



**PENGEMBANGAN HIMPUNAN DOMINASI DAN
HIMPUNAN TOTAL DOMINASI PADA HASIL
OPERASI GRAF**

SKRIPSI

Oleh

**Nurma Yunita Sari
NIM 101810101041**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015**



**PENGEMBANGAN HIMPUNAN DOMINASI DAN
HIMPUNAN TOTAL DOMINASI PADA HASIL
OPERASI GRAF**

SKRIPSI

diajukan guna melengkapi tugas akhir dan memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan Program Studi Matematika (S1) dan mencapai gelar Sarjana Sains

Oleh

**Nurma Yunita Sari
NIM 101810101041**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS JEMBER
2015**

HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan menyebut nama Allah S.W.T yang maha pengasih lagi maha penyayang, serta sholawat atas Nabi Muhammad S.A.W, kupersembahkan sebuah kebahagiaan dalam perjalanan hidupku teriring rasa terima kasihku yang terdalam kepada:

1. Orang tuaku tercinta dan terkasih : Ayahanda Praseno dan Ibunda Guminem, serta kedua Adikku Galang Daka Suseno dan Gilang Diki Suseno, yang selalu memberikan rasa kasih sayangnya serta doa yang tiada pernah putus yang selalu mengiringiku dalam meraih cita-cita;
2. Ibu Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si. dan Bapak Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D. yang selalu sabar dan tulus ikhlas membimbing saya sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan;
3. Guru dan dosen-dosenku, yang telah memberikan ilmu dan membimbing saya dengan penuh kesabaran;
4. Sahabat-sahabat terbaikku: Dara, Dwi, Ica, Ummi, Risma, Rimbi, Fahma, Khusnul, Fani, Cyten, Iil, Fia, Diana, Hendry, Latifah, Muafa, Rida dan Misi semua sahabat yang belum disebutkan yang senantiasa membantu dan menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
5. Teman-teman pejuang graf yang selalu berbagi suka maupun duka dan selalu memberikan dukungan untuk terus semangat;
6. Teman-teman angkatan 2010 FMIPA Matematika yang selalu menorehkan sebuah pengalaman indah yang tak terlupakan;
7. Almamater tercinta Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

MOTTO

"Orang-orang hebat di bidang apapun bukan baru bekerja karena mereka terinspirasi, namun mereka menjadi terinspirasi karena mereka lebih suka bekerja. Mereka tidak menyia-nyiakan waktu untuk menunggu inspirasi."

(Ernest Newman)

"Bagian terbaik dari hidup seseorang adalah perbuatan-perbuatan baiknya dan kasihnya yang tidak diketahui orang lain."

(William Wordsworth)

"Banyak kegagalan dalam hidup ini dikarenakan orang-orang tidak menyadari betapa dekatnya mereka dengan keberhasilan saat mereka menyerah."

(Thomas Alva Edison)

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nurma Yunita Sari

NIM :101810101041

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi yang berjudul: Pengembangan Himpunan Dominasi dan Himpunan Total Dominasi pada Hasil Operasi Graf adalah benar-benar hasil karya sendiri, kecuali jika dalam pengutipan substansi disebutkan sumbernya, dan belum diajukan pada instansi manapun, serta bukan karya jiplakan. Saya bertanggung jawab atas keabsahan dan kebenaran isinya sesuai dengan sikap ilmiah yang harus dijunjung tinggi.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya, tanpa adanya tekanan dan paksaan dari pihak manapun serta bersedia mendapat sanksi akademik jika ternyata di kemudian hari pernyataan ini tidak benar.

