartikan, menafsirkan, menginterpretasikan, mendiskusikan, menyeleksi, mendeteksi, melaporkan, menduga, mengelompokkan, memberi contoh, merangkum, menganalogikan, mengubah, memperkirakan.
3. Menerapkan adalah Kemampuan melakukan sesuatu dan mengaplikasikan konsep dalam situasi tertentu. Kata kerja kuncinya: memilih, menerapkan, melaksanakan, menggunakan, mendemonstrasikan, memodifikasi, menunjukkan, membuktikan, menggambarkan, memprogramkan, mempraktekkan.
4. Menganalisis adalah Kemampuan memisahkan konsep kedalam beberapa komponen dan menghubungkan satu sama lain untuk memperoleh pemahaman atas konsep tersebut secara utuh. Kata kerja kuncinya: mengkaji ulang, membedakan, membandingkan, memisahkan, menghubungkan, me-

nunjukkan hubungan antara variabel, memecah menjadi beberapa bagian, menyisihkan menjadi beberapa bagian, mengorganisir, mengkerangkakan.

5. Mengevaluasi adalah Kemampuan menetapkan derajat sesuatu berdasarkan norma, kriteria atau patokan tertentu. Kata kerja kuncinya: menilai, mengevaluasi, menjustifikasi, mengecek, mengkritik, memprediksi, membenarkan, menyalahkan, menyeleksi.
6. Mengkreasi adalah Kemampuan memadukan unsur-unsur menjadi suatu bentuk yang utuh dan koheren, atau membuat sesuatu yang orisinal. Kata kerja kuncinya: merakit, merancang, menemukan, menciptakan, memperoleh, mengembangkan, memformulasikan, membangun, membentuk, membuat, melakukan inovasi, mendesain, menghasilkan karya.

### 2.9.1 Berpikir Tingkat Tinggi dalam Pelabelan Total Super Sisi Antimagic

Penggunaan keterampilan berpikir tingkat tinggi dalam pelabelan Total Super Sisi Antimagic  $G$  adalah untuk mengetahui hubungan tahapan taksonomi Bloom pada proses penemuan rumus fungsi serta teorema baru pada graf  $G$ .

Berikut ini adalah hubungan tahapan taksonomi Bloom terhadap pelabelan pada graf  $G$ , yaitu:

1. Mengingat

Pada tahap ini, yang dilakukan adalah mengingat kembali dasar-dasar graf dan mengenali graf yang akan di bangun.

2. Memahami

Pada tahap ini, yang dilakukan adalah memahami kesesuaian graf dan definisi dari graf tersebut.

3. Menerapkan

Pada tahap ini, yang dilakukan adalah menggunakan definisi, lemma, dan teorema yang telah dibuktikan dan menerapkan batas atas yang ada pada graf  $G$ .

#### 4. Menganalisis

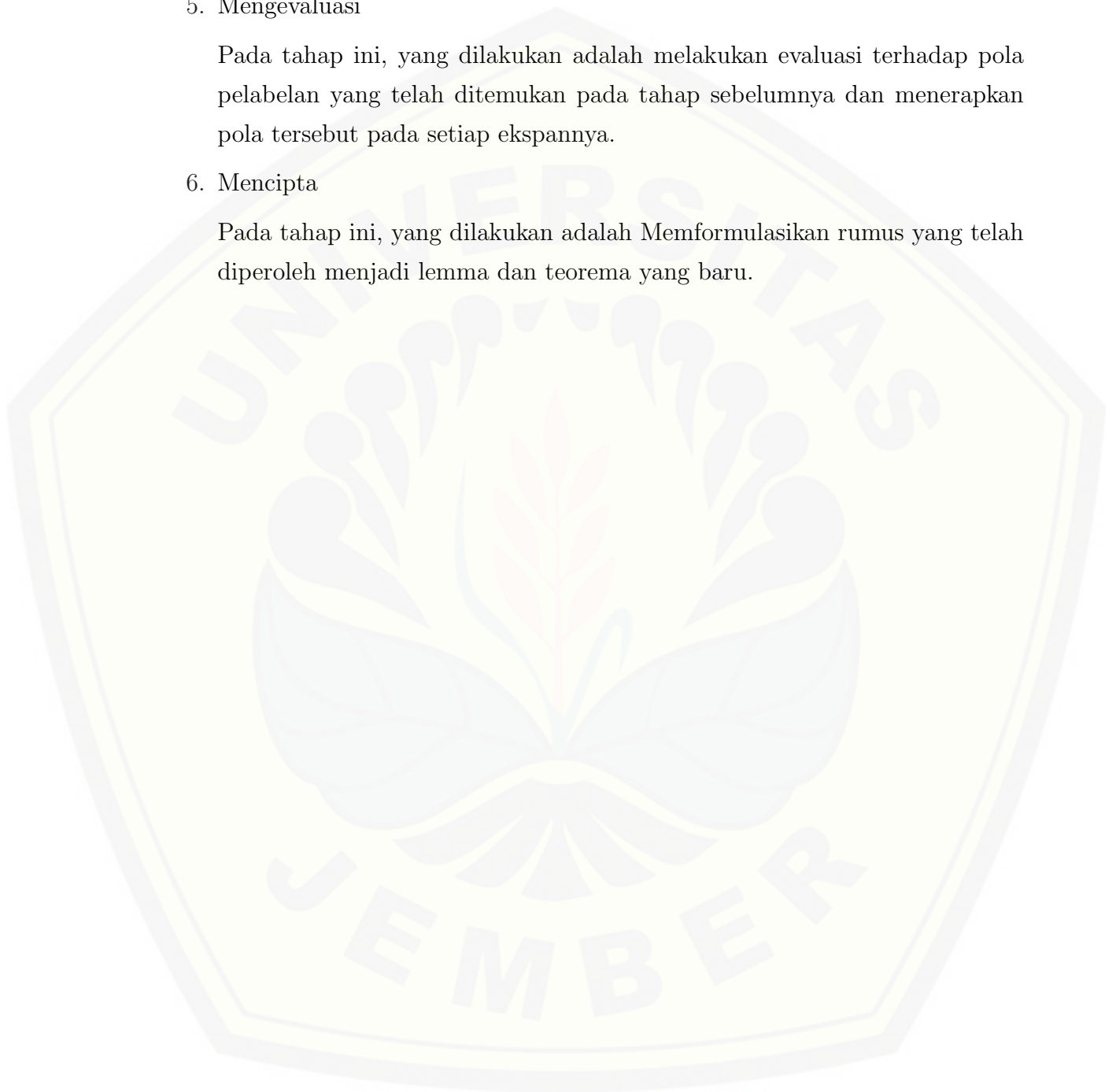
Pada tahap ini, yang dilakukan adalah menganalisis pelabelan graf berpola pada tunggal maupun gabungannya.

#### 5. Mengevaluasi

Pada tahap ini, yang dilakukan adalah melakukan evaluasi terhadap pola pelabelan yang telah ditemukan pada tahap sebelumnya dan menerapkan pola tersebut pada setiap ekspanya.

#### 6. Mencipta

Pada tahap ini, yang dilakukan adalah Memformulasikan rumus yang telah diperoleh menjadi lemma dan teorema yang baru.



## BAB 3. METODE PENELITIAN

### 3.1 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deskriptif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan aksioma atau teorema yang telah ada, kemudian diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Graf Roda Tank baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya. Selain itu penelitian ini juga menggunakan tahapan-tahapan yang terdapat di dalam taksonomi Bloom yaitu mengingat, mengerti, mengaplikasikan, menganalisa, mengevaluasi, dan menciptakan. Dalam penelitian ini, terlebih dahulu akan ditentukan nilai beda  $(d)$  pada graf Roda Tank, selanjutnya nilai  $d$  tersebut diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank. Jika terdapat pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank tersebut dengan menggunakan metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pola umumnya. Dalam menentukan setiap langkah pada pelabelan ini akan dikaitkan dengan 6 tahapan taksonomi Bloom untuk mencapai *Higher Order Thinking Skill* (HOTS).

Langkah selanjutnya adalah menentukan nilai beda  $(d)$  pada gabungan saling lepas graf Roda Tank, selanjutnya nilai  $d$  tersebut diterapkan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf Roda Tank. Jika terdapat pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, maka akan dirumuskan bagaimana pola pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan saling lepas graf Roda Tank tersebut dengan menggunakan metode yang sama untuk menentukan pola umumnya. Tahapan yang sama dengan menggunakan taksonomi Bloom juga diterapkan pada pelabelan total super  $(a, d)$ -EATL gabungan saling lepas graf Roda Tank ini hingga mencapai *Higher Order Thinking Skill* (HOTS).

### 3.2 Definisi Operasional

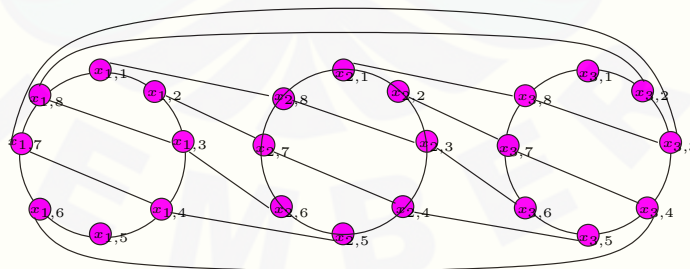
Definisi operasional variabel digunakan untuk memberikan gambaran secara sistematis dalam penelitian dan untuk menghindari terjadinya perbedaan pengertian makna. Definisi operasional variabel yang dimaksud adalah sebagai berikut:

#### 3.2.1 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -Sisi Antimagic

Misal  $p = |V|$  dan  $q = |E|$  maka pelabelan total  $(a, d)$ -sisi antimagic adalah sebuah pemetaan satu-satu  $f$  dari  $V(G) \cup E(G)$  ke bilangan bulat  $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$  sehingga himpunan bobot sisinya  $w(uv) = f(u) + f(v) + f(w)$  pada semua sisi  $G$  adalah  $\{a, a + d, \dots, a + (q - 1)d\}$  untuk  $a > 0$  dan  $d \geq 0$  adalah bilangan bulat. Sebuah pelabelan total  $(a, d)$ - sisi antimagic disebut pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic jika  $f(V) = \{1, 2, 3 \dots p\}$  dan  $f(E) = \{p + 1, p + 2, \dots, p + q\}$ .

#### 3.2.2 Graf Roda Tank $Tw_{m,n}$

Graf Roda Tank adalah salah satu graf yang merupakan famili dari graf cycle. Graf ini merupakan salah satu contoh graf *Well-Defined* yang masih belum ditemukan pelabelannya. Ide munculnya graf Roda Tank ini berasal dari pengembangan graf cycle yang saling dihubungkan dan ditambahkan sisi pada salah satu ujungnya, sehingga sisi tersebut menghubungkan antara satu graf dengan graf lainnya. Graf Roda Tank adalah sebuah graf yang dinotasikan dengan  $Tw_{m,n}$  dimana  $V(Tw_{m,n}) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ .  $E(Tw_{m,n}) = \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{x_{i,n}x_{i,1}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,n-j+3}; 1 \leq i \leq m, 3 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}; 1 \leq i \leq m - 1, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{1,n-j+2}x_{m,j}; 2 \leq j \leq \frac{n}{2}\}$

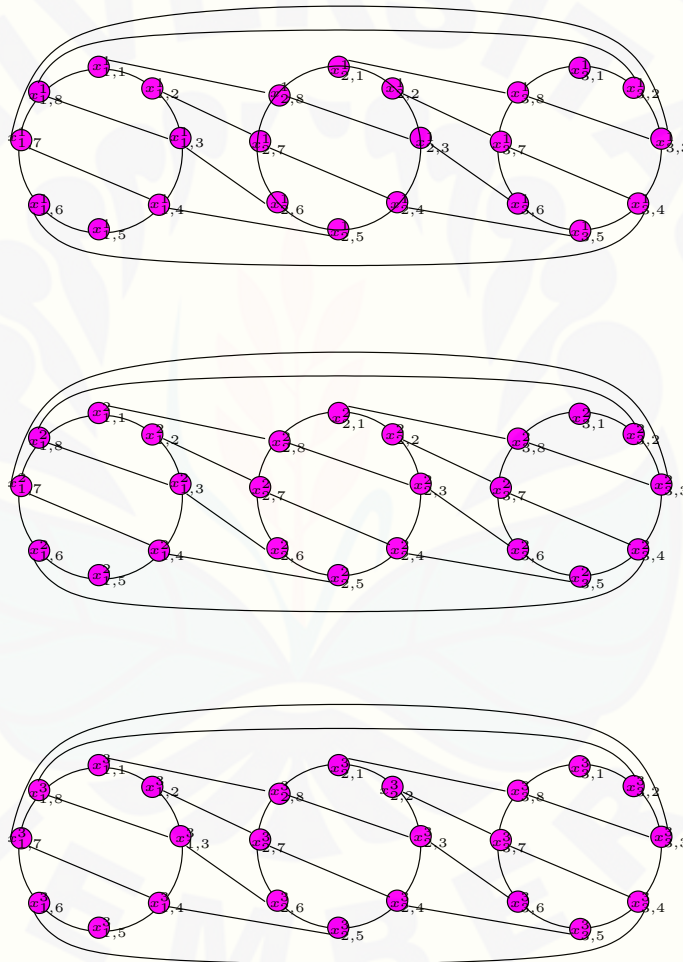


Gambar 3.1 Graf Roda Tank



**3.2.3 Gabungan Saling Lepas Graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$**

Gabungan saling lepas Graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  didefinisikan sebagai gabungan diskonektif dari sebanyak  $c$  salinan graf Roda Tank yang mempunyai himpunan titik  $V(cTw_{m,n}) = \{x_{i,j}^c; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ .  $E(cTw_{m,n}) = \{x_{i,j}^c x_{i,j+1}^c; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n}^c x_{i,1}^c; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{i,j}^c x_{i,n-j+3}^c; 1 \leq i \leq m, 3 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{i,j}^c x_{i+1,n-j+1}^c; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{1,n-j+2}^c x_{m,j}^c; 2 \leq j \leq \frac{n}{2}\}$ . Dalam penelitian ini peneliti akan membatasi pada  $Tw_{m,n}$  untuk  $m \geq 4$ ,  $n \geq 2$ , dan  $c \geq 3$ . Gambar 3.2 adalah gabungan saling lepas graf Roda Tank dengan  $c = 3$



Gambar 3.2 Graf Roda Tank  $3Tw_{8,3}$

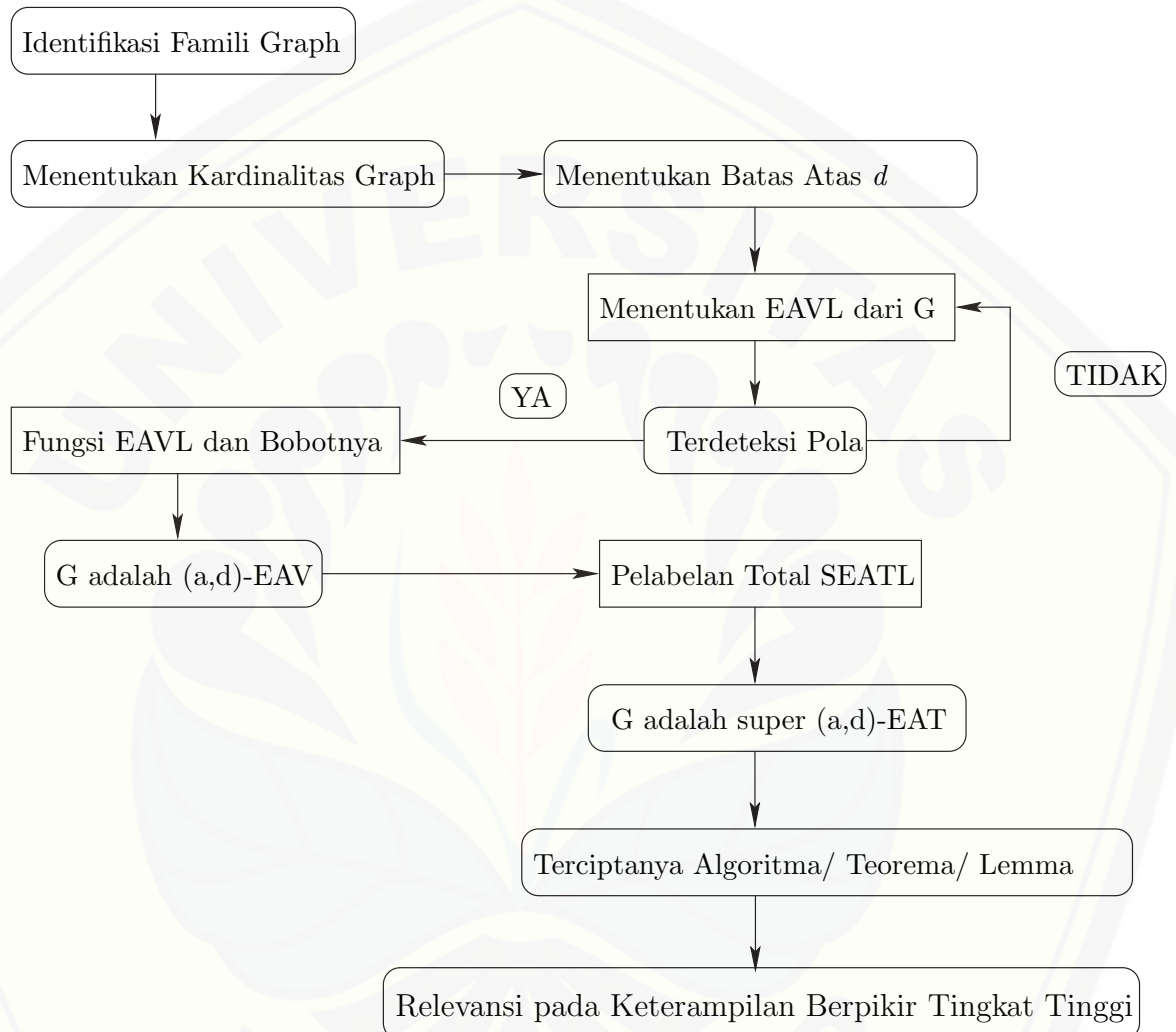
### 3.3 Teknik Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada graf Roda Tank baik yang tunggal maupun gabungan saling lepasnya, jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan total super sisi antimagic maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Penelitian ini juga menerapkan tahapan-tahapan taksonomi Bloom dalam menentukan langkah-langkah untuk pelabelan total super  $(a,d)$ -EATL graf Train Wheel ini. Adapun langkah-langkah penelitian adalah sebagai berikut:

1. mengidentifikasi graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  dalam penentuan famili grafnya,
2. menghitung jumlah titik  $p$  dan sisi  $q$  pada Graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ ,
3. menentukan batas atas nilai beda  $d$  pada pada Graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ ,
4. menentukan label  $EAVL$  (*edge-antimagic vertex labeling*) atau pelabelan titik $(a,d)$ -EATL pada Graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  hingga terdeteksi polanya,
5. apabila label  $EAVL$  berlaku untuk beberapa graf baik secara *heuristik* maupun *determinatik* maka dikatakan pelabelan itu *expandable* sehingga dilanjutkan menentukan algoritma  $EAVL$  pada Graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ ,
6. menentukan fungsi bijektif  $EAVL$  pada Graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ ,
7. melabeli Graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ , dengan  $SEATL$  (*super edge antimagic total labeling*) atau pelabelan total super  $(a, d)$ -EATL dengan nilai beda  $d$  yang *feasible*,
8. menentukan fungsi bijektif pelabelan total super  $(a, d)$ -EATL pada Graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ ,
9. relevansinya terhadap keterampilan berpikir tingkat tinggi (*Higher Order Thinking*)

Penelitian ini akan menemukan berbagai pola pelabelan total super sisi antimagic dengan berbagai nilai awal  $a$  serta nilai beda  $d$ . Sehingga penelitian ini juga dapat dinyatakan dalam pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank.