Jember, Juni 2015

Yang menyatakan,

Nurma Yunita Sari

NIM. 101810101041

SKRIPSI

**PENGEMBANGAN HIMPUNAN DOMINASI DAN
HIMPUNAN TOTAL DOMINASI PADA HASIL
OPERASI GRAF**

Oleh

Nurma Yunita Sari
NIM 101810101041

Dosen Pembimbing 1 : Ika Hesti S.Si., M.Si
Dosen Pembimbing 2 : Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

PERSETUJUAN

**PENGEMBANGAN HIMPUNAN DOMINASI DAN HIMPUNAN
TOTAL DOMINASI PADA HASIL OPERASI GRAF**

SKRIPSI

diajukan guna memenuhi syarat untuk menyelesaikan pendidikan Program Sarjana Strata Satu Jurusan Matematika pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember

Nama Mahasiswa : Nurma Yunita Sari
NIM : 101810101041
Jurusan : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Angkatan Tahun : 2010
Daerah Asal : Situbondo
Tempat, Tanggal Lahir : Situbondo, 16 Juni 1992

Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ika Hesti Agustin. S.Si., M.Si,
NIP.19840801 200801 2 006

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.
NIP.19680802 199303 1 004

PENGESAHAN

Skripsi berjudul "Pengembangan Himpunan Dominasi dan Himpunan Total Dominasi pada Hasil Operasi Graf" telah diuji dan disahkan oleh Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam pada:

hari :

tanggal :

tempat : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Tim Penguji :

Dosen Pembimbing Utama,

Dosen Pembimbing Anggota

Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si.

NIP. 19840801 200801 2 006

Anggota I,

Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D.

NIP. 19680802 199303 1 004

Anggota II,

Kosala Dwidja Purnomo S.Si., M.Si.

NIP. 19690828 199802 1 001

M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc.

NIP. 19850111 200812 1 002

Mengesahkan

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Jember,

Prof. Kusno, M.Sc., Ph.D.

NIP. 1961018 198602 1 001

RINGKASAN

PENGEMBANGAN HIMPUNAN DOMINASI DAN HIMPUNAN TOTAL DOMINASI PADA HASIL OPERASI GRAF; Nurma Yunita Sari, 101810101041; 2015: 96 halaman; Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember.

Salah satu teori yang dikembangkan dalam teori graf adalah *dominating set* dan *total dominating set*. *Dominating set* merupakan suatu konsep penentuan titik seminimal mungkin pada graf dengan ketentuan titik sebagai *dominating set* menjangkau titik yang ada di sekitarnya. Kardinalitas terkecil dari *dominating set* disebut *domination number* yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Sedangkan total dominating set dinotasikan dengan $\gamma_t(G)$.

Dalam penelitian ini, peneliti menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif aksiomatik merupakan metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah.

1. **Teorema 4.0.1** Misal G adalah graf joint $C_n + Fl_m$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ memiliki domination number $\gamma(C_n + Fl_m) = 1$;
2. **Teorema 4.0.2** Misal G adalah graf joint $C_n + Fl_m$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ memiliki total domination number $\gamma_t(C_n + Fl_m) = 2$;
3. **Teorema 4.0.3** Misal G adalah graf joint $(P_n + M_{2m})$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$ memiliki domination number;

$$\gamma(P_n + M_{2m}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 2 \leq n \leq 3 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{untuk } n > 3 \end{cases}$$

4. **Teorema 4.0.4** Misal G adalah graf joint $(P_n + M_{2m})$, untuk $n \geq 2$ dan

$m \geq 2$ memiliki total domination number;

$$\gamma_t(P_n + M_{2m}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } 2 \leq n \leq 3 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{untuk } n > 3 \end{cases}$$

5. **Teorema 4.0.5** Misal G adalah graf joint $F_n + L_m$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ memiliki domination number $\gamma(F_n + L_m) = 1$;
6. **Teorema 4.0.6** Misal G adalah graf joint $C_n + Fl_m$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ memiliki total domination number $\gamma_t(F_n + L_m) = 2$;
7. **Teorema 4.0.7** Misal G adalah graf Crown Product $W_m \odot P_n$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ memiliki domination number $\gamma(W_m \odot P_n) = n + 1$;
8. **Teorema 4.0.8** Misal G adalah graf Crown Product $W_m \odot P_n$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$ memiliki total domination number $\gamma_t(W_m \odot P_n) = n + 1$;
9. **Teorema 4.0.9** Misal G adalah graf Composition $C_n[Fl_m]$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ memiliki domination number $\gamma(C_n[Fl_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$;
10. **Teorema 4.0.10** Misal G adalah graf Composition $C_n[Fl_m]$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ memiliki total domination number $\gamma_t(C_n[Fl_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$;
11. **Teorema 4.0.11** Misal G adalah graf Cartesian Product $F_n \square P_m$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ memiliki domination number $\gamma(F_n \square P_m) = m$;
12. **Teorema 4.0.12** Misal G adalah graf Cartesian Product $F_n \square P_m$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ memiliki total domination number $\gamma_t(F_n \square P_m) = m$;
13. **Teorema 4.0.13** Misal G adalah graf Amalgamation $Amal(F_n, v = A, r)$, untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$ memiliki domination number $\gamma(Amal(F_n, v = A, r)) = 1$;
14. **Teorema 4.0.14** Misal G adalah graf Amalgamation $Amal(F_n, v = A, r)$, untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$ memiliki total domination number $\gamma_t(Amal(F_n, v = A, r)) = 2$;

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul Pengembangan Himpunan Dominasi dan Himpunan Total Dominasi pada Hasil Operasi Graf. Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat untuk menyelesaikan pendidikan strata satu (S1) pada Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Prof. Drs. Kusno, DEA., Ph.D., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
2. Kosala Dwidja Purnomo S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
3. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Utama, Prof. Drs. Dafik, M.Sc., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Anggota, Kosala Dwidja Purnomo S.Si., M.Si., selaku dosen Penguji I dan M. Ziaul Arif, S.Si., M.Sc., selaku dosen penguji II yang telah meluangkan waktu, pikiran, dan perhatian dalam penulisan skripsi ini;
4. dosen dan karyawan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember;
5. semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga bantuan, bimbingan, dan dorongan beliau dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapat balasan yang sesuai dari-Nya. Selain itu, penulis juga menerima segala kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Penulis berharap, semoga skripsi ini dapat bermanfaat.

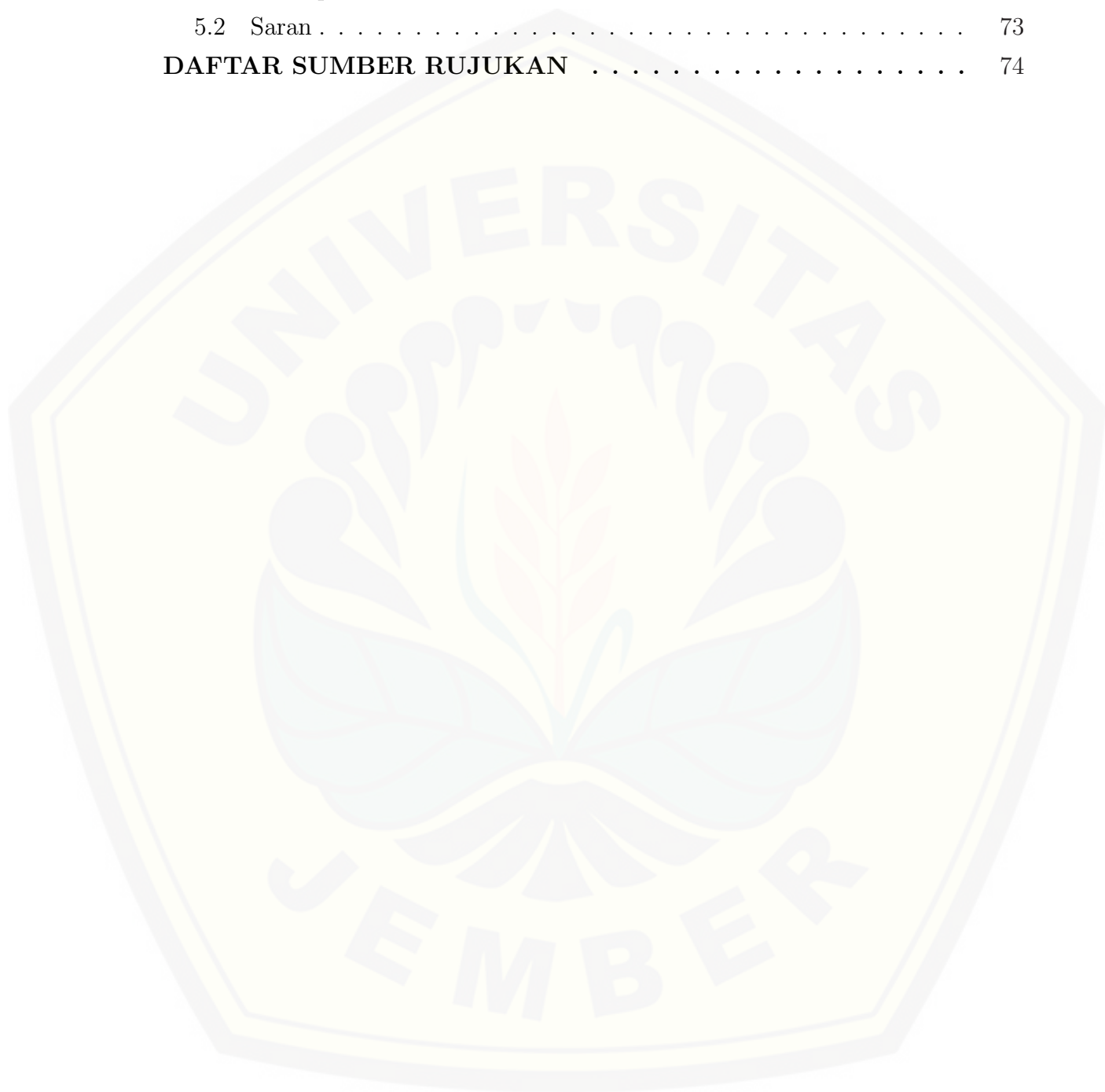
Jember, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	i
HALAMAN JUDUL	ii
HALAMAN PERSEMBAHAN	iii
HALAMAN MOTTO	iv
HALAMAN PERNYATAAN	v
HALAMAN PERSETUJUAN	vii
HALAMAN PENGESAHAN	viii
RINGKASAN	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xii
DAFTAR GAMBAR	xiv
DAFTAR TABEL	xvi
DAFTAR LAMBANG	xvii
1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat	4
2 TINJAUAN PUSTAKA	1
2.1 Terminologi Dasar Graf	1