Teknik penelitian yang dilakukan pada gabungan saling lepas graf Roda Tank juga sama dengan teknik penelitian seperti yang telah disebutkan di atas namun teknik tersebut diterapkan pada gabungan saling lepas graf Roda Tank. Secara umum, langkah-langkah penelitian tersebut dapat juga disajikan dalam bagan diagram alir pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Rancangan Penelitian

### 3.4 Observasi

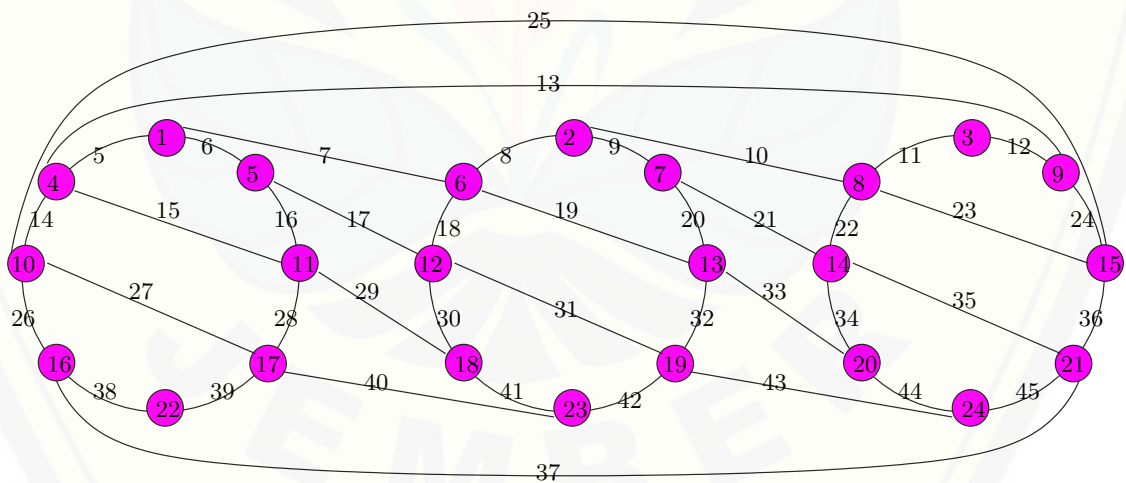
Sebelum penelitian lanjutan pada graf Roda Tank, telah dilakukan observasi awal sebagai pedoman observasi selanjutnya. Namun, hasil observasi awal ini

dapat berubah. Berikut hasil observasi pelabelan Graf Roda Tank pada  $Tw_{3,8}$  seperti disajikan pada Gambar 3.4. Langkah-langkah untuk melakukan observasi pelabelan graf Roda Tank adalah sebagai berikut:

1. mencari pelabelan titik pada graf Roda Tank;
2. mencari bobot sisi pada graf Roda Tank;
3. daftar merentang bobot sisinya, dimulai dari jumlah titik ( $p$ ) ditambah 1.

Selanjutnya jika kita akan menemukan pelabelan titik dan bobot sisi pada graf Roda Tank diskonektif, maka kita dapat melakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. mencari pelabelan titik pada graf Roda Tank diskonektif;
2. mencari bobot sisi pada graf Roda Tank;
3. daftar merentang bobot graf Roda Tank diskonektif untuk mencari label sisinya;
4. mencari label sisinya, dimulai dari jumlah titik ( $p$ ) ditambah 1.



Gambar 3.4  $Tw_{3,8}$

## BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penjelasan pada bab ini yaitu mengenai hasil penelitian dari pelabelan total super sisi antimagic graf roda tank yang menghasilkan sebuah algoritma pelabelan total super sisi antimagic pada graf roda tank. Penelitian ini diawali dengan menemukan pola kemudian menentukan nilai batas atas ( $d$ ), menentukan  $EAV$  dan bobot sisi  $EAV$  kemudian menentukan  $SEATL$  dan diakhiri dengan bobot sisi total  $SEATL$  untuk membuktikan bahwa gabungan graf ini merupakan  $SEATL$ .

Hasil yang diperoleh pada pelabelan total super ( $a, d$ )-EATL pada graf Roda Tank baik tunggal maupun gabungan saling lepasnya berupa 2 lemma dan 4 teorema. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan lemma atau teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi pembuktian teorema. Berikut ini akan dijelaskan tahap-tahap bagaimana lemma dan teorema tersebut ditemukan sekaligus menjawab rumusan masalah yang telah disajikan sebelumnya.

### 4.1 Graf Roda Tank $TW_{m,n}$

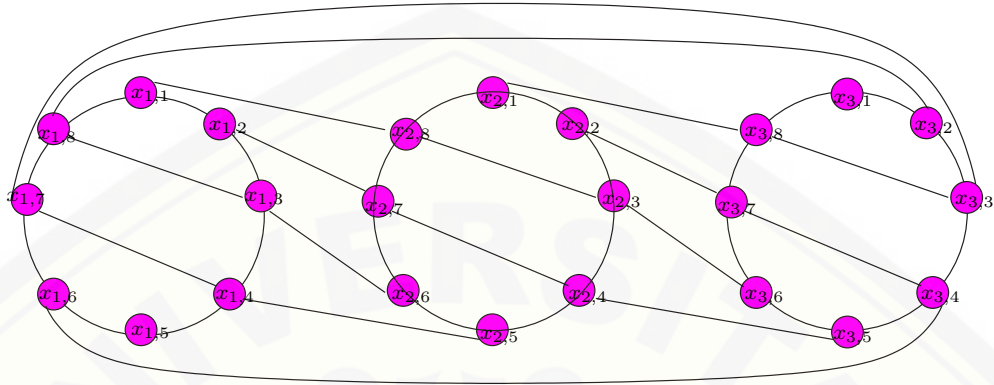
Penentuan batas atas  $d$  adalah langkah awal yang penting dalam penelitian ini. Hal ini merupakan batas tersebut menunjukkan berapa nilai beda yang mungkin dimiliki oleh graf Roda Tank. Untuk menentukan nilai-nilai  $d$  tersebut, perlu diketahui jumlah titik ( $p$ ) dan jumlah sisi ( $q$ ) graf Roda Tank tunggal maupun gabungannya.

### 4.2 Jumlah Titik dan Sisi pada Graf Roda Tank ( $TW_{m,n}$ )

Berdasarkan definisi graf Roda Tank yakni Graf Roda Tank yang dinotasikan dengan  $TW_{m,n}$ , dengan himpunan  $V$  dan  $E$  dari graf Roda Tank,  $V(TW_{m,n}) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ .  $E(TW_{m,n}) = \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n}x_{i,1}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,n-j+3}; 1 \leq i \leq m, 3 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{1,n-j+2}x_{m,j}; 2 \leq j \leq \frac{n}{2}\}$ . Dimana



nilai  $n$  yang dimaksudkan adalah banyaknya *expand* titik pada bagian lingkaran graf Roda Tank dan nilai  $m$  adalah banyaknya *expand* lingkaran yang terbentuk. Gambar 4.1 berikut merupakan sebuah gambar untuk menentukan jumlah titik dan jumlah sisi pada graf Roda Tank  $TW_{m,n}$ .



Gambar 4.1 Graf Roda Tank

Berdasarkan pola pada Gambar 4.1 , dapat ditemukan bahwa rumusan jumlah titik pada graf Roda Tank  $TW_{m,n}$  adalah  $mn$ . Sedangkan jumlah sisi pada graf Roda Tank  $TW_{m,n}$  adalah  $2mn - 2m - 1$ .

### 4.3 Batas Atas $d$ graf Roda Tank ( $TW_{m,n}$ )

Setelah ditemukan jumlah titik dan jumlah sisi yang berada pada graf Roda Tank  $TW_{m,n}$ , Batas atas  $d$  graf Roda Tank  $TW_{m,n}$  dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 2.6.1 . Diketahui jumlah titik pada graf ( $TW_{m,n}$ ) adalah  $mn$  dan jumlah sisi  $2mn - 2m - 1$ . Dengan demikian batas atas nilai beda  $d$  tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
 d &\leq \frac{2p + q - 5}{q - 1} \\
 &= \frac{2(mn) + (2mn - 2m - 1) - 5}{(2mn - 2m - 1) - 1} \\
 &= \frac{4mn - 2m - 6}{2mn - 2m - 2} \\
 &= 2 + \frac{2m - 2}{2mn - 2m - 2} \\
 &\leq 2
 \end{aligned}$$

Karena pelabelan *SEAT* selalu menggunakan bilangan bulat positif, maka nilai  $d \geq 0$  dan  $d$  adalah bilangan bulat, sehingga  $d \in \{0, 1, 2\}$ . Selanjutnya penentuan fungsi bijektif pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic akan disesuaikan dengan nilai  $d$  yang telah ditetapkan.

#### 4.4 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -EATL pada graf Roda Tank $(TW_{m,n})$

Metode yang digunakan pada pelabelan total EATL graf Roda Tank  $(TW_{m,n})$  adalah Pendeteksian Pola dan Deduktif aksiomatik. Yakni dengan mendeteksi pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku pada batas  $i$  dan  $j$  yang telah ditemukan pada graf Roda Tank  $(TW_{m,n})$  yang dilanjutkan dengan penentuan batas atas nilai beda. Selanjutnya menentukan algoritma fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika.

Lema atau teorema dalam penelitian ini adalah bukan lema atau teorema yang *biimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah. Berdasarkan hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa lemma, teorema. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan. Lema 4.4.1 adalah lema yang berkaitan dengan pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi Antimagic pada graf Roda Tank  $(Tw_{m,n})$ .

◇ **Lema 4.4.1.** *Ada pelabelan titik  $(m + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $(Tw_{m,n})$  jika  $n \geq 8$ ,  $n$  genap dan  $m \geq 5$ .*

**Bukti.** Labeli titik graf Roda Tank  $(Tw_{m,n})$  dengan sebuah fungsi  $f_1$ , definisikan pelabelan  $f_1 : V(Tw_{m,n}) \rightarrow \{1, 2, \dots, mn\}$  maka pelabelan  $f_1$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_1(x_{i,j}) = \begin{cases} i; & \text{untuk } j = 1, \text{ sembarang } i \\ 2mn + m + 2i - 2mj - 1; & \text{untuk } \frac{n+4}{2} \leq j \leq n, \text{ sembarang } i \\ 2mj + 2i - 3m; & \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i \\ mn - m + i; & \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \text{ sembarang } i \end{cases}$$

Pelabelan titik pada  $f_1$  adalah fungsi bijektif yang memetakan  $Tw_{m,n}$  ke himpunan bilangan bulat  $\{1, 2, \dots, mn\}$ . Jika  $w_{f_1}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik  $f_1$  dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian, maka fungsi bijektif  $w_{f_1}$  dapat ditentukan melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika sebagai berikut:

$$w_{f_1}(x_{i,j}x_{i,j+1}) = \begin{cases} m + 3i; & \text{jika sembarang } i, j = 1 \\ 4mn - 4mj + 4i - 2; & \text{jika } \frac{n+4}{2} \leq j \leq n, \text{ sembarang } i \\ 4i + 4mj - 4m; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \text{ sembarang } i \\ 2mn - 4m + 3i - 1; & \text{jika } j = \frac{n+2}{2}, \text{ sembarang } i \\ 2mn - 4m + 3i; & \text{jika } j = \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i \end{cases}$$

$$w_{f_1}(x_{i,n}x_{i,1}) = \begin{cases} m + 3i - 1; & \text{jika sembarang } i \end{cases}$$

$$w_{f_1}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}) = \begin{cases} m + 3i + 1; & \text{jika } 1 \leq i \leq m - 1, j = 1 \\ 4i + 4mj - 4m + 1; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, 1 \leq i \leq m - 1 \\ 2mn - 4m + 3i + 1; & \text{jika } j = \frac{n}{2}, 1 \leq i \leq m - 1 \end{cases}$$

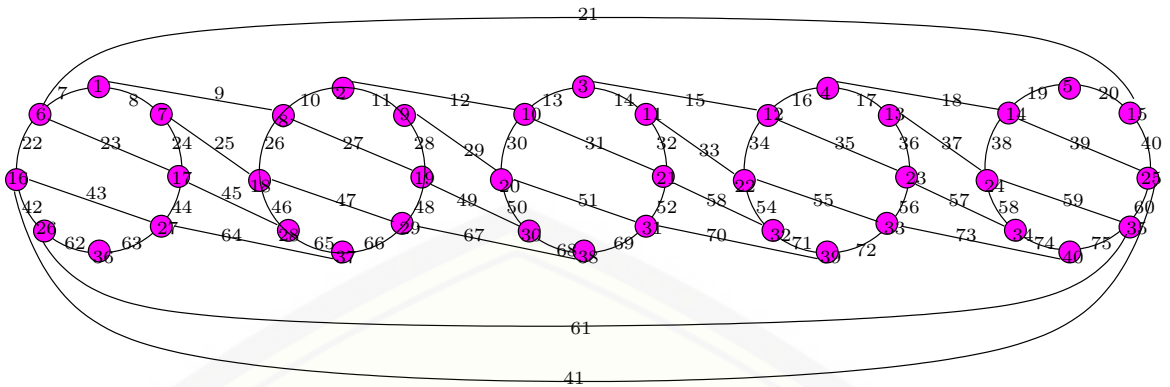
$$w_{f_1}(x_{1,n-j+2}x_{m,j}) = \begin{cases} 4mj - 4m + 1; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n}{2} \end{cases}$$

$$w_{f_1}(x_{i,j}x_{i,n-j+3}) = \begin{cases} 4i + 4mj - 8m - 1; & \text{jika } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i \end{cases}$$

Berdasarkan bobot sisi *EAV* ini, bobot sisi terkecil terletak pada  $w_{f_1}(x_{i,n}x_{i,1})$  yaitu  $m + 2$  untuk  $i = 1$ . Dan bobot sisi terbesar terletak pada  $w_{f_1}(x_{i,j}x_{i,j+1})$  yaitu  $2mn - m$  untuk  $i = m$  dan  $j = \frac{n}{2}$ . Dengan mensubstitusikan fungsi yang bergerak,  $1 \leq i \leq m$  dan  $1 \leq j \leq n$  maka didapatkan nilai-nilai berurutan yang akan membentuk himpunan  $w_{f_1} = \{m + 2, m + 3, m + 4, \dots, 2mn - m\}$ . Sehingga, dapat disimpulkan bahwa  $f_1$  adalah suatu pelabelan titik  $(m + 2, 1)$ .  $\square$

Berdasarkan Lemma 4.4.1 maka diperoleh pelabelan titik  $(m + 2, 1)$ -sisi antimagic dan dapat ditentukan pelabelan total super  $(a, 0)$ -sisi antimagic dengan menentukan label sisi dari pelabelan titik yang telah ditemukan. Letak label sisi ditentukan berdasarkan letak bobot sisi *EAVL*  $w$  dengan urutan yang berkebalikan. Sehingga sisi dengan  $w$  terkecil dilabeli dengan label sisi terbesar dan sisi dengan  $w$  terbesar dilabeli dengan label sisi terkecil. Melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika, maka dapat ditentukan fungsi bijektifnya. Dari uraian di atas dapat diturunkan teorema 4.4.1:

Gambar 4.2 merupakan contoh pelabelan titik beserta bobot sisi *EAVL*  $(7, 1)$ -sisi antimagic graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  dengan  $d = 1$ . Selanjutnya setelah ditemukan Rumus *EAV* untuk  $d = 1$  maka akan ditentukan Rumus *SEATL* untuk  $d = 0, 2$



Gambar 4.2 Pelabelan titik (7,1)-sisi antimagic pada Roda Tank ( $TW_{m,n}$ )

◇ **Teorema 4.4.1.** *Ada pelabelan total super  $(3mn - m + 1, 0)$ , dan  $(mn + m + 3, 2)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $TW_{m,n}$  jika  $m \geq 3$  dan  $n \geq 8$ ,  $n$  genap.*

**Bukti.** Pada kasus ini dibagi menjadi dua kasus yakni  $d = 0$  dan  $d = 2$ .

Kasus 1 ( $d = 0$ )

Gunakan pelabelan titik  $f_1$  untuk melabeli titik graf Roda Tank  $TW_{m,n}$ , kemudian definisikan label sisi  $f_2 : E(TW_{m,n}) \rightarrow \{m+2, m+3, \dots, 2mn - m\}$ , sehingga label sisi  $f_2$  untuk pelabelan total super  $(a, 0)$ -sisi antimagic pada graf  $TW_{m,n}$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$f_2(x_{i,j}x_{i,j+1}) = \begin{cases} 3mn - 2m - 3i + 1; & \text{jika sembarang } i, j = 1 \\ 4mj - mn - m - 4i + 3; & \text{jika } \frac{n+4}{2} \leq j \leq n, \text{ sembarang } i \\ 3mn + 3m - 4mj - 4i + 1; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \text{ sembarang } i \\ mn + 3m - 3i + 2; & \text{jika } j = \frac{n+2}{2}, \text{ sembarang } i \\ mn + 3m - 3i + 1; & \text{jika } j = \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i \end{cases}$$

$$f_2(x_{i,n}x_{i,1}) = \begin{cases} 3mn - 2m - 3i + 2; & \text{jika sembarang } i \end{cases}$$



$$f_2(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}) = \begin{cases} 3mn - 2m - 3i; & \text{jika } 1 \leq i \leq m - 1, j = 1 \\ 3mn + 3m - 4mj - 4i; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ & 1 \leq i \leq m - 1 \\ mn + 3m - 3i; & \text{jika } j = \frac{n}{2}, 1 \leq i \leq m - 1 \end{cases}$$

$$f_2(x_{1,n-j+2}x_{m,j}) = \begin{cases} 3mn + 3m - 4mj; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n}{2} \end{cases}$$

$$f_2(x_{i,j}x_{i,n-j+3}) = \begin{cases} 3mn + 7m - 4mj - 4i + 2; & \text{jika } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i \end{cases}$$

Jika  $W_{f_2}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total graf Roda Tank berdasarkan penjumlahan bobot sisi dengan label sisinya maka  $W_{f_2}$  dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot sisi EAVL  $w_{f_1}$  dan rumus label sisi  $f_2$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian, sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$w_{f_2}(x_{i,j}x_{i,j+1}) = \begin{cases} 3mn - m + 1; & \text{jika sembarang } i, j = 1 \\ 3mn - m + 1; & \text{jika } \frac{n+4}{2} \leq j \leq n, \text{ sembarang } i \\ 3mn - m + 1; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \text{ sembarang } i \\ 3mn - m + 1; & \text{jika } j = \frac{n+2}{2}, \text{ sembarang } i \\ 3mn - m + 1; & \text{jika } j = \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i \end{cases}$$

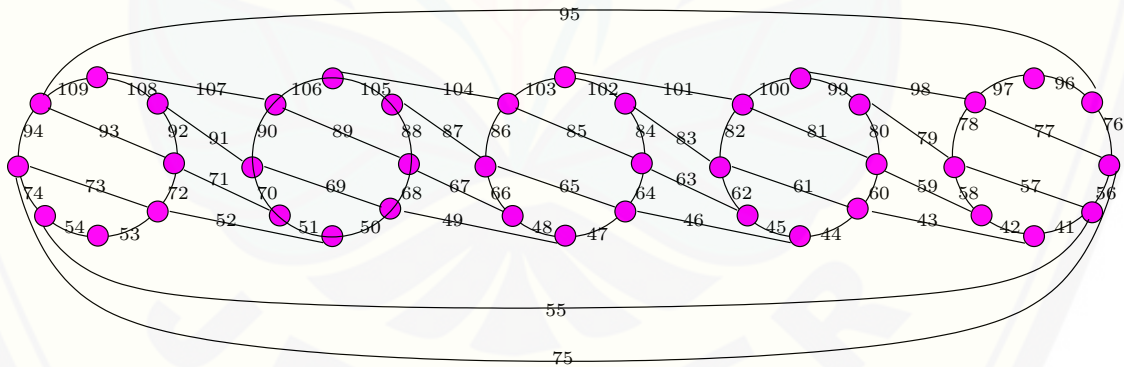
$$w_{f_2}(x_{i,n}x_{i,1}) = \begin{cases} 3mn - m + 1; & \text{jika sembarang } i \end{cases}$$

$$w_{f_2}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}) = \begin{cases} 3mn - m + 1; & \text{jika } 1 \leq i \leq m - 1, j = 1 \\ 3mn - m + 1; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, 1 \leq i \leq m - 1 \\ 3mn - m + 1; & \text{jika } j = \frac{n}{2}, 1 \leq i \leq m - 1 \end{cases}$$

$$w_{f_2}(x_{1,n-j+2}x_{m,j}) = \begin{cases} 3mn - m + 1; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n}{2} \end{cases}$$

$$w_{f_2}(x_{i,j}x_{i,n-j+3}) = \begin{cases} 3mn - m + 1; & \text{jika } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i \end{cases}$$

Berdasarkan hasil diatas, dapat dilihat bahwa setiap bobot sisi nilainya  $3mn - m + 1$ . Sehingga himpunan bobot sisi untuk  $W_{f_2}$  dapat ditulis  $W_{f_2} = \{3mn - m + 1, 3mn - m + 1, \dots, 3mn - m + 1\}$ . Dapat disimpulkan bahwa graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super( $a, d$ )-sisi antimagic dengan  $a = 3mn - m + 1$  dan  $d = 0$ , dengan kata lain graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super ( $3mn - m + 1, 0$ )-sisi antimagic. Gambar 4.3 merupakan contoh pelabelan total super ( $116, 0$ )-sisi antimagic pada graf Roda Tank  $Tw_{5,8}$ .



Gambar 4.3 SEATL graf Roda Tank ( $Tw_{5,8}$ ) dengan  $d = 0$

Kasus 2 ( $d = 2$ )

Untuk mencari pelabelan sisi untuk  $d = 2$  menggunakan hasil pelabelan sisi dari  $d = 0$  dan menggunakan jumlah sisi dan jumlah titik. Sebagai berikut :  $f_3(y) = 2|V| + |E| + 1 - f_2(y)$ . Jadi dengan rumus tersebut berlaku untuk semua label sisi  $d = 2$  dengan mensubstitusikan nilai  $f_2(y)$  yang sesuai. Berikut hasil fungsi label sisi untuk  $d = 2$  :

$$f_3(x_{i,j}x_{i,j+1}) = \begin{cases} mn + 3i - 1; & \text{jika sembarang } i, j = 1 \\ 5mn - m - 4mj + 4i - 3; & \text{jika } \frac{n+4}{2} \leq j \leq n, \text{ sembarang } i \\ mn - 5m + 4mj + 4i - 1; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \text{ sembarang } i \\ 3mn - 5m + 3i - 2; & \text{jika } j = \frac{n+2}{2}, \text{ sembarang } i \\ 3mn - 5m + 3i - 1; & \text{jika } j = \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i \end{cases}$$

$$f_3(x_{i,n}x_{i,1}) = \begin{cases} mn + 3i - 2; & \text{jika sembarang } i \end{cases}$$

$$f_3(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}) = \begin{cases} mn + 3i - 1; & \text{jika } 1 \leq i \leq m - 1, j = 1 \\ mn - 5m + 4mj + 4i; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ & 1 \leq i \leq m - 1 \\ 3mn - 5m + 3i; & \text{jika } j = \frac{n}{2}, 1 \leq i \leq m - 1 \end{cases}$$

$$f_3(x_{1,n-j+2}x_{m,j}) = \begin{cases} mn - 5m + 4mj; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n}{2} \end{cases}$$

$$f_3(x_{i,j}x_{i,n-j+3}) = \begin{cases} mn - 9m + 4mj + 4i - 2; & \text{jika } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i \end{cases}$$

Untuk mencari bobot total  $d = 2$  dengan menjumlahkan bobot sisi dan fungsi label sisi  $d = 2$ . Dapat dituliskan sebagai berikut:

$W_{f_3} = w_{f_1} + 2|V| + |E| + 1 - f_2(x)$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $f_3$  yang sesuai. Sehingga dapat diperoleh bobot total sebagai berikut:

$$w_{f_3}(x_{i,j}x_{i,j+1}) = \begin{cases} mn + m + 6i - 1; & \text{jika sembarang } i, j = 1 \\ 9mn - m - 8mj + 8i - 5; & \text{jika } \frac{n+4}{2} \leq j \leq n, \text{ sembarang } i \\ mn - 9m + 8mj + 8i - 1; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \text{ sembarang } i \\ 5mn - 9m + 6i - 3; & \text{jika } j = \frac{n+2}{2}, \text{ sembarang } i \\ 5mn - 9m + 6i - 1; & \text{jika } j = \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i \end{cases}$$

$$w_{f_3}(x_{i,n}x_{i,1}) = \begin{cases} mn + m + 6i - 3; & \text{jika sembarang } i \end{cases}$$

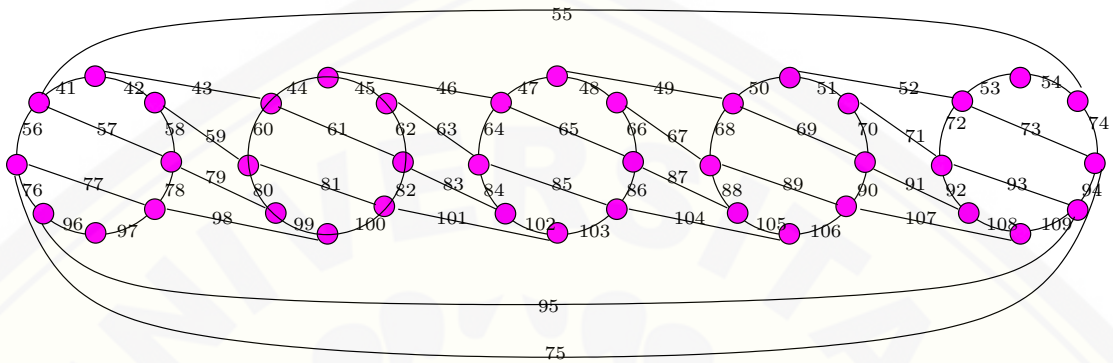
$$w_{f_3}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}) = \begin{cases} mn + m + 6i + 1; & \text{jika } 1 \leq i \leq m - 1, j = 1 \\ mn - 9m + 8mj + 8i + 1; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ & 1 \leq i \leq m - 1 \\ 5mn - 9m + 6i + 1; & \text{jika } j = \frac{n}{2}, 1 \leq i \leq m - 1 \end{cases}$$

$$w_{f_3}(x_{1,n-j+2}x_{m,j}) = \begin{cases} mn - 9m + 8mj + 1; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n}{2} \end{cases}$$

$$w_{f_3}(x_{i,j}x_{i,n-j+3}) = \begin{cases} mn - 17m + 8mj + 8i - 3; & \text{jika } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i \end{cases}$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi  $W_{f_3}$ , dapat dilihat bahwa bobot sisi terkecil didefinisikan oleh  $w_{f_3}(x_{i,n}x_{i,1})$  untuk  $i = 1$  dengan nilai  $mn + m + 3$ , dan bobot sisi terkecil kedua didefinisikan oleh  $w_{f_3}(x_{i,j}x_{i,j+1})$  untuk  $j = 1$  dan  $i = 1$  dengan nilai  $W_{f_3} = mn + m + 5$ , sedangkan bobot sisi terbesar didefinisikan oleh  $w_{f_1}(x_{i,j}x_{i,j+1})$  untuk  $i = m$  dan  $j = \frac{n}{2}$  dengan nilai  $5mn - 3m - 1$ . Dapat dinyatakan bahwa  $W_{f_3}$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $a = mn + m + 3$  dan beda( $b$ ) = 2 yaitu  $w_{f_3} = \{mn + m + 3, mn + m + 5,$

$\dots, 5mn - 3m - 1\}$ . Dapat disimpulkan bahwa graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  dengan  $m \geq 3$ ,  $m$  ganjil mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $a = mn + m + 3$  dan  $d = 2$ , dengan kata lain graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super  $(mn + m + 3, 2)$ -sisi antimagic. Gambar 4.4 merupakan contoh pelabelan total super  $(48, 2)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $Tw_{5,8}$ .



Gambar 4.4 SEATL graf Roda Tank  $(Tw_{5,8})$  dengan  $d = 2$

◇ **Teorema 4.4.2.** *Ada pelabelan total super  $(2mn + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  jika  $m \geq 3$ ,  $m$  ganjil dan  $n \geq 8$ ,  $n$  genap.*

**Bukti.** Gunakan pelabelan titik  $f_1$  untuk melabeli titik graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ , kemudian definisikan label sisi  $f_4 : E(Tw_{m,n}) \rightarrow \{m + 2, m + 3, \dots, 2mn - m\}$ , sehingga label sisi  $f_4$  untuk pelabelan total super  $(a, 1)$ -sisi antimagic pada graf  $Tw_{m,n}$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$f_4(x_i, x_{i,j+1}) = \begin{cases} \frac{2mn+3m-3i+2}{2}; & \text{jika } i \text{ ganjil, } j = \frac{n}{2} \\ \frac{2mn+3m-3i+3}{2}; & \text{jika } i \text{ genap, } j = \frac{n+2}{2} \\ \frac{4mn-2m-3i+2}{2}; & \text{jika } i \text{ genap, } j = 1 \\ \frac{4mn+m-3i+2}{2}; & \text{jika } j = \frac{n+2}{2}, i \text{ ganjil} \\ \frac{4mn+m-3i+1}{2}; & \text{jika } j = \frac{n}{2}, i \text{ genap} \\ \frac{6mn+m-4mj-4i+1}{2}; & \text{jika } i \text{ genap, } j = \frac{n-2}{2} \\ \frac{4mn-19m+4mj-4i+3}{2}; & \text{jika } i \text{ sembarang, } \frac{n+4}{2} \leq j \leq (n-1) \\ \frac{8mn-20m-3i+1}{2}; & \text{jika } i \text{ ganjil, } j = 1 \end{cases}$$



$$f_4(x_{i,n}x_{i,1}) = \begin{cases} \frac{8mn-20m-3i+2}{2}; & \text{jika } i \text{ genap} \\ \frac{4mn-2m-3i+3}{2}; & \text{jika } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$f_4(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}) = \begin{cases} \frac{2mn+3m-3i+1}{2}; & \text{jika } i \text{ genap}, j = \frac{n}{2}, 1 \leq i \leq m-1 \\ \frac{4mn+3m-4i-4mj+1}{2}; & \text{jika } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, 1 \leq i \leq m-1 \\ \frac{4mn-2m-3i+1}{2}; & \text{jika } i \text{ ganjil}, j = 1, 1 \leq i \leq m-1 \\ \frac{4mn+m-3i}{2}; & \text{jika } i \text{ genap}, j = \frac{n}{2}, 1 \leq i \leq m-1 \\ \frac{8mn-20m-3i}{2}; & \text{jika } i \text{ genap}, j = 1, 1 \leq i \leq m-1 \end{cases}$$

$$f_4(x_{1,n-j+2}x_{m,j}) = \frac{4mn+3m-4mj+1}{2}; \text{ jika } 2 \leq j \leq \frac{n}{2}.$$

$$f_4(x_{i,j}x_{i,n-j+3}) = \frac{4mn+7m-4i-4mj+3}{2}; \text{ jika } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i.$$

Jika  $W_{f_4}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total, berdasarkan pelabelan  $f_4$  maka  $W_{f_4}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{f_1}$  dan rumus label sisi  $f_4$  dengan syarat batas  $i$  dan  $j$  yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

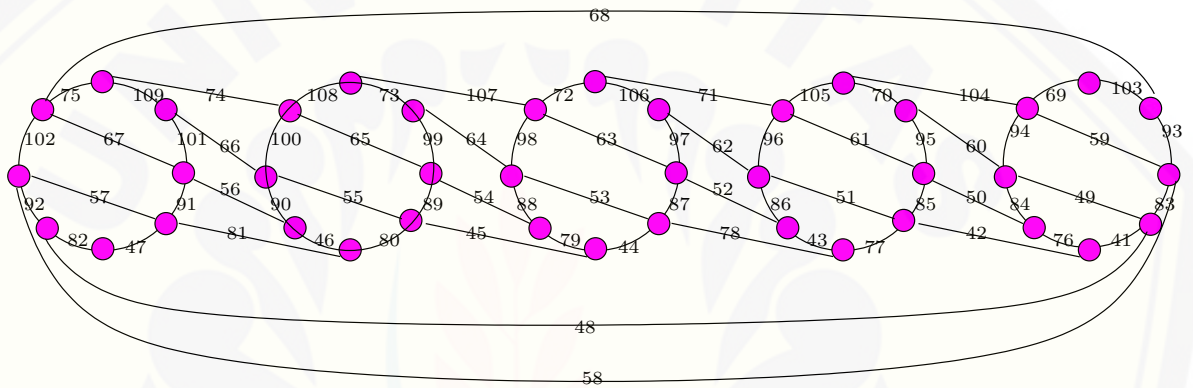
$$\begin{aligned} W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,n}x_{i,1}); \text{ jika } i \text{ ganjil}, j = \frac{n}{2}\} \\ &= \frac{6mn-5m+3i+2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}); \text{ jika } i \text{ genap}, j = \frac{n}{2}, 1 \leq i \leq m-1\} \\ &= \frac{6mn-5m+3i+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i,j+1}); \text{ jika } i \text{ genap}, j = \frac{n+2}{2}\} \\ &= \frac{6mn-5m+3i+1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{1,n-j+2}x_{m,j}); \text{ jika } 2 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \\
 &= \frac{4mn-5m+4mj+3}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i,n-j+3}); \text{ jika } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \text{ sembarang } i\} \\
 &= \frac{4mn-9m+4i+4mj+1}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}); \text{ jika } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, 1 \leq i \leq m-1\} \\
 &= \frac{4mn-5m+4i+4mj+3}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,n}x_{i,1}); \text{ jika } i \text{ ganjil}\} \\
 &= \frac{4mn+3i+1}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i,j+1}); \text{ jika } i \text{ genap}, j = 1\} \\
 &= \frac{4mn+3i+2}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}); \text{ jika } i \text{ ganjil}, j = 1, 1 \leq i \leq m-1\} \\
 &= \frac{4mn+3i+3}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i,j+1}); \text{ jika } j = \frac{n+2}{2}, i \text{ ganjil}\} \\
 &= \frac{8mn-7m+3i}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i,j+1}); \text{ jika } j = \frac{n}{2}, i \text{ genap}\} \\
 &= \frac{8mn-7m+3i+1}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}); \text{ jika } i \text{ genap}, j = \frac{n}{2}, 1 \leq i \leq m-1\} \\
 &= \frac{8mn-7m+3i+2}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i,j+1}); \text{ jika } i \text{ genap}, j = \frac{n-2}{2}\} \\
 &= \frac{6mn-7m+4mj-4i+1}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i,j+1}); \text{ jika } i \text{ sembarang}, \frac{n+4}{2} \leq j \leq (n-1)\} \\
 &= \frac{12mn-19m-4mj+4i-1}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i,j+1}); \text{ jika } i \text{ ganjil}, j = 1\} \\
 &= \frac{8mn-18m+3i+1}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}); \text{ jika } i \text{ genap}, j = 1, 1 \leq i \leq m-1\} \\
 &= \frac{8mn-18m+3i+2}{2} \\
 W_{f_4} &= \{w_{f_1} + f_4(x_{i,n}x_{i,1}); \text{ jika } i \text{ genap}\} \\
 &= \frac{8mn-18m+3i}{2}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan himpunan bobot sisi  $w_{f_4}$  dapat diperhatikan bahwa bobot sisi terkecil terdefiniskan oleh  $w_{f_4}(x_{i,n}x_{i,1})$  yaitu  $2mn + 2$  dengan  $i = 1$ , dan bobot sisi terbesar terletak pada  $w_{f_4}(x_{i,j}x_{i,j+1}) = 4mn - 2m$  dengan  $i = m$ . Jika nilai tiap batas rumusan bobot definisi  $w_{f_4}$  disubstitusikan dengan tepat, maka akan diperoleh sebuah rangkaian bilangan yang membentuk deret aritmatika dengan suku awal  $2mn + 2$ . Beda setiap rangkaian tersebut adalah 1, sehingga dapat ditulis dalam himpunan  $w_{f_4} = \{2mn + 2, 2mn + 3, 4mn - 2m\}$ . Dengan kata lain graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super  $(2mn + 2, 1)$ -sisi antimagic. Gambar 4.5 merupakan contoh pelabelan total super  $(2mn + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $Tw_{5,8}$ .



Gambar 4.5 SEATL graf Roda Tank ( $Tw_{5,8}$ ) dengan  $d = 1$

Berikut diberikan bukti alternatif untuk membuktikan bahwa graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  mempunyai Super  $(2mn+2, 1)$ -EAT. Untuk membuktikan ini, peneliti menggunakan sebuah lema untuk mendapatkan barisan bilangan berurutan. Lemma tersebut dikembangkan berdasarkan identifikasi awal terhadap lemma yang disajikan pada bab 2. Lemma yang digunakan penulis adalah lemma yang dikembangkan oleh Dafik, Robiyatul pada tahun 2014. Bukti ini didasarkan pada temuan besar peneliti untuk mendapatkan barisan bilangan berurutan dengan beda 1 dari sebuah permutasi  $\Pi(\Psi)$  dan himpunan bilangan berurutan  $\Psi$ .

Selanjutnya, sebagai alternatif pembuktian dari teorema 4.4.1, peneliti akan menggunakan lemma 2.6.2 yang telah dijelaskan di bab 2 .

**Bukti.** Berdasarkan lemma 4.4.1 bahwa graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  memiliki pola-

belan  $(7, 1)$ -EAV. Hal ini berarti graf  $Tw_{m,n}$  memiliki himpunan bobot sisi yang dinyatakan dalam  $\{7, 8, 79, \dots, 2mn - m\}$ , dengan kata lain graf  $Tw_{m,n}$  memiliki sebuah barisan bobot sisi dengan nilai awal  $a = 7$  dan beda tiap sukunya adalah 1. Jika dimisalkan barisan bobot sisi  $Tw_{m,n}$  dinyatakan dalam  $\Upsilon = \{c, c+1, c+2, \dots, c+k\}$  maka diperoleh nilai  $c = 7$  dan  $k = q-1 = 2mn-2m-1-1$ . Berdasarkan lemma 2.6.2,  $\Pi(\Upsilon)$  adalah permutasi nilai  $\Upsilon$  sedemikian hingga nilai  $\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta)$  adalah bobot total dari fungsi tersebut.

$$\begin{aligned} \Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= a \\ c + (c + 1 + \frac{k}{2} - 1) + \eta &= 2mn + 2 \\ 2c + \frac{k}{2} + \eta &= 2mn + 2 \\ 14 + \frac{k}{2} + \eta &= 2mn + 2 \\ \eta &= 2mn - 12 - \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Maka  $\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta)$  adalah bobot total dari fungsi tersebut. Pembuktian lemma 2.6.2 telah menyebutkan bobot total terkecil terletak pada  $i = 1$  sehingga:

$$\begin{aligned} \Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= c + (c + i + \frac{k}{2} - 1 + 2mn - 12 - \frac{k}{2}) \\ &= 2c + \frac{k}{2} + 2mn - 12 - \frac{k}{2} \\ &= 2mn + 2 \end{aligned}$$

bobot total terkecil kedua terletak di  $i = \frac{k}{2} + 2$ :

$$\begin{aligned} \Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= c + \frac{k}{2} + 1 + c + i - \frac{k}{2} - 2 + 2mn - 12 - \frac{k}{2} \\ &= 2c + 1 + \frac{k}{2} + 2mn - 12 - \frac{k}{2} \\ &= 2mn + 3 \end{aligned}$$

dan seterusnya, hingga bobot total terbesar terletak di  $i = \frac{k}{2} + 1$ :

$$\begin{aligned} \Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= c + c + i - 1 + 4mn - 2m - 10 - \frac{k}{2} \\ &= 2c + \frac{k}{2} + 1 - 1 + 4mn - 2m - 10 - \frac{k}{2} \\ &= 2c + 4mn - 2m - 10 \\ &= 4mn - 2m \end{aligned}$$

Nilai yang diperoleh dari perhitungan berdasarkan lemma 2.6.2 dengan bobot terkecil adalah  $2mn + 2$  dan bobot terbesar adalah  $4mn - 2m$  sesuai dengan nilai yang terdapat pada teorema 4.4.2. Berdasarkan perhitungan yang telah dituliskan, diketahui bahwa nilai  $\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta)$  dapat dinyatakan dalam himpunan  $\{2mn + 2, 2mn + 3, 2mn + 4, \dots, 4mn - 2m\}$ . Sehingga terbukti bahwa graf  $Tw_{m,n}$  memiliki pelabelan  $(a, 1)$ -super sisi antimagic untuk  $m \geq 3$ ,  $m$  ganjil dan  $n \geq 8$ ,  $n$  genap.  $\square$

#### 4.5 Gabungan graf Roda Tank $cTw_{m,n}$

Selanjutnya peneliti melakukan penelitian untuk gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$ . Penelitian ini merupakan pengembangan dari graf Roda Tank tunggal. Gabungan graf Roda Tank didefinisikan sebagai salinan sebanyak  $k$ . Pada gabungan graf Roda Tank dinotasikan dengan  $cTw_{m,n}$  yang merupakan gabungan saling lepas sebanyak  $k$ . Berikut himpunan titiknya  $V(cTw_{m,n}) = \{x_{i,j}^c; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ .  $E(cTw_{m,n}) = \{x_{i,j}^c x_{i,j+1}^c; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n}^c x_{i,1}^c; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{i,j}^c x_{i,n-j+3}^c; 1 \leq i \leq m, 3 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{i,j}^c x_{i+1,n-j+1}^c; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{1,n-j+2}^c x_{m,j}^c; 2 \leq j \leq \frac{n}{2}\}$ .