2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf	4
2.3 <i>Dominating Set</i>	12
2.4 Penelitian Terdahulu <i>Dominating Set</i>	15
2.5 <i>Total Dominating Set</i>	17
2.6 Aplikasi untuk Menentukan Lokasi Tempat Usaha	19
3 METODE PENELITIAN	23
3.1 Jenis Penelitian	23
3.2 Objek Penelitian	23

3.3 Rancangan Penelitian	24
4 DOMINATING SET DAN TOTAL DOMINATING SET . . .	26
5 KESIMPULAN DAN SARAN	72
5.1 Kesimpulan	72
5.2 Saran	73
DAFTAR SUMBER RUJUKAN	74



DAFTAR GAMBAR

2.1	Graf Terhubung (a) dan Tidak Terhubung (b)	2
2.2	Graf Sederhana (a) dan Tidak Sederhana (b)	3
2.3	Graf Lengkap K_5 dan K_7	5
2.4	Graf Lingkaran C_4 , C_5 , dan C_8	5
2.5	Graf Lintasan P_3 dan P_5	5
2.6	Graf Bintang S_4	6
2.7	Graf Bunga Fl_4	6
2.8	Graf Gunung $M_{2,2}$	7
2.9	Graf E	8
2.10	Contoh Operasi Graf <i>Joint</i>	8
2.11	Contoh Operasi Graf <i>Cartesian Product</i>	9
2.12	Contoh Operasi Graf <i>Tensor Product</i>	10
2.13	Contoh Operasi Graf <i>Competition</i>	10
2.14	Contoh Operasi Graf <i>Crown Product</i>	11
2.15	Contoh Operasi Graf <i>Shack</i> ($C_3, 3$)	12
2.16	Contoh Operasi Graf <i>Amal</i> ($C_3, v = A, 3$)	12
2.17	Contoh <i>Dominating Set</i> pada Graf <i>Cycle</i>	14
2.18	Contoh <i>Dominating Set</i> pada Graf <i>Path</i>	14
2.19	Contoh <i>Total Dominating Set</i> pada Graf C_n	18
2.20	Contoh <i>Total Dominating Set</i> pada Graf P_n	18
2.21	Basis Simulasi Peta Kabupaten Jember	20
2.22	Representasi Peta Kabupaten Jember	21
2.23	<i>Dominating Set</i> pada Peta Kabupaten Jember	22
3.1	Skema Langkah Kerja Penelitian	25
4.1	Graf Joint ($C_4 + Fl_4$)	28
4.2	Contoh <i>Dominating Set</i> Graf Joint ($C_4 + Fl_4$)	30
4.3	Contoh <i>Total Dominating Set</i> Graf Joint ($C_4 + Fl_4$)	32
4.4	Graf Joint ($P_2 + M_{2,2}$)	34