##### 4.5.1 Jumlah Titik dan Sisi pada Gabungan graf Roda Tank $cTw_{m,n}$

Sama seperti graf Roda Tank tunggal, untuk menentukan batas atas  $d$  pada gabungan, perlu diketahui pula rumusan jumlah titik ( $p$ ) dan jumlah sisi ( $q$ ) pada gabungan graf Roda Tank.

Jumlah titik dan jumlah sisi pada  $cTw_{m,n}$  dapat ditentukan dengan terlebih



dahulu mencermati definisi gabungan pada suatu graf.  $cTwm, n$  didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari  $k$  buah salinan graf  $Tw_{m,n}$ . Sehingga jumlah titik graf  $cTwm, n$  adalah  $k$  kali jumlah titik graf  $cTwm, n$  dapat dituliskan dalam

$$p_a = k.(mn) \Leftrightarrow p_a = mnk$$

dan jumlah sisi graf  $cTwm, n$  adalah  $k$  kali jumlah sisi graf  $Tw_{m,n}$ . Misalkan  $p_a$  adalah jumlah titik graf  $cTwm, n$  dan  $q_a$  adalah jumlah sisi graf  $cTwm, n$  dituliskan dengan

$$q_a = k.(2mn - 2m - 1) \Leftrightarrow q_a = 2mnk - 2mk - k.$$

#### 4.5.2 Batas Atas $d$ gabungan graf Roda Tank $cTwm, n$

Batas atas  $d$  gabungan graf Roda Tank  $cTwm, n$  juga dapat ditentukan dengan menggunakan Lemma 2.6.1 Diketahui jumlah titik pada graf  $cTwm, n$  adalah  $p_a = mnk$  dan jumlah sisi  $q_a = 2mnk - 2mk - k$  untuk  $k$  adalah jumlah salinan graf Roda Tank,  $n$  adalah jumlah titik yang terdapat pada lingkaran dan  $m$  adalah banyak lingkaran yang terbentuk. Dengan demikian batas atas nilai beda  $d$  tersebut adalah:

$$\begin{aligned} d &\leq \frac{2p_a + q_a - 5}{q_a - 1} \\ &= \frac{2(mnk) + (2mnk - 2mk - k) - 5}{(2mnk - 2mk - k) - 1} \\ &= \frac{4mnk - 2mk - k - 5}{2mnk - 2mk - k - 1} \\ &= 2 + \frac{2mk + k - 3}{2mnk - 2mk - k - 1} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Sesuai dengan pelabelan  $SEAT$  pada graf Roda Tank tunggal, gabungan graf Roda Tank juga menggunakan bilangan bulat positif, sehingga nilai  $d \geq 0$  dan  $d$  adalah bilangan bulat. Dengan demikian dapat disimpulkan  $d \in \{0, 1, 2\}$ . Selan-

jutnya akan ditentukan fungsi bijektif pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditetapkan.

#### 4.6 Pelabelan Total Super $(a, d)$ -sisi Antimagic pada Gabungan Graf Roda Tank $(cTw_{m,n})$

Metode dalam menemukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf  $cTw_{m,n}$  sama dengan metode yang digunakan pada Graf Roda Tank tunggal yakni dengan diawali pendeteksian pola (*pattern recognition*) untuk menentukan pelabelan yang berlaku sampai dengan batas  $i, j, c$  yang telah ditemukan. Kemudian untuk menentukan pola secara umum digunakan fungsi-fungsi dalam barisan aritmatika untuk menentukan fungsi bijektifnya. Setelah fungsi bijektif diketahui maka harus dibuktikan secara deduktif matematik untuk membuktikan kebenaran dari lema atau teorema. Perlu diketahui bahwa lema dan teorema dalam penelitian ini adalah bukan lema atau teorema yang *bimplikatif* atau karakteristik sehingga pembuktiannya hanya dilakukan satu arah.

Jika dari hasil penggabungan pola melalui *pattern recognition* dan konsep barisan aritmatika, maka diperoleh beberapa lema, teorema dan akibat sebagai berikut. Teorema yang ditemukan dalam penelitian ini tidak bersifat tunggal (berkenaan dengan sifat ketunggalan) melainkan hanya bersifat keberadaan (*existence but not unique*).

Setelah mengetahui batas atas nilai  $d$ , langkah selanjutnya adalah menentukan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan terlebih dahulu menentukan pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Rem Cakram. Sekaligus menentukan fungsi bijektifnya melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika. Lema 4.6.1 adalah lema yang berkaitan dengan pelabelan titik  $(a, 1)$ -sisi Antimagic Gabungan Graf Roda Tank.

◇ **Lema 4.6.1.** *Ada pelabelan titik  $(\frac{2mk+k+3}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan Graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$ ,  $n = 6q + 4$ ,  $q$  sembarang dan  $c \geq 3$ ,  $c$  ganjil.*

**Bukti.** Labeli titik gabungan graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  dengan fungsi bijektif

$f_5$ , untuk  $1 \leq c \leq k$ , definisikan pelabelan  $f_5 : V(Tw_{m,n}) \rightarrow \{1, 2, \dots, mnk\}$  maka pelabelan  $f_5$  dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_5(x_{i,j}^c) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2c+2ik-2k}{2}; & \text{untuk } j = 1, i \text{ sembarang,} \\ & c \text{ sembarang} \\ \frac{4mnk+2mk-3k+4ik-4mjk-c+2}{2}; & \text{untuk } \frac{n+4}{2} \leq j \leq n, j = \frac{n+4}{2}(\text{mod } 3), \\ & i \text{ sembarang, } c \text{ ganjil} \\ \frac{4mnk+2mk-2k+4ik-4mjk-c+2}{2}; & \text{untuk } \frac{n+4}{2} \leq j \leq n, j = \frac{n+4}{2}(\text{mod } 3), \\ & i \text{ sembarang, } c \text{ genap} \\ \frac{4ik+4mjk-c-6mk-k+2}{2}; & \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 2(\text{mod } 3), \\ & 1 \leq i \leq m-1, c \text{ ganjil} \\ \frac{4ik+4mjk-c-6mk+2}{2}; & \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 2(\text{mod } 3), \\ & 1 \leq i \leq m-1, c \text{ genap} \\ \frac{4mjk-2mk-k-c+1}{2}; & \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 2(\text{mod } 3), \\ & c \text{ genap} \\ \frac{4mjk-2mk-c+1}{2}; & \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 2(\text{mod } 3), \\ & c \text{ ganjil} \\ \frac{4mnk+2mk-3k+4ik-4mjk-c+1}{2}; & \text{untuk } \frac{n+8}{2} \leq j \leq n, \\ & j = \frac{n+8}{2}(\text{mod } 3), i \text{ sembarang, } c \text{ genap} \\ \frac{4mnk+2mk-2k+4ik-4mjk-c+1}{2}; & \text{untuk } \frac{n+8}{2} \leq j \leq n, \\ & j = \frac{n+8}{2}(\text{mod } 3), i \text{ sembarang, } c \text{ ganjil} \\ \frac{4ik+4mjk-c-6mk-k+1}{2}; & \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ & j = 3(\text{mod } 3), 1 \leq i \leq m-1, c \text{ genap} \\ \frac{4ik+4mjk-c-6mk+1}{2}; & \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ & j = 3(\text{mod } 3), 1 \leq i \leq m-1, c \text{ ganjil} \end{array} \right.$$

$$f_5(x_{i,j}^c) = \begin{cases} \frac{4ik+4mjk-c-6mk+1}{2}; & \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 3(\text{mod } 3), \\ & 1 \leq i \leq m-1, c \text{ ganjil} \\ \frac{4mjk-2mk-2k+2c}{2}; & \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 3(\text{mod } 3), \\ & c \text{ sembarang} \\ \frac{4mnk+2mk-4k+4ik-4mjk+2c}{2}; & \text{untuk } \frac{n+6}{2} \leq j \leq n, j = \frac{n+6}{2}(\text{mod } 3), \\ & i \text{ sembarang}, c \text{ sembarang} \\ \frac{4ik+4mjk-6mk-2k+2c}{2}; & \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 4(\text{mod } 3), \\ & 1 \leq i \leq m-1, c \text{ sembarang} \\ \frac{4mjk-2mk-k-c+2}{2}; & \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 4(\text{mod } 3), \\ & c \text{ ganjil} \\ \frac{4mjk-2mk-c+2}{2}; & \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 4(\text{mod } 3), \\ & c \text{ genap} \\ \frac{2mnk-2mk-k+2ik-c+1}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n+2}{2} \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ & c \text{ genap} \\ \frac{2mnk-2mk+2ik-c+1}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n+2}{2} \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ & c \text{ ganjil} \\ \frac{2mnk-2k+2c}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n+2}{2} \quad c \text{ sembarang} \end{cases}$$

Pelabelan titik  $f_5$  tersebut merupakan sebuah fungsi bijektif. Jika  $w_{f_5}$  merupakan bobot sisi berdasarkan pelabelan titik  $f_5$  dimana bobot sisi pelabelan titik diperoleh dari penjumlahan 2 buah label titik yang bersisian pada  $cTw_{m,n}$ . Berikut bobot sisi dari gabungan graf Roda Tank:

$$\begin{aligned} w_{f_5}(x_{i,n}x_{i,1})^c &= \frac{2mk+6ik-5k+c+2}{2}; & \text{untuk } i \text{ sembarang}, c \text{ ganjil} \\ w_{f_5}(x_{i,n}x_{i,1})^c &= \frac{2mk+6ik-4k+c+2}{2}; & \text{untuk } i \text{ sembarang}, c \text{ genap} \\ w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{2mk+6ik-3k+c+2}{2}; & \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ & & c \text{ ganjil} \\ w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{2mk+6ik-2k+c+2}{2}; & \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ & & c \text{ genap} \end{aligned}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8mk-3k+c+1}{2};$$

untuk  $j = 1 \quad i = m, \quad c$  genap

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8mk-2k+c+1}{2};$$

untuk  $j = 1 \quad i = m, \quad c$  ganjil

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mk+6ik-k+c+2}{2};$$

untuk  $j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad c$  ganjil

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mk+6ik+c+2}{2};$$

untuk  $j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad c$  genap

$$w_{f_5}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{8mjk-8mk+k-2c+3}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n}{2},$   
 $j = 2(mod 3), \quad c$  sembarang

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8mnk-5k+8ik-8mjk-2c+3}{2};$$

untuk  $\frac{n+8}{2} \leq j \leq n$   
 $j = \frac{n+8}{2}(mod 3), \quad i$  sembarang,  
 $c$  sembarang

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{8ik+8mjk-2c-16mk-3k+3}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2},$   
 $j = 3(mod 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad c$  sembarang

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8ik+8mjk-2c-8mk-k+3}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$   
 $j = 2(mod 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad c$  sembarang

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{8ik+8mjk-2c-8mk+k+3}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$   
 $j = 2(mod 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad c$  sembarang

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{8mjk+c-8mk-5k+2}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \quad j = 3(mod 3),$   
 $i = m, \quad c$  ganjil

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{8mjk+c-8mk-4k+2}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \quad j = 3(mod 3),$   
 $i = m, \quad c$  genap

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8mjk-3k+c+1}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \quad j = 2(mod 3),$   
 $i = m, \quad c$  ganjil

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8mjk-2k+c+1}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \quad j = 2(mod 3),$   
 $i = m, \quad c$  ganjil

$$w_{f_5}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{8mjk-8mk-k+c+1}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \quad j = 3(mod 3),$   
 $c$  genap

$$w_{f_5}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{8mjk-8mk+c+1}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \quad j = 3(mod 3),$   
 $c$  ganjil

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8mnk-7k+8ik-8mjk+c+1}{2};$$

untuk  $\frac{n+6}{2} \leq j \leq n,$   
 $j = \frac{n+6}{2}(mod 3),$   
 $i$  sembarang,  $c$  genap



$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8mnk-6k+8ik-8mjk+c+1}{2}; \quad \text{untuk } \frac{n+6}{2} \leq j \leq n, \\ j = \frac{n+6}{2}(\text{mod } 3), \quad i \text{ sembarang,} \\ c \text{ ganjil}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{8ik+8mjk-16mk-5k+c+1}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ genap}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{8ik+8mjk-16mk-4k+c+1}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ ganjil}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8ik+8mjk-8mk-3k+c+1}{2}; \quad \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ j = 3(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ genap}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8ik+8mjk-8mk-2k+c+1}{2}; \quad \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ j = 3(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ ganjil}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{8ik+8mjk-8mk-k+c+1}{2}; \quad \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ j = 3(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ genap}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{8ik+8mjk-8mk+c+1}{2}; \quad \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ j = 3(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ ganjil}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{8mjk-8mk-3k-2c+3}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 4(\text{mod } 3), \quad i = m, \\ c \text{ sembarang}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8mjk-3k+c+2}{2}; \quad \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ j = 3(\text{mod } 3), \quad i = m, \\ c \text{ ganjil}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8mjk-2k+c+2}{2}; \quad \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ j = 3(\text{mod } 3), \quad i = m, \\ c \text{ genap}$$

$$w_{f_5}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{8mjk-8mk-k+c+2}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 4(\text{mod } 3), \quad c \text{ ganjil}$$

$$w_{f_5}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{8mjk-8mk+c+2}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 4(\text{mod } 3), \quad c \text{ genap}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8mnk-7k+8ik-8mjk+c+2}{2}; \quad \text{untuk } \frac{n+4}{2} \leq j \leq n, \\ j = \frac{n+4}{2}(\text{mod } 3), \quad i \text{ sembarang,} \\ c \text{ ganjil}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8mnk-6k+8ik-8mjk+c+2}{2}; \quad \text{untuk } \frac{n+4}{2} \leq j \leq n, \\ j = \frac{n+4}{2}(\text{mod } 3), \quad i \text{ sembarang,} \\ c \text{ genap}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{8ik+8mjk-16mk-5k+c+2}{2}; \quad \text{untuk } 5 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 5(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ ganjil}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{8ik+8mjk-16mk-4k+c+2}{2}; \quad \text{untuk } 5 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 5(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ genap}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8ik+8mjk-8mk-3k+c+2}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ ganjil}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8ik+8mjk-8mk-2k+c+2}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ genap}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{8ik+8mjk-k-8mk+c+2}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ ganjil}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{8ik+8mjk-8mk+c+2}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ genap}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{8mjk-8mk-5k+c+1}{2}; \quad \text{untuk } 5 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 5(\text{mod } 3), \quad i = m, \\ c \text{ genap}$$

$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{8mjk-8mk-4k+c+1}{2}; \quad \text{untuk } 5 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 5(\text{mod } 3), \quad i = m, \\ c \text{ ganjil}$$

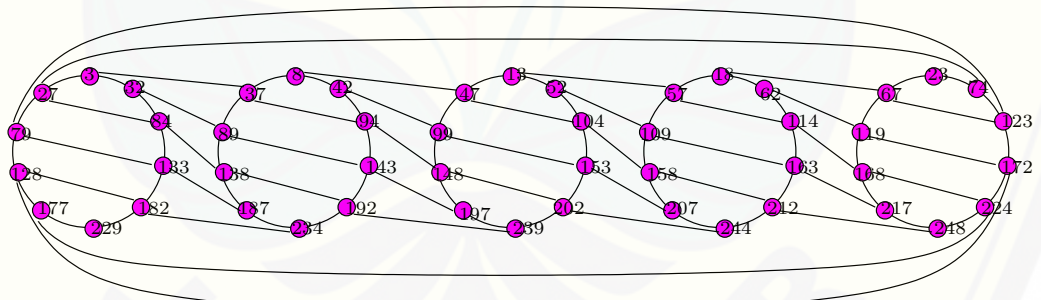
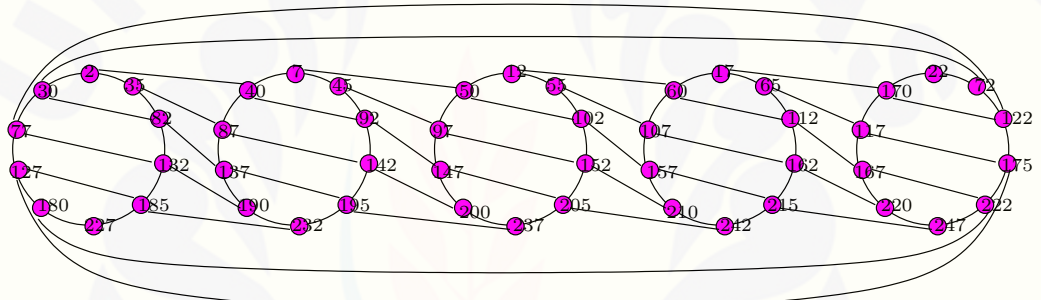
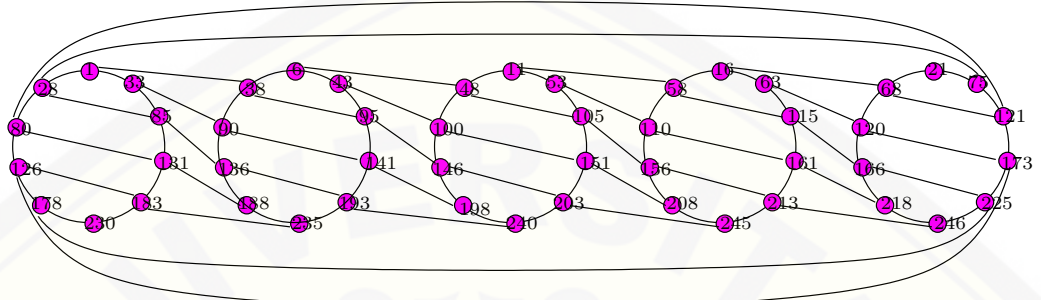
$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{8mjk-k-2c+3}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ j = 4(\text{mod } 3), \quad i = m, \\ c \text{ sembarang}$$

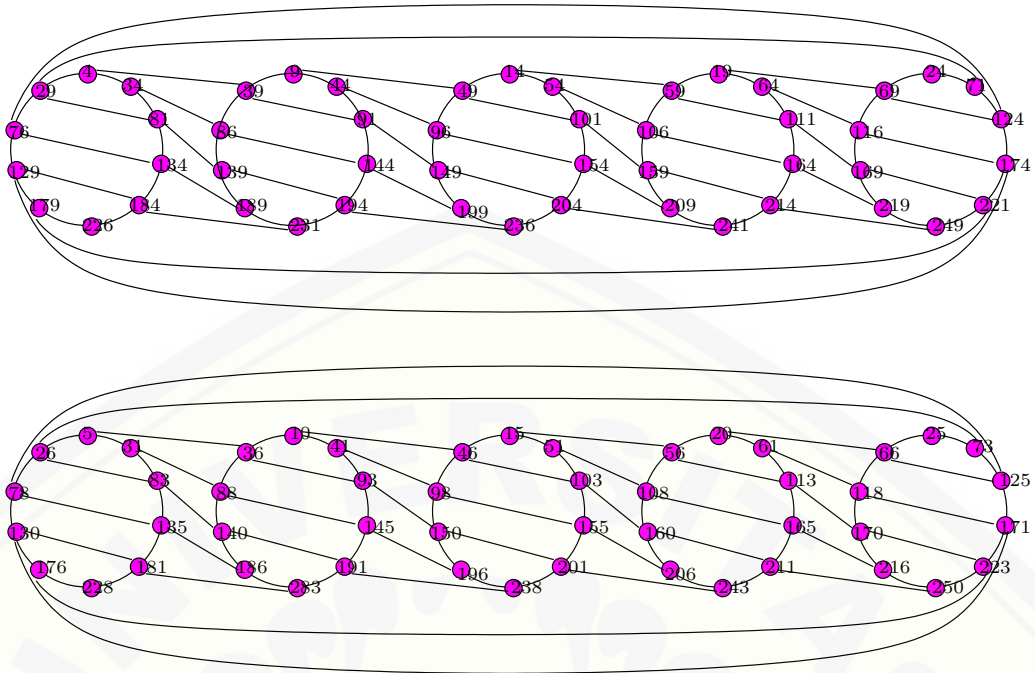
$$w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{4mnk-8mk-3k+6ik-2c+3}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \\ 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ sembarang}$$

$$\begin{aligned}
 w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{4mnk-8mk-k+6ik-2c+3}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \\
 & & 1 \leq i \leq m-1, \text{ } c \text{ sembarang} \\
 w_{f_5}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{4mnk-8mk+k+6ik-2c+3}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \\
 & & 1 \leq i \leq m-2, \text{ } c \text{ sembarang} \\
 w_{f_5}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{4mnk-2mk-7k+c+2}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \text{ } i = m-1, \\
 & & c \text{ ganjil} \\
 w_{f_5}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{4mnk-2mk-6k+c+2}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \text{ } i = m-1, \\
 & & c \text{ genap} \\
 w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{4mnk-2mk-5k+c+2}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \text{ } i = m, \\
 & & c \text{ ganjil} \\
 w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{4mnk-2mk-4k+c+2}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \text{ } i = m, \\
 & & c \text{ genap} \\
 w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{4mnk-2mk-3k+c+1}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \text{ } i = m, \\
 & & c \text{ genap} \\
 w_{f_5}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{4mnk-2mk-2k+c+1}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \text{ } i = m, \\
 & & c \text{ ganjil}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan bobot sisi yang didefinisikan diatas, bobot sisi terkecil terletak pada  $w_{f_5}$  untuk  $i = 1, c = 1$  dan bobot sisi terbesar terletak pada  $w_{f_5}$  ketika  $c = \text{ganjil}$  yaitu pada  $c = k$ . Dengan mensubstitusikan nilai batas pada tiap definisi rumusan yang diberikan maka didapatkan nilai-nilai berurutan yang akan membentuk himpunan  $w_{f_5} = \left\{ \frac{2mk+k+3}{2}, \frac{2mk+k+4}{2}, \dots, \frac{4mnk-2mk-k+1}{2} \right\}$ . Himpunan tersebut membentuk sebuah himpunan yang memiliki nilai awal  $\frac{2mk+k+3}{2}$  dan beda tiap elemennya adalah 1, sehingga dapat disimpulkan bahwa pelabelan  $f_5$  adalah suatu pelabelan titik  $(\frac{2mk+k+3}{2}, 1)$  atau bisa dituliskan sebagai  $(\frac{2mk+k+3}{2}, 1)$ -EAV labelling.  $\square$

Gambar 4.6 merupakan contoh pelabelan titik EAVL  $(\frac{2mk+k+3}{2}, 1)$ -sisi antimagis gabungan graf Roda Tank  $5Tw_{5,8}$  dengan  $d = 1$ .





Gambar 4.6 Graf  $5Tw_{5,10}$

◇ **Teorema 4.6.1.** *Ada pelabelan total super  $(\frac{6mnk-2mk-k+3}{2}, 0)$ , dan  $(\frac{2mnk+2mk+k+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$ , jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$ ,  $n = 6q + 4$ ,  $q$  sembarang dan  $c \geq 3$ ,  $c$  ganjil.*

**Bukti.** Pada kasus ini dibagi menjadi dua kasus yakni  $d = 0$  dan  $d = 2$ .

Kasus 1 ( $d = 0$ )

Labeli titik gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  dengan definisikan label sisi  $f_6 : E(cTw_{m,n}) \rightarrow \{\frac{2mk+k+3}{2}, \frac{2mk+k+4}{2}, \dots, \frac{4mnk-2mk-k+1}{2}\}$ , maka label sisi  $f_6$  untuk pelabelan total super  $(\frac{6mnk-2mk-k+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic pada graf  $cTw_{m,n}$  dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_6(x_{i,n}x_{i,1})^c &= \frac{6mnk-4mk+4k-6ik-c+1}{2}; && \text{untuk } i \text{ sembarang, } c \text{ ganjil} \\ f_6(x_{i,n}x_{i,1})^c &= \frac{6mnk-4mk+3k-6ik-c+1}{2}; && \text{untuk } i \text{ sembarang, } c \text{ genap} \\ f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-4mk+2k-6ik-c+1}{2}; && \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m - 1, \\ &&& c \text{ ganjil} \end{aligned}$$



$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-4mk+k-6ik-c+1}{2};$$

untuk  $j = 1 \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-10mk+2k-c+2}{2};$$

untuk  $j = 1 \quad i = m, c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-10mk+k-c+2}{2};$$

untuk  $j = 1 \quad i = m, c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{6mnk-4mk-6ik-c+1}{2};$$

untuk  $j = 1 \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{6mnk-4mk-6ik-k-c+1}{2};$$

untuk  $j = 1 \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  genap

$$f_6(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{6mnk+6mk-2k-8mjk+2c}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n}{2},$   
 $j = 2(mod 3),$   
 $c$  sembarang

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{4k-2mnk-2mk-8ik+8mjk+2c}{2};$$

untuk  $\frac{n+8}{2} \leq j \leq n,$   
 $j = \frac{n+8}{2}(mod 3), i$  sembarang,  
 $c$  sembarang

$$f_6(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{6mnk+14mk+2k-8ik-8mjk+2c}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2},$   
 $j = 3(mod 3), \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  sembarang

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk+6mk-8ik-8mjk+2c}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$   
 $j = 2(mod 3), \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  sembarang

$$f_6(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{6mnk+6mk-2k-8ik-8mjk+2c}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$   
 $j = 2(mod 3), \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  sembarang

$$f_6(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{6mnk+6mk+4k-8mjk-c+1}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2},$   
 $j = 3(mod 3),$   
 $i = m, c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{6mnk+6mk+3k-8mjk-c+1}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2},$   
 $j = 3(mod 3),$   
 $i = m, c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-2mk+2k-8mjk-c+2}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 2(\text{mod } 3)$ ,  $i = m$ ,  $c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-2mk+k-8mjk-c+2}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 2(\text{mod } 3)$ ,  $i = m$ ,  $c$  ganjil

$$f_6(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{6mnk+6mk-8mjk-c+2}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $c$  genap

$$f_6(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{6mnk+6mk-8mjk-k-c+2}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6k-2mnk-2mk-8ik+8mjk-c+2}{2};$$

untuk  $\frac{n+6}{2} \leq j \leq n$ ,  
 $j = \frac{n+6}{2}(\text{mod } 3)$ ,  $i$  sembarang,  
 $c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{5k-2mnk-2mk-8ik+8mjk-c+2}{2};$$

untuk  $\frac{n+6}{2} \leq j \leq n$ ,  
 $j = \frac{n+6}{2}(\text{mod } 3)$ ,  $i$  sembarang,  
 $c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{6mnk+14mk+4k-8ik-8mjk-c+2}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{6mnk+14mk+3k-8ik-8mjk-c+2}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk+6mk+2k-8ik-8mjk-c+2}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk+6mk+k-8ik-8mjk-c+2}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{6mnk+6mk-8ik-8mjk-c+2}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{6mnk+6mk-k-8ik-8mjk-c+2}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{6mnk+6mk+2k-8mjk+2c}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4(\text{mod } 3)$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  sembarang

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-2mk+2k-8mjk-c+1}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-2mk+k-8mjk-c+1}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  genap

$$f_6(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{6mnk+6mk-8mjk-c+1}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4(\text{mod } 3)$ ,  $c$  ganjil

$$f_6(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{6mnk+6mk-8mjk-k-c+1}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4(\text{mod } 3)$ ,  $c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6k-2mnk-2mk-8ik+8mjk-c+1}{2};$$

untuk  $\frac{n+4}{2} \leq j \leq n$ ,  
 $j = \frac{n+4}{2}(\text{mod } 3)$ ,  $i$  sembarang,  
 $c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{5k-2mnk-2mk-8ik+8mjk-c+1}{2};$$

untuk  $\frac{n+4}{2} \leq j \leq n$ ,  
 $j = \frac{n+4}{2}(\text{mod } 3)$ ,  $i$  sembarang,  
 $c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{6mnk+14mk+4k-8ik-8mjk-c+1}{2};$$

untuk  $5 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 5(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{6mnk+14mk+4k-8ik-8mjk-c+1}{2};$$

untuk  $5 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 5(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk+6mk+2k-8ik-8mjk-c+1}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 4(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk+6mk+k-8ik-8mjk-c+1}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 4(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{6mnk+6mk-8ik-8mjk-c+1}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 4(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{6mnk+6mk-8ik-8mjk-k-c+1}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$$

$j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1,$   
 $c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{6mnk+6mk+4k-8mjk-c+2}{2}; \quad \text{untuk } 5 \leq j \leq \frac{n}{2},$$

$j = 5(\text{mod } 3), \quad i = m,$   
 $c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{6mnk+6mk+4k-8mjk-c+2}{2}; \quad \text{untuk } 5 \leq j \leq \frac{n}{2},$$

$j = 5(\text{mod } 3), \quad i = m,$   
 $c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-2mk-8mjk+2c}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$$

$j = 4(\text{mod } 3), \quad i = m,$   
 $c$  sembarang

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+6mk+2k-6ik+2c}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n+2}{2},$$

$1 \leq i \leq m-1, \quad c$  sembarang

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+6mk-6ik+2c}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n}{2},$$

$1 \leq i \leq m-1, \quad c$  sembarang

$$f_6(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk+6mk-2k-6ik+2c}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad 1 \leq i \leq m-2,$$

$c$  sembarang

$$f_6(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk+6k-c+1}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m-1,$$

$c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk+5k-c+1}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m-1,$$

$c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+4k-c+1}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \quad i = m,$$

$c$  ganjil

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+3k-c+1}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \quad i = m,$$

$c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+2k-c+2}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m,$$

$c$  genap

$$f_6(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+k-c+2}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m,$$

$c$  ganjil

Jika  $W_{f_6}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total maka  $W_{f_6}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{f_5}$  dan rumus  $f_6$  dengan syarat batas  $i$ ,  $j$  dan  $c$  yang bersesuaian. Berikut rumus bobot sisi EAVL  $w_{f_6}$  :

$$w_{f_6}(x_{i,n}x_{i,1})^c = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } i \text{ sembarang,} \\ c \text{ ganjil} \end{array}$$

$$w_{f_6}(x_{i,n}x_{i,1})^c = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } i \text{ sembarang,} \\ c \text{ genap} \end{array}$$

$$w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ ganjil} \end{array}$$

$$w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ genap} \end{array}$$

$$w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } j = 1 \quad i = m, \\ c \text{ genap} \end{array}$$

$$w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } j = 1 \quad i = m, \\ c \text{ ganjil} \end{array}$$

$$w_{f_6}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ ganjil} \end{array}$$

$$w_{f_6}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ genap} \end{array}$$

$$w_{f_6}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 2(\text{mod } 3), \quad c \text{ sembarang} \end{array}$$

$$w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } \frac{n+8}{2} \leq j \leq n, \\ j = \frac{n+8}{2}(\text{mod } 3), \quad i \text{ sembarang,} \\ c \text{ sembarang} \end{array}$$

$$w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 3(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ sembarang} \end{array}$$

$$w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, \\ j = 2(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ sembarang} \end{array}$$

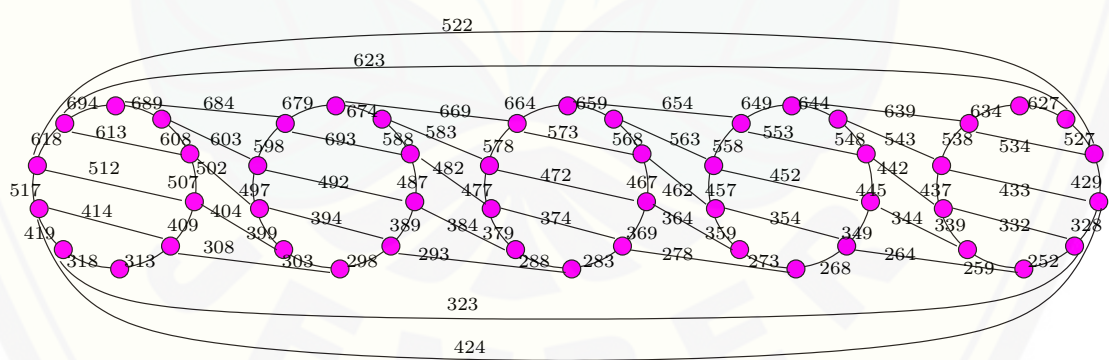
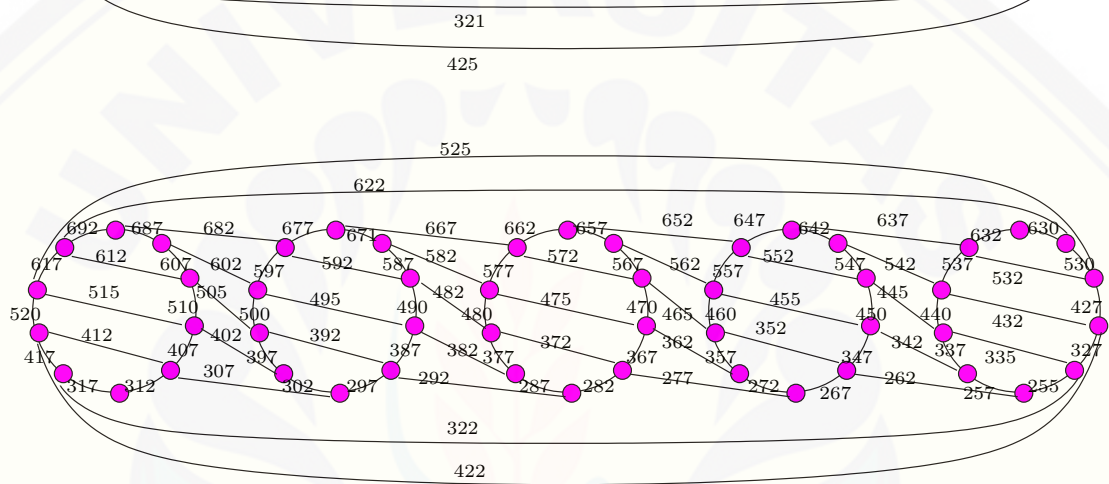
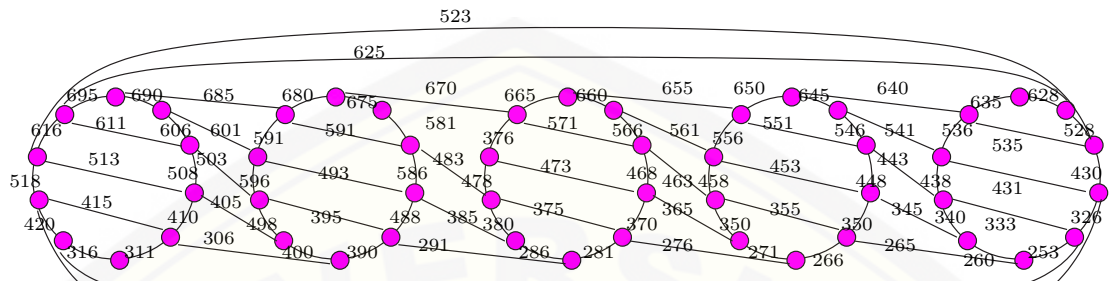


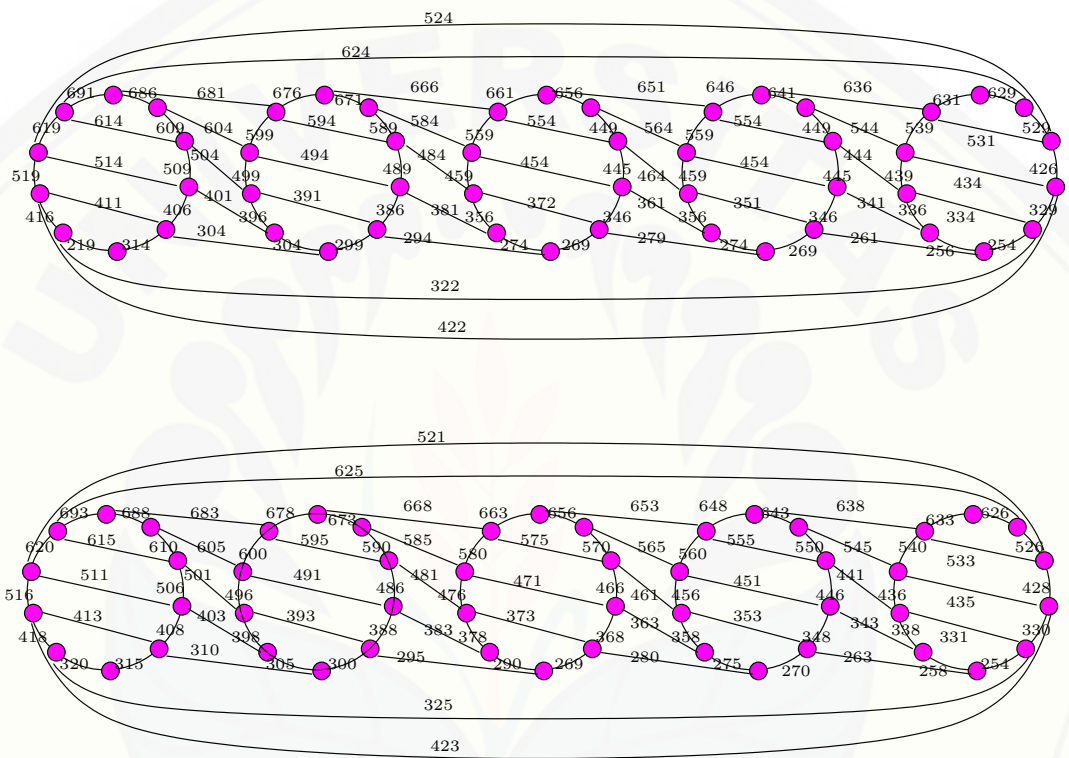
$$\begin{aligned}
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 2(\text{mod } 3), \\
 & & 1 \leq i \leq m-1, c \text{ sembarang} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 3(\text{mod } 3), \\
 & & i = m, c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 3(\text{mod } 3), \\
 & & i = m, c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 2(\text{mod } 3), \\
 & & i = m, c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 2(\text{mod } 3), \\
 & & i = m, c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 3(\text{mod } 3), \\
 & & c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 3(\text{mod } 3), \\
 & & c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } \frac{n+6}{2} \leq j \leq n, j = \frac{n+6}{2}(\text{mod } 3), \\
 & & i \text{ sembarang}, c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } \frac{n+6}{2} \leq j \leq n, j = \frac{n+6}{2}(\text{mod } 3), \\
 & & i \text{ sembarang}, c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 4(\text{mod } 3), \\
 & & 1 \leq i \leq m-1, c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 4(\text{mod } 3), \\
 & & 1 \leq i \leq m-1, c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 3(\text{mod } 3), \\
 & & 1 \leq i \leq m-1, c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 4(\text{mod } 3), \\
 & & 1 \leq i \leq m-1, c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 4(\text{mod } 3), \\
 & & 1 \leq i \leq m-1, c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 4(\text{mod } 3), \\
 & & 1 \leq i \leq m-1, c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 4(\text{mod } 3), \\
 & & 1 \leq i \leq m-1, c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } 5 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 5(\text{mod } 3), \\
 & & i = m, c \text{ genap}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 3(\text{mod } 3), \\
 &&& 1 \leq i \leq m-1, c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 3(\text{mod } 3), \\
 &&& 1 \leq i \leq m-1, c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 3(\text{mod } 3), \\
 &&& 1 \leq i \leq m-1, c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 4(\text{mod } 3), \\
 &&& i = m, c \text{ sembarang} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 3(\text{mod } 3), \\
 &&& i = m, c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 3(\text{mod } 3), \\
 &&& i = m, c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\
 &&& j = 4(\text{mod } 3), c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\
 &&& j = 4(\text{mod } 3), c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } \frac{n+4}{2} \leq j \leq n, j = \frac{n+4}{2}(\text{mod } 3), \\
 &&& i \text{ sembarang}, c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } \frac{n+4}{2} \leq j \leq n, j = \frac{n+4}{2}(\text{mod } 3), \\
 &&& i \text{ sembarang}, c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } 5 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 5(\text{mod } 3), \\
 &&& 1 \leq i \leq m-1, c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } 5 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 5(\text{mod } 3), \\
 &&& 1 \leq i \leq m-1, c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } 5 \leq j \leq \frac{n}{2}, j = 5(\text{mod } 3), \\
 &&& i = m, c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}, j = 4(\text{mod } 3), \\
 &&& i = m, c \text{ sembarang} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, 1 \leq i \leq m-1, \\
 &&& c \text{ sembarang} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } j = \frac{n}{2}, 1 \leq i \leq m-1, \\
 &&& c \text{ sembarang} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; && \text{untuk } j = \frac{n}{2}, 1 \leq i \leq m-2, \\
 &&& c \text{ sembarang}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m-1, \\
 & & c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m-1, \\
 & & c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \quad i = m, \\
 & & c \text{ ganjil} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \quad i = m, \\
 & & c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m, \\
 & & c \text{ genap} \\
 w_{f_6}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}; & \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m, \\
 & & c \text{ ganjil}
 \end{aligned}$$

Di dapat semua sisi memiliki bobot yang sama yaitu  $\frac{6mnk-2mk-k+3}{2}$ , maka himpunan bobot sisi  $W_{f_6} = \{ \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}, \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}, \dots, \frac{6mnk-2mk-k+3}{2} \}$ . Sehingga dapat disimpulkan bahwa gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  dengan  $m \geq 3$  dan  $n \geq 10$  mempunyai pelabelan total super( $a, d$ )-sisi antimagic dengan  $a = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}$  dan  $d = 0$ , atau gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super  $(\frac{6mnk-2mk-k+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic jika  $m \geq 3$  dan  $n \geq 10$ . Gambar 4.7 merupakan contoh pelabelan total super  $(1624, 0)$ -sisi antimagic (*SEATL*) pada gabungan graf Roda Tank  $5Tw_{5,10}$ .