4.5	Contoh Operasi Graf Joint $(P_2 + M_{2,2})$	35
4.6	Contoh <i>Dominating Set</i> Graf Joint $(P_2 + M_{2,2})$	38
4.7	Contoh <i>Dominating Set</i> Graf Joint $(P_4 + M_{2,2})$	39
4.8	Contoh <i>Total Dominating Set</i> Graf Joint $(P_2 + M_{2,2})$	42
4.9	Contoh <i>Total Dominating Set</i> Graf Joint $(P_4 + M_{2,2})$	43
4.10	Graf <i>Joint</i> $F_n + L_m$	44
4.11	Contoh Graf <i>Joint</i> $F_4 + L_3$	45
4.12	Contoh <i>Dominating Set</i> Graf <i>Joint</i> $F_4 + L_3$	46
4.13	Contoh <i>Total Dominating Set</i> Graf <i>Joint</i> $F_4 + L_3$	48
4.14	Graf <i>Crown Product</i> $(W_m \odot P_n)$	49
4.15	Contoh Graf <i>Crown Product</i> $(W_3 \odot P_4)$	49
4.16	Contoh <i>Dominating Set</i> Graf <i>Crown Product</i> $(W_3 \odot P_4)$	51
4.17	Contoh <i>Total Dominating Set</i> Graf <i>Crown Product</i> $(W_3 \odot P_4)$	52
4.18	Graf <i>Composition</i> $(C_n[Fl_m])$	54
4.19	Contoh Graf <i>Composition</i> $(C_4[Fl_4])$	55
4.20	Contoh <i>Dominating Set</i> Graf <i>Composition</i> $(C_4[Fl_4])$	58
4.21	Contoh <i>Total Dominating Set</i> Graf <i>Composition</i> $(C_4[Fl_4])$	60
4.22	Graf <i>Cartesian Product</i> $F_n \square P_m$	62
4.23	Contoh Graf <i>Cartesian Product</i> $F_4 \square P_3$	62
4.24	Contoh <i>Dominating Set</i> Graf <i>Cartesian Product</i> $F_4 \square P_3$	64
4.25	Contoh <i>Dominating Set</i> Graf <i>Cartesian Product</i> $F_6 \square P_5$	64
4.26	Contoh <i>Total Dominating Set</i> Graf <i>Cartesian Product</i> $F_4 \square P_3$	66
4.27	Contoh <i>Total Dominating Set</i> Graf <i>Cartesian Product</i> $F_6 \square P_5$	66
4.28	Graf <i>Amalgamation Amal</i> $(F_4, v = A, 4)$	67
4.29	Contoh <i>Dominating Set</i> Graf <i>Amalgamation Amal</i> $(F_4, v = A, 4)$	69
4.30	Contoh <i>Total Dominating Set</i> Graf <i>Amalgamation</i> $(Amal (F_4, v = A, 4))$	71