Gambar 4.7 Graf  $5Tw_{5,10}$



Kasus 2 ( $d = 2$ ) Gunakan pelabelan titik  $f_7 = f_5$  untuk melabeli titik gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$ , kemudian definisikan label sisi  $f_7 : E(cTw_{m,n}) \rightarrow \left\{ \frac{2mk+k+3}{2}, \frac{2mk+k+4}{2}, \dots, \frac{4mnk-2mk-k+1}{2} \right\}$ , sedemikian hingga label sisi  $f_7$  untuk pelabelan total super  $(a, 2)$ -sisi antimagic pada graf  $cTw_{m,n}$ , dapat dirumuskan sebagai berikut::

$$f_7(x_{i,n}x_{i,1})^c = \frac{2mnk+6ik-6k+1}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } i \text{ sembarang,} \\ c \text{ ganjil} \end{array}$$

$$f_7(x_{i,n}x_{i,1})^c = \frac{2mnk+6ik-5k+1}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } i \text{ sembarang,} \\ c \text{ genap} \end{array}$$

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-4k+6ik+c+1}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ ganjil} \end{array}$$

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-3k+6ik+c+1}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ genap} \end{array}$$

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+6mk-4k+c}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } j = 1 \quad i = m, \\ c \text{ genap} \end{array}$$

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+6mk-3k+c}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } j = 1 \quad i = m, \\ c \text{ ganjil} \end{array}$$

$$f_7(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk-2k+6ik+c+1}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ ganjil} \end{array}$$

$$f_7(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk-k+6ik+c+1}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ genap} \end{array}$$

$$f_7(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{2mnk-10mk+8mj-2c+2}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 2(\text{mod } 3), \quad c \text{ sembarang} \end{array}$$

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{10mnk-2mk-6k+8ik-8mj-2c+2}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } \frac{n+8}{2} \leq j \leq n, \\ j = \frac{n+8}{2}(\text{mod } 3), \quad i \text{ sembarang,} \\ c \text{ sembarang} \end{array}$$

$$f_7(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-18mk-4k+8ik+8mj-2c+2}{2}; \quad \begin{array}{l} \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2}, \\ j = 3(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1, \\ c \text{ sembarang} \end{array}$$

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-10mk-2k+8ik+8mjk-2c+2}{2}; \quad \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$$

$j = 2(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1,$   
 $c$  sembarang

$$f_7(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk-10mk+8ik+8mjk-2c+2}{2}; \quad \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$$

$j = 2(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1,$   
 $c$  sembarang

$$f_7(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-10mk-6k+8mjk+c+1}{2}; \quad \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2},$$

$j = 3(\text{mod } 3), \quad i = m,$   
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-10mk-5k+8mjk+c+1}{2}; \quad \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2},$$

$j = 3(\text{mod } 3), \quad i = m,$   
 $c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-2mk-4k+8mjk+c}{2}; \quad \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$$

$j = 2(\text{mod } 3), \quad i = m,$   
 $c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-2mk-3k+8mjk+c}{2}; \quad \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$$

$j = 2(\text{mod } 3), \quad i = m,$   
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{2mnk-10mk-2k+8mjk+c}{2}; \quad \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2},$$

$j = 3(\text{mod } 3), \quad c$  genap

$$f_7(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{2mnk-10mk-k+8mjk+c}{2}; \quad \text{untuk } 3 \leq j \leq \frac{n}{2},$$

$j = 3(\text{mod } 3), \quad c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{10mnk-2mk-8k+8ik-8mjk+c}{2}; \quad \text{untuk } \frac{n+6}{2} \leq j \leq n,$$

$j = \frac{n+6}{2}(\text{mod } 3), \quad i$  sembarang,  
 $c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{10mnk-2mk-7k+8ik-8mjk+c}{2}; \quad \text{untuk } \frac{n+6}{2} \leq j \leq n,$$

$j = \frac{n+6}{2}(\text{mod } 3), \quad i$  sembarang,  
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-18mk-6k+8ik+8mjk+c}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2},$$

$j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1,$   
 $c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-18mk-5k+8ik+8mjk+c}{2}; \quad \text{untuk } 4 \leq j \leq \frac{n}{2},$$

$j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m-1,$   
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-10mk-4k+8ik+8mjk+c}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-10mk-3k+8ik+8mjk+c}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk-10mk-2k+8ik+8mjk+c}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk-10mk-k+8ik+8mjk+c}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-10mk-4k+8mjk-2c+2}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4(\text{mod } 3)$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  sembarang

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-2mk-4k+8mjk+c+1}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-2mk-3k+8mjk+c+1}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  genap

$$f_7(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{2mnk-10mk-2k+8mjk+c+1}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4(\text{mod } 3)$ ,  $c$  ganjil

$$f_7(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{2mnk-10mk-k+8mjk+c+1}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4(\text{mod } 3)$ ,  $c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{10mnk-2mk-8k+8ik-8mjk+c+1}{2};$$

untuk  $\frac{n+4}{2} \leq j \leq n$ ,  
 $j = \frac{n+4}{2}(\text{mod } 3)$ ,  $i$  sembarang,  
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{10mnk-2mk-7k+8ik-8mjk+c+1}{2};$$

untuk  $\frac{n+4}{2} \leq j \leq n$ ,  
 $j = \frac{n+4}{2}(\text{mod } 3)$ ,  $i$  sembarang,  
 $c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-18mk-6k+8ik+8mjk+c+1}{2};$$

untuk  $5 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 5(\text{mod } 3)$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = 8^{\frac{2mnk-18mk-5k+8ik+8mjk+c+1}{2}}; \quad \text{untuk } 5 \leq j \leq \frac{n}{2},$$

$j = 5(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-10mk-4k+8ik+8mjk+c+1}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$   
 $j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-10mk-3k+8ik+8mjk+c+1}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$   
 $j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk-10mk-2k+8ik+8mjk+c+1}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$   
 $j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk-10mk-k+8ik+8mjk+c+1}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$   
 $j = 4(\text{mod } 3), \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-10mk-6k+8mjk+c}{2};$$

untuk  $5 \leq j \leq \frac{n}{2},$   
 $j = 5(\text{mod } 3), \quad i = m,$   
 $c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-10mk-5k+8mjk+c}{2};$$

untuk  $5 \leq j \leq \frac{n}{2},$   
 $j = 5(\text{mod } 3), \quad i = m,$   
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-2mk-2k+8mjk-2c+2}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2},$   
 $j = 4(\text{mod } 3), \quad i = m,$   
 $c$  sembarang

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-10mk-4k+6ik-2c+2}{2};$$

untuk  $j = \frac{n+2}{2}, \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  sembarang

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-10mk-2k+6ik-2c+2}{2};$$

untuk  $j = \frac{n}{2}, \quad 1 \leq i \leq m - 1,$   
 $c$  sembarang

$$f_7(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{6mnk-10mk+6ik-2c+2}{2};$$

untuk  $j = \frac{n}{2}, \quad 1 \leq i \leq m - 2,$   
 $c$  sembarang

$$f_7(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{6mnk-4mk-8k+c+1}{2};$$

untuk  $j = \frac{n}{2}, \quad i = m - 1,$   
 $c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{6mnk-4mk-7k+c+1}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m-1,$$

$c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-4mk-6k+c+1}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \quad i = m,$$

$c$  ganjil

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-4mk-5k+c+1}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \quad i = m,$$

$c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-4mk-4k+c}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m,$$

$c$  genap

$$f_7(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{6mnk-4mk-3k+c}{2}; \quad \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m,$$

$c$  ganjil

Jika  $W_{f_7}$  didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total maka  $W_{f_7}$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL  $w_{f_5}$  dan rumus  $f_7$  sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$w_{f_7}(x_{i,n}x_{i,1})^c = \frac{2mnk+2mk+12ik-11k+2c+3}{2}; \quad \text{untuk } i \text{ sembarang,}$$

$c$  ganjil

$$w_{f_7}(x_{i,n}x_{i,1})^c = \frac{2mnk+2mk-9k+12ik+2c+3}{2}; \quad \text{untuk } i \text{ sembarang,}$$

$c$  genap

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+2mk-7k+12ik+2c+3}{2}; \quad \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

$c$  ganjil

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+2mk-5k+12ik+2c+3}{2}; \quad \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

$c$  genap

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+14mk-7k+2c+1}{2}; \quad \text{untuk } j = 1 \quad i = m,$$

$c$  genap

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+14mk-5k+2c+1}{2}; \quad \text{untuk } j = 1 \quad i = m,$$

$c$  ganjil

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk+2mk-3k+12ik+2c+3}{2}; \quad \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

$c$  ganjil

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk+2mk-k+12ik+2c+3}{2}; \quad \text{untuk } j = 1 \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

$c$  genap



$$w_{f_7}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{2mnk-18mk+k+16mjk-4c+5}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 2(\text{mod } 3)$ ,  
 $c$  sembarang

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{18mnk-2mk-11k+16ik-16mjk-4c+5}{2};$$

untuk  $\frac{n+8}{2} \leq j \leq n$ ,  
 $j = \frac{n+8}{2}(\text{mod } 3)$ ,  
 $i$  sembarang,  
 $c$  sembarang

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-34mk-7k+16ik+16mjk-4c+5}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  
 $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  sembarang

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk+18mk-3k+16ik+16mjk-4c+5}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 2(\text{mod } 3)$ ,  
 $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  sembarang

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk-18mk+k+16ik+16mjk-4c+5}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 2(\text{mod } 3)$ ,  
 $1 \leq i \leq m-1$ ,  
 $c$  sembarang

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-18mk-11k+16mjk+2c+3}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  ganjil

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-18mk-9k+16mjk+2c+3}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  genap

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-2mk-7k+16mjk+2c+1}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 2(\text{mod } 3)$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  genap

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-2mk-5k+16mjk+2c+1}{2};$$

untuk  $2 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 2(\text{mod } 3)$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  ganjil

$$w_{f_7}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{2mnk-18mk-3k+16mjk+2c+1}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $c$  genap

$$w_{f_7}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{2mnk-18mk-k+16mjk+2c+1}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 3(\text{mod } 3)$ ,  $c$  ganjil

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{18mnk-2mk-15k+16ik-16mjk+2c+1}{2};$$

untuk  $\frac{n+6}{2} \leq j \leq n$ ,  
 $j = \frac{n+6}{2} \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{18mnk-2mk-13k+16ik-16mjk+2c+1}{2};$$

$i$  sembarang,  $c$  genap  
 untuk  $\frac{n+6}{2} \leq j \leq n$ ,  
 $j = \frac{n+6}{2} \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-34mk-11k+16ik+16mjk+2c+1}{2};$$

$i$  sembarang,  $c$  ganjil  
 untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4 \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-34mk-9k+16ik+16mjk+2c+1}{2};$$

$1 \leq i \leq m-1$ ,  $c$  genap  
 untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4 \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-18mk-7k+16ik+16mjk+2c+1}{2};$$

$1 \leq i \leq m-1$ ,  $c$  ganjil  
 untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3 \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-18mk-5k+16ik+16mjk+2c+1}{2};$$

$1 \leq i \leq m-1$ ,  $c$  genap  
 untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3 \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk-18mk-k+16ik+16mjk+2c+1}{2};$$

$1 \leq i \leq m-1$ ,  $c$  ganjil  
 untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3 \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk-18mk-7k+16mjk-4c+5}{2};$$

$1 \leq i \leq m-1$ ,  $c$  genap  
 untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3 \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-2mk-7k+16mjk+2c+3}{2};$$

$1 \leq i \leq m-1$ ,  $c$  ganjil  
 untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4 \pmod{3}$ ,  $i = m$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-18mk-3k+16mjk+2c+3}{2};$$

$c$  sembarang  
 untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3 \pmod{3}$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  ganjil

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-2mk-5k+16mjk+2c+3}{2};$$

untuk  $3 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 3 \pmod{3}$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  genap

$$w_{f_7}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{2mnk-18mk-3k+16mjk+2c+3}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4 \pmod{3}$ ,  $c$  ganjil

$$w_{f_7}(x_{1,n-j+2}x_{m,j})^c = \frac{2mnk-18mk-k+16mjk+2c+3}{2};$$

untuk  $4 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 4 \pmod{3}$ ,  $c$  genap

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{18mnk-2mk-15k+16ik-16mjk+2c+3}{2};$$

untuk  $\frac{n+4}{2} \leq j \leq n$ ,  
 $j = \frac{n+4}{2} \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{18mnk-2mk-13k+16ik-16mjk+2c+3}{2};$$

$i$  sembarang,  $c$  ganjil  
 untuk  $\frac{n+4}{2} \leq j \leq n$ ,  
 $j = \frac{n+4}{2} \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-34mk-11k+16ik+16mjk+2c+3}{2};$$

$i$  sembarang,  $c$  genap  
 untuk  $5 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 5 \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-34mk-9k+16ik+16mjk+2c+3}{2};$$

$1 \leq i \leq m-1$ ,  $c$  ganjil  
 untuk  $5 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 5 \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-18mk-7k+16ik+16mjk+2c+3}{2};$$

$1 \leq i \leq m-1$ ,  $c$  genap  
 untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 4 \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-18mk-5k+16ik+16mjk+2c+3}{2};$$

$1 \leq i \leq m-1$ ,  $c$  ganjil  
 untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 4 \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk-18mk-3k+16ik+16mjk+2c+3}{2};$$

$1 \leq i \leq m-1$ ,  $c$  genap  
 untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 4 \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c = \frac{2mnk-18mk-k+16ik+16mjk+2c+3}{2};$$

$1 \leq i \leq m-1$ ,  $c$  ganjil  
 untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 4 \pmod{3}$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk-18mk-11k+16mjk+2c+1}{2};$$

$1 \leq i \leq m-1$ ,  $c$  genap  
 untuk  $5 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 5 \pmod{3}$ ,  $i = m$ ,

$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,n-j+3})^c = \frac{2mnk+18mk-9k+16mjk+2c+1}{2};$$

$c$  ganjil  
 untuk  $5 \leq j \leq \frac{n}{2}$ ,  
 $j = 5 \pmod{3}$ ,  $i = m$ ,

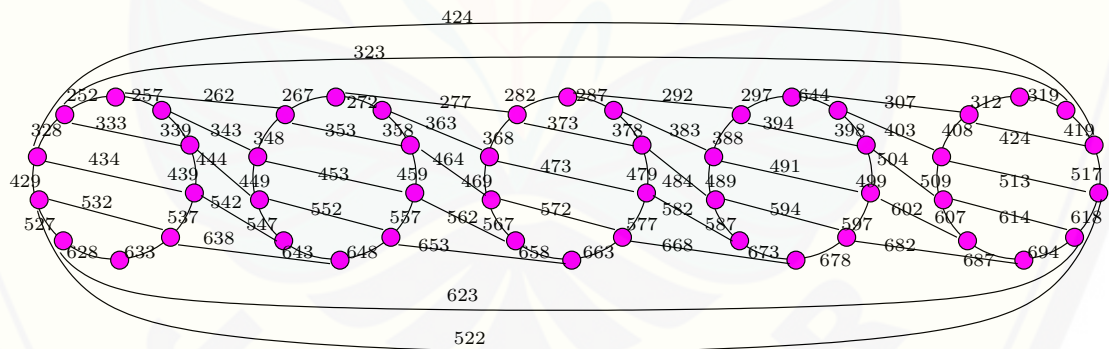
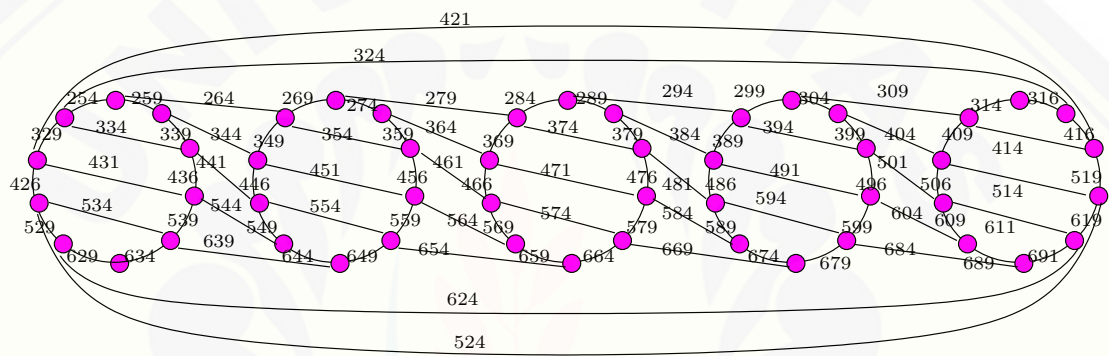
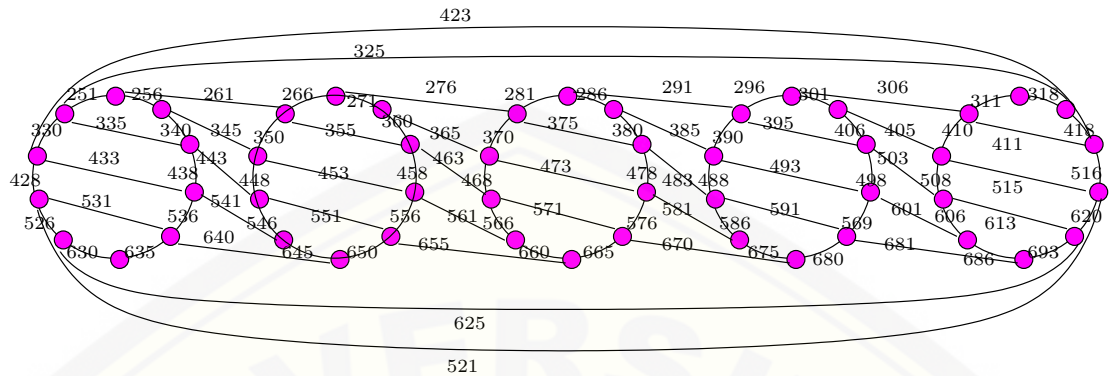
$$w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c = \frac{2mnk-2mk-3k+16mjk-4c+5}{2};$$

$c$  ganjil  
 untuk  $4 \leq j \leq \frac{n-2}{2}$ ,  
 $j = 4 \pmod{3}$ ,  $i = m$ ,  
 $c$  sembarang

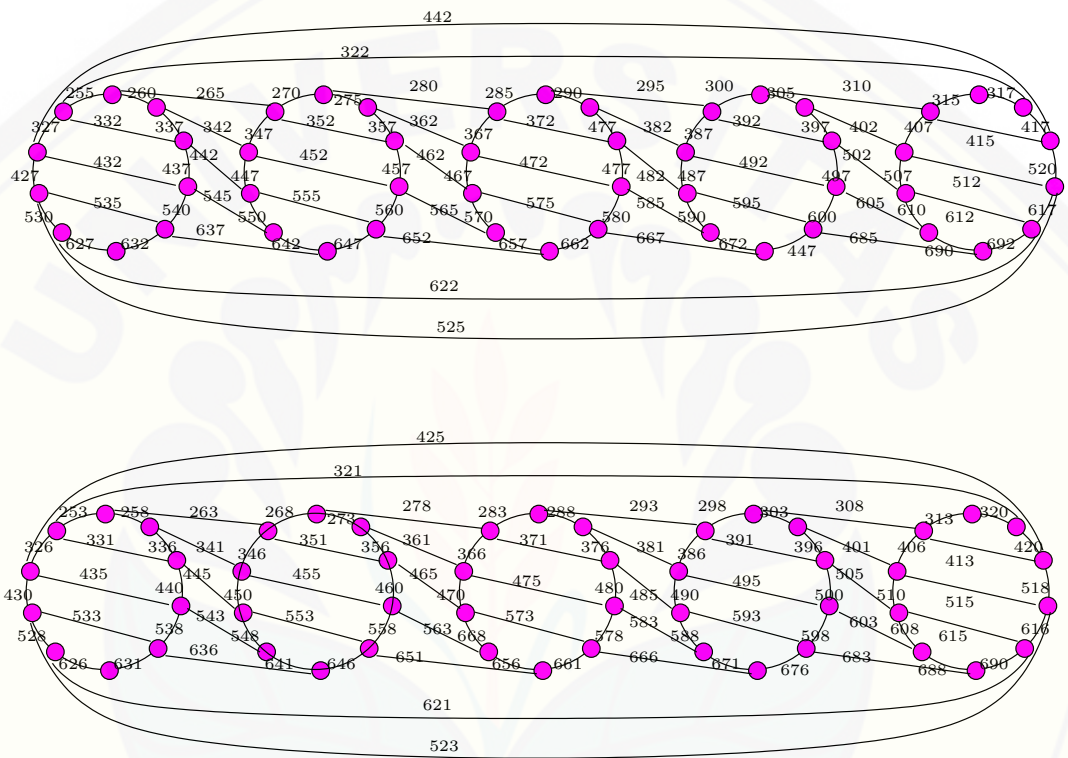
$$\begin{aligned}
 w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{10mnk-18mk-7k+12ik-4c+5}{2}; && \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \\
 &&& 1 \leq i \leq m-1, \\
 &&& c \text{ sembarang} \\
 w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{10mnk-18mk-3k+12ik-4c+5}{2}; && \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \\
 &&& 1 \leq i \leq m-1, \\
 &&& c \text{ sembarang} \\
 w_{f_7}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{10mnk-18mk-k+12ik-4c+5}{2}; && \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \\
 &&& 1 \leq i \leq m-2, \\
 &&& c \text{ sembarang} \\
 w_{f_7}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{10mnk-6mk-15k+2c+3}{2}; && \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m-1, \\
 &&& c \text{ ganjil} \\
 w_{f_7}(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1})^c &= \frac{10mnk-6mk-13k+2c+3}{2}; && \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m-1, \\
 &&& c \text{ genap} \\
 w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{10mnk-6mk-11k+2c+3}{2}; && \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \quad i = m, \\
 &&& c \text{ ganjil} \\
 w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{10mnk-6mk-9k+2c+3}{2}; && \text{untuk } j = \frac{n+2}{2}, \quad i = m, \\
 &&& c \text{ genap} \\
 w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{10mnk-6mk-7k+2c+1}{2}; && \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m, \\
 &&& c \text{ genap} \\
 w_{f_7}(x_{i,j}x_{i,j+1})^c &= \frac{10mnk-6mk-5k+2c+1}{2}; && \text{untuk } j = \frac{n}{2}, \quad i = m, \\
 &&& c \text{ ganjil}
 \end{aligned}$$

Perhatikan Himpunan bobot sisi  $W_{f_7}$ . Tampak bahwa bobot sisi terkecil pertama terletak pada  $W_{f_7} : x_{i,n}^c x_{i,1}^c$  dengan  $i = 1$  dan  $c = 1$  yaitu  $\frac{2mnk+2mk+k+5}{2}$  sedangkan bobot sisi terbesar terletak pada  $W_{f_7} : x_{i,j}^c x_{i,j+1}^c$  dengan  $i = m$ ,  $j = \frac{n}{2}$  dan  $c = k$  yaitu  $\frac{10mnk-6mk-3k+1}{2}$ . Dapat dinyatakan bahwa  $W_{f_7}$  membentuk barisan aritmatika dengan suku awal  $\frac{2mnk+2mk+k+5}{2}$  dan beda 2 (dua), atau dapat dituliskan  $W_{f_7} = \{\frac{2mnk+2mk+k+5}{2}, \frac{2mnk+2mk+k+9}{2}, \dots, \frac{10mnk-6mk-3k+1}{2}\}$ . Dapat disimpulkan bahwa gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super( $a, d$ )-sisi antimagic dengan  $a = \frac{2mnk+2mk+k+5}{2}$  dan  $d = 2$  atau gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  mempunyai Super  $(\frac{2mnk+2mk+k+5}{2}, 2)$ -EAT; ,  $m \geq 3$ ,  $n \geq 10$  dan  $k \geq 3$ . Terlihat Gambar 4.8 merupakan contoh pelabelan total su-

per  $(\frac{2mnk+2mk+k+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic ( $SEATL$ ) pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$ .







Gambar 4.8 Graf  $5Tw_{5,10}$

Untuk pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  dengan  $d = 1$ , penulis akan membuktikannya melalui sebuah teorema yang sudah dibuktikan oleh Martin Baca yakni apabila pada graf tunggal memiliki pelabelan total super  $(a, 1)$ -sisi antimagic maka pasti pada gabungan graf nya memiliki pelabelan total super  $(a, 1)$ -sisi antimagic. Peneliti menggunakan teorema martin baca ini untuk membuktikan apakah gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  memiliki pelabelan total super  $(a, 1)$ -sisi antimagic.

◇ **Teorema 4.6.2.** *Ada pelabelan total super  $(2mnk + 2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$ .*

**Bukti.** Berdasarkan teorema martin baca untuk pelabelan super  $(a, d)$ -sisi antimagic, maka diperoleh rumusan:

$$f(x), x \in V(G_c) = k[(f_1)_c(x_{i,j}) - 1] + c; \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

dan

$$\delta(d), d \in E(G_c) = \begin{cases} k.(f_4)_c(x_{i,j}x_{i,j+1}) + 1 - c; & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ & 1 \leq j \leq n - 1 \\ k.(f_4)_c(x_{i,n}x_{i,1}) + 1 - c; & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ k.(f_4)_c(x_{i,j}x_{n-j+3}) + 1 - c; & \text{untuk } 1 \leq i \leq m \\ & 1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ k.(f_4)_c(x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}) + 1 - c; & \text{untuk } 1 \leq i \leq m - 1 \\ & 1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ k.(f_4)_c(x_{1,n-j+2}x_{m,j}) + 1 - c; & \text{untuk } 2 \leq j \leq \frac{n}{2} \end{cases}$$

Jika himpunan  $\{f_c(u) + f_c(v) + f_c(uv); uv \in E(G_c)\} = \{a, a+1, \dots, a+q-1\}$  merupakan himpunan bobot total dari gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  maka, berdasarkan rumus diatas diperoleh  $f(u) + f(v) + f(uv)$

$$= k[f_c(u) - 1] + c + k[f_c(v) - 1] + c + kf_c(uv) + 1 - c$$

$$= k[f_c(u) + f_c(v) + f_c(uv) - 2] + 1 + c$$

dan  $f_c(u) + f_c(v) + f_c(uv)$  merupakan bobot terkecil dari  $d = 1$  konektif. Sehingga dapat diperoleh bobot terkecil dari  $d = 1$  diskonektif sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 & \text{Bobot sisi terkecil adalah: } k[f_c(u) + f_c(v) + f_c(uv) - 2] + 1 + c \\
 &= k[f_c(u) + f_c(v) + f_c(uv) - 2] + 1 + c \\
 &= k[a - 2] + 1 + c \\
 &= k[2mn + 2 - 2] + 1 + 1 \\
 &= k[2mn] + 2 \\
 &= [2mnk + 2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Sedangkan bobot sisi terbesar, yaitu: } k[f_c(u) + f_c(v) + f_c(uv) - 2] + 1 + c \\
 &= k[f_c(u) + f_c(v) + f_c(uv) - 2] + 1 + c \\
 &= k[a + q - 2] + 1 \\
 &= k[2mn + 2 + 2mn - 2m - 1 - 2] + 1 \\
 &= k[4mn - 2m - 1] + 1 \\
 &= [4mnk - 2mk - k + 1]
 \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema Martin Baca telah disebutkan bahwa  $\bigcup_{s=1}^m G_s$  memiliki pelabelan super  $m(a - 2 + 2, 1)$ -EAT labeling. Jika  $a$  untuk graf Roda Tank tunggal adalah  $6n - 4n + 2$ , maka  $m(a - 2) + 2, 1) = 2mnk + 2$  sedangkan bobot terbesar didefinisikan oleh  $m(a + q - 2) + 1 = [4mnk - 2mk - k + 1]$ . Berdasarkan pembuktian diatas dapat disimpulkan bahwa gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  memiliki pelabelan super  $(2mnk + 2, 1)$ -sisi antimagic.  $\square$

#### 4.7 Berfikir Tingkat Tinggi Dalam Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic Pada Graf Roda Tank $cTw_{m,n}$

Pada subbab ini menjelaskan keterkaitan antara level berpikir menurut Bloom dengan proses pelabelan Super (a,d)-EATL Pada Graf Roda Tank.

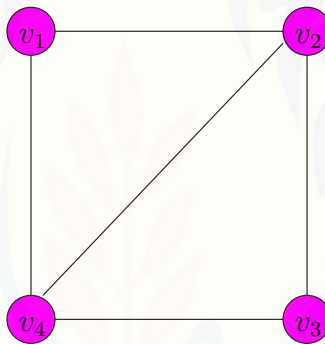
**Tahap 1. (Mengingat)**

**Kata kerja kunci:** Mengenali, menempatkan, menamai.

*Mengenali graf yang akan di bangun.*

Pada tahapan ini, seperti yang telah diketahui bahwa graf yang akan digunakan adalah graf berhingga yang tidak mempunyai loop dan sisi ganda serta bukan graf berarah. Yang dimaksud disini, graf yang akan dibentuk adalah graf yang jumlah titiknya berhingga  $m, n$  (memiliki 2 ekspansi) dihubungkan oleh sebuah sisi untuk pasangan titik yang sama dan sisi yang terbentuk tidak memiliki orientasi arah.

Mengingat kembali mengenai ordo (banyaknya titik) dan size (banyaknya sisi) juga diperlukan pada tahapan ini karena akan menentukan kardinalitas graf tersebut. sebagai contoh:



Gambar 4.9

gambar 4.9 menunjukkan sebuah contoh graf yang berordo 4 dengan himpunan titik  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  dengan himpunan sisi  $\{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_1\}$ . misalkan  $u$  dan  $v$  merupakan titik-titik dari graf  $G$ ,  $u$  dikatakan bertetangga dengan  $v$  jika terdapat sebuah sisi  $e$  yang menghubungkan  $u$  dan  $v$ , yaitu  $e = uv$ .

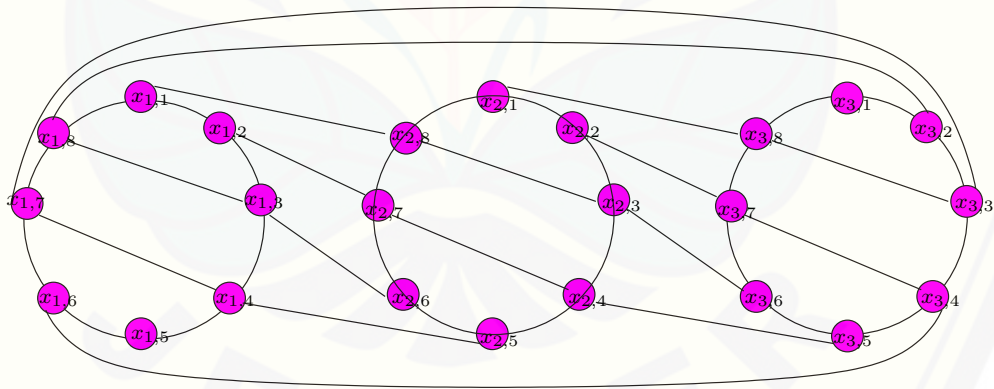
Pada graf yang diteliti ini, pembuatannya berasal dari mengembangkan graf lingkaran dengan memperbanyak lingkaran yang telah dibangun dengan menambahkan sisi pada bagian lingkaran itu sendiri, menambahkan sisi pada lingkaran satu dengan lingkaran berikutnya serta penambahan sisi pada lingkaran pertama dengan lingkaran terakhir. Nama graf yang diberikan adalah graf Roda Tank,

karena bentuk yang menyerupai roda pada tank yang diselubungi oleh sisi pada bagian awal dan akhirnya. Karena graf Roda Tank memiliki 2 ekspan yakni pada bagian lingkaran dan memperbanyak lingkaran maka notasi untuk graf Roda Tank adalah  $Tw_{m,n}$ .

Selain mengingat batasan-batasan yang ada pada graf yang akan dibangun yaitu mengenai lemma dan teorema apa saja yang diperlukan dalam proses menuju terciptanya lemma dan teorema yang baru. Dalam hal ini, lemma yang digunakan pada pembuktian  $d = 1$  graf Roda Tank tunggal yaitu milik Dafik, Robiyatul pada tahun 2014, sedangkan untuk  $d = 1$  teorema yang digunakan adalah milik Martin Baca yang meyakini bahwa jika pada graf tunggal memiliki  $(a,1)$ -sisi antimagic maka pada graf gabungannya memiliki  $(a,1)$ -sisi antimagic juga.

**Tahap 2. (Memahami)**  
**Kata kunci:** menguraikan dan menjelaskan menjelaskan kesesuaian graf Roda Tank dan definisi dari graf Roda Tank.

Pada tahap kedua yaitu memahami, dalam tahapan ini setelah diketahui graf yang telah dibangun sesuai dengan batasan yang telah ada, maka hal selanjutnya yang perlu dilakukan adalah menentukan kardinalitas pada graf tersebut. Graf Roda Tank dapat dilihat pada gambar 4.10



Gambar 4.10 Graf Roda Tank

Sebelum menentukan kardinalitas graf tersebut, pemahaman mengenai definisi dari graf Roda Tank ini diperlukan untuk mengklasifikasikan setiap definisi



titik dan sisinya. Definisi pada graf Roda Tank yakni:

1. untuk titik :  $V(Tw_{m,n}) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ .
2. untuk sisi:  $E(Tw_{m,n}) = \{x_{i,j}x_{i,j+1}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_{i,n}x_{i,1}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{x_{i,j}x_{i,n-j+3}; 1 \leq i \leq m, 3 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}; 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq \frac{n}{2}\} \cup \{x_{1,n-j+2}x_{m,j}; 2 \leq j \leq \frac{n}{2}\}$

Untuk pendefinisian dari titik yakni dikarenakan graf Roda Tank memiliki dua kali eksplan maka indeks yang digunakan menggunakan dua huruf yakni  $i$  dan  $j$ , indeks  $i$  menggambarkan lingkaran yang dibuat oleh graf itu sendiri sebanyak  $m$ , sedangkan indeks  $j$  menggambarkan titik yang terdapat didalam setiap lingkaran yaitu sebanyak  $n$ . Untuk Pendefinisian dari sisi yakni:

1.  $\{x_{i,j}x_{i,j+1}\}$ , dapat dilihat pada gambar 4.10 titik  $x_{1,1}$  bertetangga dengan  $x_{1,2}$ ,  $x_{1,2}$  bertetangga dengan  $x_{1,3}$ , dan seterusnya hingga  $x_{1,7}$  bertetangga dengan  $x_{1,8}$  yang kemudian didefinisikan  $\{x_{i,j}x_{i,j+1}\}$ .
2.  $\{x_{i,n}x_{i,1}\}$ , dapat dilihat pada gambar 4.10 titik  $x_{1,8}$  bertetangga dengan  $x_{1,1}$ ,  $x_{2,8}$  bertetangga dengan  $x_{2,1}$ , dan seterusnya hingga  $x_{3,8}$  bertetangga dengan  $x_{3,1}$  yang kemudian didefinisikan  $\{x_{i,n}x_{i,1}; 1 \leq i \leq m\}$ .
3.  $\{x_{i,j}x_{i,n-j+3}\}$ , dapat dilihat pada gambar 4.10 titik  $x_{1,3}$  bertetangga dengan  $x_{1,8}$ ,  $x_{1,4}$  bertetangga dengan  $x_{1,7}$ , dan seterusnya hingga  $x_{3,4}$  bertetangga dengan  $x_{3,7}$  yang kemudian didefinisikan  $\{x_{i,j}x_{i,n-j+3}\}$ .
4.  $\{x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}\}$ , dapat dilihat pada gambar 4.10 titik  $x_{1,1}$  bertetangga dengan  $x_{2,8}$ ,  $x_{1,2}$  bertetangga dengan  $x_{2,7}$ , dan seterusnya hingga  $x_{2,4}$  bertetangga dengan  $x_{3,5}$  yang kemudian didefinisikan  $\{x_{i,j}x_{i+1,n-j+1}\}$ .
5.  $\{x_{1,n-j+2}x_{m,j}\}$ , dapat dilihat pada gambar 4.10 titik  $x_{1,6}$  bertetangga dengan  $x_{3,4}$ ,  $x_{1,7}$  bertetangga dengan  $x_{3,3}$ , dan seterusnya hingga  $x_{1,8}$  bertetangga dengan  $x_{3,2}$  yang kemudian didefinisikan  $\{x_{1,n-j+2}x_{m,j}\}$ .

Pada kardinalitas, terdapat istilah order ( $|V|$ ) dan size ( $|E|$ ) yang diperlukan untuk langkah selanjutnya. Graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  memiliki order  $|V| = mn$

yang didapatkan dari banyaknya titik ( $n$ ) yang terdapat didalam lingkaran dan banyaknya lingkaran ( $m$ ) yang dibentuk oleh graf tersebut. Sedangkan size yang diperoleh pada graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  adalah penjumlahan dari setiap klasifikasi pada pendefinisian sisinya. size yang didapatkan adalah  $|E| = mn + \frac{mn-n}{2} + \frac{n-2}{2} + \frac{nm-4m}{2} = 2mn - 2m - 1$ .

**Tahap 3. (Menerapkan)**  
**Kata kerja kunci:** *menunjukkan*  
 menunjukkan batas atas yang ada pada graf Roda Tank.

Pada Tahapan ini, setelah diketahui kardinalitas yang terdapat pada graf Roda Tank, Langkah selanjutnya yakni menentukan batas atas yang ada pada graf Roda Tank. Telah ditemukan pada subbab hasil penelitian mengenai batas atas  $d$  graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  bahwa batas atasnya yakni  $d \leq 2$ . Ini berlaku pada graf Roda Tank tunggal dan gabungan.

Graf yang memiliki batas atas  $\{0, 1, 2\}$ , berarti memiliki label sisi dengan menggunakan pola yang pada setiap batas atas yang telah ditemukan. Untuk  $d = 0$  pola yang digunakan untuk melabeli label sisinya adalah sebagai berikut:

<i>Bobot</i>	<i>Sisi</i>	3	4	5	6	7	
<i>Label</i>	<i>Sisi</i>	12	11	10	9	8	+
		15	15	15	15	15	

Gambar 4.11  $d=0$

Seperti yang terlihat pada pola pelabelan gambar 4.11 , untuk mendapatkan bobot total dengan beda 0 maka teknik penempatan label sisi dimulai dari belakang menuju ke bobot awal sehingga memiliki beda 0 pada urutan bobot sisi yang telah ditemukan. Teknik ini berlaku pada graf tunggal maupun gabungan.

Seperti yang terlihat pada pola pelabelan gambar 4.12 , untuk mendapatkan bobot total dengan beda 2 maka teknik penempatan label sisi sama seperti urutan

<i>Bobot</i>	<i>Sisi</i>	3	4	5	6	7	
<i>Label</i>	<i>Sisi</i>	8	9	10	11	12	
							+
		11	13	15	17	19	

Gambar 4.12 d=2

bobot sisi yang telah ditemukan. Teknik ini berlaku pada graf tunggal maupun gabungan.