DAFTAR TABEL

2.1 Penelitian *Dominating Set* Sebelumnya 15



DAFTAR LAMBANG

G	=	Graf G
$V(G)$	=	Himpunan Titik pada Graf G
$E(G)$	=	Himpunan Sisi pada Graf G
$p = V(G) $	=	Banyaknya Titik pada Graf G
$q = E(G) $	=	Banyaknya Sisi pada Graf G
$\Delta(G)$	=	Derajat Terbesar pada Graf G
P_n	=	Graf Lintasan dengan n Titik
C_n	=	Graf <i>Cycle</i> dengan n Titik
W_n	=	Graf Roda dengan n Titik
F_n	=	Graf Kipas dengan n Titik
L_n	=	Graf <i>Ladder</i> dengan n Titik
$M_{2,n}$	=	Graf Gunung dengan n Titik
Fl_n	=	Graf Bunga dengan n Titik
$G_1 + G_2$	=	Operasi <i>Joint</i> dari Graf G_1 dan G_2
$G_1 \times G_2$	=	Operasi <i>Cartesian Product</i> dari Graf G_1 dan G_2
$G_1 \odot G_2$	=	Operasi <i>Crown Product</i> dari Graf G_1 dan G_2
$G_1 \otimes G_2$	=	Operasi <i>Tensor Product</i> dari Graf G_1 dan G_2
$G_1 [G_2]$	=	Operasi <i>Composition</i> dari Graf G_1 dan G_2
$Shack(G, r)$	=	Operasi <i>Shackle</i> dari Graf G
$Amal(G, v, r)$	=	Operasi <i>Amalgamation</i> Titik dari Graf G
$Amal(G, e, r)$	=	Operasi <i>Amalgamation</i> Sisi dari Graf G
$Amal(G, G_1, r)$	=	Operasi <i>Amalgamation</i> Subgraf dari Graf G
$\gamma(G)$	=	Dominating Set pada graf G
$\gamma_t(G)$	=	Total Dominating Set pada graf G

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika diskrit yang banyak diterapkan dalam berbagai bidang ilmu matematika. Beberapa pembahasan tentang graf yang banyak diperbincangkan saat ini adalah pelabelan graf, pewarnaan graf, covering, *dominating set* dan lain-lain. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada tahun 1736 melalui tulisannya yang berisi upaya pemecahan masalah Jembatan Konigsberg yang sangat sulit dipecahkan pada masa itu.

Teori graf merupakan pokok bahasan yang mempunyai manfaat besar dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu bagian dari teori graf adalah *dominating set* dan *total dominating set*. *Dominating set* merupakan suatu konsep penentuan titik pada graf dengan ketentuan titik sebagai *dominating set* menjangkau titik yang ada disekitarnya dan seminimal mungkin, kardinalitas minimal dari *Dominating set* adalah *domination number* yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Sehingga perlu pengembangan lebih lanjut mengenai teori *dominating set* pada sebarang graf khusus. Sedangkan *total dominating set* merupakan suatu konsep penentuan titik pada graf dengan ketentuan titik sebagai *total dominating set* yaitu saling menjangkau titik *dominating set* yang ada di sekitarnya saling bertetangga dan seminimal mungkin.

Dominating set dan *Total dominating set* dapat diterapkan pada graf yang merupakan hasil operasi dari beberapa graf khusus yaitu graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n dan simetris. Sedangkan operasi graf adalah beberapa cara untuk memperoleh graf baru dengan melakukan suatu operasi terhadap dua graf. Adapun macam-macam pengoperasian graf yaitu operasi *Joint* $(G+H)$, *Cartesian Product* $(G \square H)$, *Crown Product* $(G \odot H)$, $(G \oplus H)$, *Tensor Product* $(G \otimes H)$, *Composition*

($G[F]$), *Shackel*, dan *Amalgamation*.