<i>Bobot</i>	<i>Sisi</i>	3	4	5	6	7	
<i>Label</i>	<i>Sisi</i>	11	12	8	9	10	
							+
		14	16	13	15	17	

Gambar 4.13 d=1

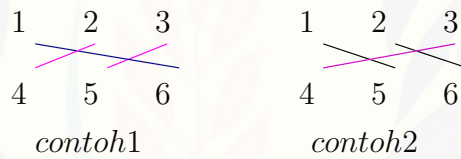
Seperti yang terlihat pada pola pelabelan gambar 4.13 , untuk mendapatkan bobot total dengan beda 1 maka teknik penempatan label sisi dimulai dari tengah menuju kebagian akhir dilanjutkan dengan penempatan label yang dimulai dari awal menuju ke tengah sehingga memiliki beda 1 pada urutan bobot sisi yang telah ditemukan. Teknik ini berlaku pada graf tunggal maupun gabungan.

**Tahap 4. (Menganalisis)**  
*Kata kerja kunci: menduga*  
*Menduga bahwa pelabelan graf Roda Tank berpola pada tunggal maupun gabungannya.*

Pada tahapan ini, yang dilakukan adalah menduga apakah pelabelan pada graf Roda Tank ( $Tw_{m,n}$ ) berpola atau tidak, dengan mencoba berbagai macam teknik pelabelan agar menjadi pelabelan total super sisi antimagic. Hal ini dilakukan pada graf Roda Tank tunggal maupun gabungannya. Dikatakan menjadi super sisi antimagic apabila pelabelan pada setiap titiknya berurutan dari  $1, 2, \dots, p$  dan sisinya juga membentuk bilangan berurutan dengan menjumlahkan dua titik berdekatan.

Untuk menemukan sebuah pola, masih belum ditemukan teknik yang pasti untuk melabeli setiap graf yang dibuat. Misalnya saja pada pelabelan yang dimiliki oleh graf lingkaran atau graf *cycle*. Pada graf ini, pelabelan yang dilakukan adalah dengan meloncati satu titik berikutnya setelah melabeli titik yang ada, maka akan didapatkan bobot total yang berurutan. Pada graf Roda Tank, meskipun memiliki famili dari graf lingkaran namun pelabelan yang dilakukan tidak mengacu pada pelabelan graf lingkaran. Pelabelan pada Graf Roda Tank tunggal ini, dimulai dari titik bagian atas menuju ke bagian atas lingkaran yang lain dilanjutkan dengan pelabelan pada bagian kedua dari atas menuju ke bagian kedua lingkaran yang lain, dan begitu seterusnya maka akan didapati bobot yang berurutan seperti pada gambar 4.2 .

Setelah ditemukan pola yang ada pada graf Roda Tank tunggal, langkah selanjutnya yakni menduga pola yang dapat dibangun pada graf Roda Tank gabungan. Dalam menempatkan label titik agar didapatkan bobot sisi yang berurutan maka dapat menggunakan teknik berikut:



Gambar 4.14 gabungan 3

Apabila dikembangkan menjadi gabungan 5, maka dapat menggunakan teknik berikut:



Gambar 4.15 gabungan 5

Setelah diketahui bahwa batas atas yang diperoleh adalah  $d = 0, 1, 2$ , maka apakah pelabelan pada graf Roda Tank tunggal maupun gabungannya memiliki (a,d)-sisi antimagic.

**Tahap 5. (Mengevaluasi)**  
*Kata kerja kunci: mengecek dan mengkaji ulang*  
*Mengkaji ulang dan mengecek pola tersebut pada setiap ekspannya.*

Tahapan selanjutnya yaitu mengecek apakah pola yang telah diterapkan pada graf Roda Tank di tahapan sebelumnya dapat berlaku juga pada ekspanannya. Jika pelabelan yang dilakukan pada graf tersebut memiliki pola yang sama setiap ekspanannya, maka langkah selanjutnya yakni mengkaji ulang apa saja syarat yang diperlukan oleh setiap pengelompokan sehingga dapat dengan mudah memformulakannya.

$j \backslash i$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	7	9	11	13	15
3	17	19	21	23	25
4	27	29	31	33	35
5	36	37	38	39	40
6	6	8	10	12	14
7	16	18	20	22	24
8	26	28	30	32	34

Gambar 4.16 klasifikasi fungsi titik

Pada gambar 4.16 merupakan semua label titik yang ada pada graf Roda Tank tunggal dengan  $m = 5$  dan  $n = 8$  atau  $Tw_{5,8}$ . Pada gambar tersebut belum menampakkan beda yang konsisten antara  $i$  yang berjalan dan  $j$  yang berjalan. oleh karena itu, pengelompokan ini sangat diperlukan untuk mendapatkan beda yang konsisten sehingga fungsinya dapat ditemukan. Label titik  $f(x_{i,j})$  pada Graf  $Tw_{5,8}$  memiliki 4 kelompok sebagai berikut:



1. untuk  $j = 1$ , sembarang  $i$ , batasan ini didapatkan karena  $j = 1$  tidak memiliki beda yang konsisten dengan  $j$  yang lain.
2. untuk  $\frac{n+4}{2} \leq j \leq n$ , sembarang  $i$ , batasan ini didapatkan karena  $j$  yang berjalan dari  $\frac{n+4}{2}$  memiliki beda yang konsisten sampai pada  $j = n$  sedangkan  $i$  nya selalu memiliki beda yang sama pada  $i$  sembarang.
3. untuk  $2 \leq j \leq \frac{n}{2}$ , sembarang  $i$ , batasan ini didapatkan karena  $j$  yang berjalan dari 2 memiliki beda yang konsisten sampai pada  $j = \frac{n}{2}$  sedangkan  $i$  nya selalu memiliki beda yang sama pada  $i$  sembarang.
4. untuk  $j = \frac{n+2}{2}$ , sembarang  $i$ , batasan ini didapatkan karena  $j = \frac{n+2}{2}$  tidak memiliki beda yang konsisten dengan  $j$  yang lain.

$j \backslash i$	1	2	3	4	5
1	8	11	14	17	20
2	24	28	32	36	40
3	44	48	52	56	60
4	63	66	69	72	75
5	62	65	68	71	74
6	42	46	50	54	58
7	22	26	30	34	38

Gambar 4.17 klasifikasi bobot sisi

Pada gambar 4.17, belum tampak beda yang konsisten dari  $i$  dan  $j$  yang berjalan, oleh karena itu pengelompokan juga perlu dilakukan untuk mempermudah menemukan fungsi pada bobot sisi ini. Namun hal ini berbeda dengan gambar 4.18, pada gambar tersebut sudah tampak beda yang akan digunakan untuk menemukan rumus fungsi bobot sisi, maka tidak diperlukan lagi pengelompokan.

Pengkajian ulang ini dilakukan pada setiap rumusan mulai dari fungsi titik sampai bobot total dengan  $d = \{0, 1, 2\}$  yang akan ditemukan baik tunggal

$j \setminus i$	1	2	3	4	5
8	7	10	13	16	19

 $f(x_{i,n}x_{i,1})$ 

$j \setminus i$	1
2	21
3	41
4	61

 $f(x_{1,n-j+2}x_{m,j})$ 

Gambar 4.18 klasifikasi bobot sisi

maupun gabungannya.

**Tahap 6. (Mencipta)**  
**Kata kerja kunci:** memformulasikan dan menemukan  
 Memformulasikan rumus yang telah diperoleh menjadi lemma dan teorema yang baru.

Tahapan yang terakhir adalah mencipta, kata kunci yang digunakan untuk tahapan ini adalah memformulasikan dan menemukan. Memformulasikan yang dimaksud adalah bagaimana fungsi yang ditemukan setelah proses pada tahapan sebelumnya yakni pengelompokan pada beda yang konsisten. Untuk hasil dari formulasi ini didapatkan beberapa rumusan antara lain:

1. untuk Graf Roda Tank tunggal ( $Tw_{m,n}$ ):
  - (a) Fungsi titik terdiri dari 4 rumus yang telah ditemukan.
  - (b) Bobot sisi terdiri dari 11 rumus yang telah ditemukan.
  - (c) Fungsi sisi dengan  $d = 0$  terdiri dari 11 rumus yang telah ditemukan
  - (d) Fungsi sisi untuk  $d = 2$  terdiri dari 11 rumus yang telah ditemukan.
  - (e) Fungsi sisi untuk  $d = 1$  terdiri dari 17 rumus yang telah ditemukan.
2. untuk graf Roda Tank gabungan ( $cTw_{m,n}$ ):
  - (a) Fungsi titik terdiri dari 19 rumus yang telah ditemukan.
  - (b) Bobot sisi terdiri dari 52 rumus yang telah ditemukan.

- (c) Fungsi sisi dengan  $d = 0$  terdiri dari 52 rumus yang telah ditemukan
- (d) Fungsi sisi untuk  $d = 2$  terdiri dari 52 rumus yang telah ditemukan.
- (e) Fungsi sisi untuk  $d = 1$  terdiri dari 103 rumus yang telah ditemukan.

Dari rumusan yang telah diketahui ini, akan diperoleh suatu lema dan teorema yang baru mengenai sisi antimagic pada graf Roda Tank ini. Sesuai dengan tujuan penelitian yakni untuk mengetahui pelabelan total super  $(a,d)$ -EATL pada graf Roda Tank tunggal maupun yang gabungannya, dimana  $a$  adalah bobot sisi terkecil dan  $d$  adalah nilai bedanya. Berikut ini adalah hasil dari pelabelan total super sisi antimagic yang kemudian dijadikan suatu teorema mengenai graf Roda Tank tersebut, diantaranya:

1. untuk Graf Roda Tank tunggal ( $Tw_{m,n}$ ):
  - (a) untuk pelabelan bobot total  $d = 0$  ditemukan bahwa graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic dengan  $a = 3mn - m + 1$ , dengan kata lain graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super  $(3mn - m + 1, 0)$ -sisi antimagic.
  - (b) untuk pelabelan bobot total  $d = 2$  ditemukan bahwa graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic dengan  $a = mn + m + 3$ , dengan kata lain graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super  $(mn + m + 3, 2)$ -sisi antimagic.
  - (c) untuk pelabelan bobot total  $d = 1$  ditemukan bahwa graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic dengan  $a = 2mn + 2$ , dengan kata lain graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super  $(2mn + 2, 1)$ -sisi antimagic.
2. untuk graf Roda Tank gabungan ( $cTw_{m,n}$ ):
  - (a) untuk pelabelan bobot total  $d = 0$  ditemukan bahwa gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  dengan  $m \geq 3$  dan  $n \geq 10$  mempunyai pelabelan total super  $(a,d)$ -sisi antimagic dengan  $a = \frac{6mnk-2mk-k+3}{2}$ , atau gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super  $(\frac{6mnk-2mk-k+3}{2}, 0)$ -sisi antimagic.

- (b) untuk pelabelan bobot total  $d = 2$  ditemukan bahwa gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic dengan  $a = \frac{2mnk+2mk+k+5}{2}$  dan  $d = 2$  atau gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  mempunyai Super  $(\frac{2mnk+2mk+k+5}{2} - 2mn + 2, 2)$ -sisi antimagic.
- (c) untuk pelabelan bobot total  $d = 1$  ditemukan bahwa graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  mempunyai pelabelan super  $(2mnk + 2, 1)$ -sisi antimagic.

#### 4.8 Hasil dan Pembahasan

Penelitian ini bertujuan untuk mencari batas atas  $d$  dari Graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  maupun gabungan Graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  mempunyai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic, selanjutnya dicari pelabelan pada graf tersebut dan ditentukan konstruksi fungsi bijektifnya. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh nilai  $d$  yang mungkin untuk pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  maupun gabungannya  $cTw_{m,n}$  adalah  $d \in \{0, 1, 2\}$ . Setelah menentukan nilai  $d$ , peneliti mencari pelabelan sesuai dengan nilai  $d$  yang telah ditentukan.

Dari hasil penelitian sesuai dengan nilai  $d$  tersebut, diperoleh 2 (dua) lemma dan 4 (empat) teorema baru tentang pelabelan Graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  maupun gabungannya  $cTw_{m,n}$ , yaitu:

1. Ada pelabelan titik  $(m + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $(Tw_{m,n})$  jika  $n \geq 8$ ,  $n$  genap dan  $m \geq 3$  yang telah dibuktikan pada lemma 4.4.1.
2. Ada pelabelan total super  $(3mn - m + 1, 0)$ , dan  $(mn + m + 3, 2)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  jika  $m \geq 3$  dan  $n \geq 8$ ,  $n$  genap. Pada kasus ini dibagi menjadi dua kasus yakni  $d = 0$  dan  $d = 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.4.1..
3. Ada pelabelan total super  $(2mn + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  jika  $m \geq 3$ ,  $m$  ganjil dan  $n \geq 8$ ,  $n$  genap yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.4.2.

4. Ada pelabelan titik  $(\frac{mn+1}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan Graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$ ,  $n = 6q + 4$ ,  $q$  sembarang dan  $c \geq 3$ ,  $c$  ganjil, telah dibuktikan pada lemma 4.6.1.
5. Ada pelabelan total super  $(\frac{6mnk-2mk-k+3}{2}, 0)$ , dan  $(\frac{2mnk+2mk+k+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.6.1.
6. Ada pelabelan total super  $(2mnk + 2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.6.2.

Berdasarkan hasil penelitian tersebut, dapat diketahui bahwa untuk nilai batas atas  $d$  yang berlainan maka nilai awal  $a$  juga akan berlainan. Namun demikian seluruh label titik dan seluruh label bobot sisi yang digunakan sama baik untuk  $d = 0$ ,  $d = 1$  maupun untuk  $d = 2$ , label titik yang digunakan adalah dari 1 hingga  $p$  dimana  $p$  adalah jumlah titik pada graf sedangkan label untuk sisi yang digunakan adalah dimulai dari  $p + 1$  hingga  $p + q$  dimana  $q$  merupakan jumlah sisi, sehingga  $p + q$  merupakan jumlah titik dan sisi pada graf. Jika kedua label tersebut digunakan untuk melabeli sebuah graf dengan aturan yang diberikan diatas maka pelabelan tersebut disebut sebagai pelabelan total. Pada graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  tunggal untuk nilai  $d = 0$  dan  $d = 2$  berlaku dengan syarat jika  $m \geq 3$  dan  $n \geq 8$ ,  $n$  genap. Sedangkan untuk  $d = 1$  tunggal berlaku syarat jika  $m \geq 3$ ,  $m$  ganjil dan  $n \geq 8$ ,  $n$  genap. Pada graf gabungan  $cTw_{m,n}$  untuk nilai  $d = 0$ ,  $d = 1$  dan  $d = 2$  berlaku dengan syarat jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$ ,  $n = 6q + 4$ ,  $q$  sembarang dan  $c \geq 3$ ,  $c$  ganjil.

Pada uraian hasil di atas, ditunjukkan secara rinci fungsi bijektif pelabelan titik  $(3mn - m + 1, 0)$ , dan  $(mn + m + 3, 2)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ , pelabelan titik  $(2mn + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ , pelabelan total super  $(\frac{6mnk-2mk-k+3}{2}, 0)$ , dan  $(\frac{2mnk+2mk+k+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$ . Sedangkan untuk pelabelan total super  $(2mnk + 2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  di buktikan menggunakan teorema martin.

Berdasarkan dari hasil perhitungan terdapat beberapa permasalahan yang



ditemukan dan sulit untuk diselesaikan. Open problem yang belum ditemukan sebagai berikut:

**Masalah terbuka 4.8.1.** *Pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada konektif graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ , dengan  $m$  genap untuk  $d = 1$ , pada konektif graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ , dengan  $n$  ganjil dan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$ , dengan  $1 \leq c \leq k$ ;  $k$  genap untuk  $d = 0, 1, 2$ .*



## BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Graf Roda Tank konektif ( $Tw_{m,n}$ ) memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic untuk  $d = 0, 1, 2$ . Hasil penelitiannya telah dibuktikan bahwa ada pelabelan titik  $(m + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank ( $Tw_{m,n}$ ) jika  $n \geq 8$ ,  $n$  genap dan  $m \geq 3$  yang telah dibuktikan pada lemma 4.4.1. Ada pelabelan total super  $(3mn - m + 1, 0)$ , dan  $(mn + m + 3, 2)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  jika  $m \geq 3$  dan  $n \geq 8$ ,  $n$  genap. Pada kasus ini dibagi menjadi dua kasus yakni  $d = 0$  dan  $d = 2$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.4.1. Serta ada pelabelan total super  $(2mn + 2, 1)$ -sisi antimagic pada graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$  jika  $m \geq 3$ ,  $m$  ganjil dan  $n \geq 8$ ,  $n$  genap yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.4.2.
2. Graf Roda Tank diskonektif ( $cTw_{m,n}$ ) memiliki pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic untuk  $d = 0, 1, 2$ . Hasil penelitiannya telah dibuktikan bahwa ada pelabelan titik  $(\frac{mn+1}{2}, 1)$ -sisi antimagic pada diskonektif Graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  jika  $m$  ganjil,  $m \geq 3$ ,  $n = 6q + 4$ ,  $q$  sembarang dan  $c \geq 3$ ,  $c$  ganjil, telah dibuktikan pada lemma 4.6.1. Ada pelabelan total super  $(\frac{6mnk-2mk-k+3}{2}, 0)$ , dan  $(\frac{2mnk+2mk+k+5}{2}, 2)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.6.1. Dan ada pelabelan total super  $(2mnk + 2, 1)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$  yang telah dibuktikan melalui pembuktian teorema 4.6.2.
3. Kaitan antara keterampilan berpikir tingkat tinggi dengan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic yakni dalam penemuan teorema pada batas atas yang telah ditentukan, yaitu dimulai dari mengenali graf yang akan di

bangun, menjelaskan kesesuaian graf Roda Tank dan definisi dari graf Roda Tank, menunjukkan batas atas yang ada pada graf Roda Tank, menduga bahwa pelabelan graf Roda Tank berpola pada tunggal maupun gabungannya, mengkaji ulang dan mengecek pola tersebut pada setiap ekspannya, memformulasikan rumus yang telah diperoleh menjadi teorema yang baru.

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada Graf Roda Tank  $(Tw_{m,n})$  serta mengacu pada *open problem* dari hasil penelitian yang telah ditemukan, maka peneliti memberikan saran pembaca dapat melakukan penelitian pada Pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada konektif graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ , dengan  $m$  genap untuk  $d = 1$ , pada konektif graf Roda Tank  $Tw_{m,n}$ , dengan  $n$  ganjil dan pelabelan total super  $(a, d)$ -sisi antimagic pada gabungan graf Roda Tank  $cTw_{m,n}$ , dengan  $1 \leq c \leq k$ ;  $k$  genap untuk  $d = 0, 1, 2$ .

DAFTAR PUSTAKA

- Adawiyah, R. 2014. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Lam-pion.*(vol.6 No 1)
- Albirri, E.R 2014. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Rantai Pentagon.*(vol.6 No 1)
- Chartrand,G. 2009 . *Introductory Graph Theory.* United Stated of America: dover publication inc
- Dafik. 2009. *Pemodelan Matematika.* Jember :Universitas Jember
- Dafik, dkk. 2009. *On Super (a,d)-Edge anti magic Total Labeling of Disconnected graphs.* (Jurnal discrete mathematics jilid 309 halaman 4909-4915)
- Hadi, D.A. 2014. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Ulat Su-tra.*(vol.6 No 1)
- Isnawati, L. 2013. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Tunas Kelapa.*(vol.4 No 1)
- Kozig and A. Rosa. *magic valuations of finite graph, Canad. Math. Bull.*13. (1970),451-461
- Muhlisatul. 2014. *Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Tri-bun.*(vol.6 No 1)
- Munir, Rinaldi. 2012. *Matematika Diskrit: Edisi kelima.* Bandung: Informatika Bandung

Santrock, John. 2008. *Psikologi Pendidikan*. Jakarta: Salemba Humanika

Umilasari, R. 2013. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Ufo*. (vol.4 No 1)

Utari, Retno. 2008. *Taksonomi Bloom: Apa dan Bagaimana cara menggunakannya*. Pusdiklat KNPk, Widyaaiswara Madya