Darmaji (2014) telah mengaplikasikan *dominating set* pada graf Jahangir dan graf Prisma dengan jarak maksimal dua. Pada tahun (2009), Liedloff melakukan penelitian tentang *dominating set* pada graf bipartid. Kemudian pada tahun (2012), Jumin telah mengembangkan penelitian *dominating set* berjarak satu pada graf prisma hampir sikel C_n . Dan pada tahun (2013), Maralabavi telah menentukan *dominating set* berjarak satu pada graf lengkap yang dinotasikan dengan $K_{m,n}$. Alfariasi telah menentukan himpunan dominasi pada graf-graf khusus meliputi Graf *Cakram* $Db_{m,n}$, Graf *Lampion* $\mathcal{L}_{n,m}$, Graf *Prisma* D_n, m , Graf *Tingkat Tangga Prisma* Dt_n, m pada tahun (2014). Dan di tahun yang sama Wardani telah menentukan himpunan dominasi pada graf-graf khusus meliputi Graf *Bunga* (Fl_n), Graf *Gunung Berapi* (ϑ_n), Graf *Firecracker* (F_n, k), Graf *Pohon Pisang* (B_n, m) dan Graf *Tunas Kelapa* (CR_n, m). Kemudian di tahun yang sama juga Muharromah telah menentukan himpunan dominasi pada graf-graf khusus dan operasinya meliputi Graf *Shackel* (S_m, n), Graf $C_n \odot (P_4 + K_1)$, Graf *Join* $C_n + P_n$, Graf *Lobster* L_i, j, k , dan Graf *Ladder* L_n . Pada tahun (2014), Penelitian mengenai bilangan dominasi pada beberapa graf khusus dan operasinya, diantaranya Graf *Joint Product* $K_3 + C_n$ dan $K_3 + P_m$, Graf *Cartesian Product* $C_n \odot P_m$, Graf *Crown Product* $C_n + K_m$, dan Graf *Shackel* (K_m, n) dilakukan Roifah pada tahun (2014). Kemudian pada tahun (2014), Agustin telah menentukan bilangan dominasi pada beberapa graf khusus meliputi Graf *Laba-Laba* Wb_n , Graf *Helm* H_n, m , Graf *Parasut* Pc_n , dan graf lainnya.

Penelitian ini dikembangkan dengan menggunakan teori *dominating set* dan *total dominating set* pada beberapa graf hasil operasi. Graf hasil operasi yang dimaksud adalah *Joint* ($Fl_n + C_m$), *Joint* ($P_n + M_{2m}$), *Joint* ($F_n + L_m$), *Cartesian Product* ($F_n \square P_m$), *Composition* ($C_n[Fl_m]$), *Amalgamation* *Amal* ($F_n, v = A, r$) dan *Crown Product* ($P_n \odot W_m$).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu:

- a. Bagaimana menentukan kardinalitas sisi dan kardinalitas titik dari operasi graf *Joint* ($Fl_n + C_m$), *Joint* ($P_n + M_{2m}$), *Joint* ($F_n + L_m$), *Cartesian Product* ($F_n \square P_m$), *Composition* ($C_n[Fl_m]$), *Amalgamation Amal* ($(F_n, v = A, r)$) dan *Crown Product* ($P_n \odot W_m$)?
- b. Bagaimana menentukan himpunan dominasi dari operasi graf *Joint* ($Fl_n + C_m$), *Joint* ($P_n + M_{2m}$), *Joint* ($F_n + L_m$), *Cartesian Product* ($F_n \square P_m$), *Composition* ($C_n[Fl_m]$), *Amalgamation Amal* ($F_n, v = A, r$) dan *Crown Product* ($P_n \odot W_m$)?
- c. Bagaimana menentukan himpunan total dominasi dari operasi graf *Joint* ($Fl_n + C_m$), *Joint* ($P_n + M_{2m}$), *Joint* ($F_n + L_m$), *Cartesian Product* ($F_n \square P_m$), *Composition* ($C_n[Fl_m]$), *Amalgamation Amal* ($F_n, v = A, r$) dan *Crown Product* ($P_n \odot W_m$)?

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya permasalahan yang akan dipecahkan, maka dalam penelitian ini masalahnya dibatasi pada:

- a. Graf sederhana yang tidak berarah;
- b. Graf khusus yaitu graf lingkaran, graf lintasan, graf roda, graf kipas, graf bunga, graf gunung dan *triangula ladder*;
- c. Operasi graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah operasi *joint*, *crown product*, *composition*, *amalgamation* dan *cartesian product*;
- d. *Dominating set* yang digunakan dalam penelitian ini adalah *dominating set* berjarak satu.

1.4 Tujuan

Sesuai dengan rumusan masalah dan latar belakang di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Menentukan kardinalitas sisi dan titik dari graf operasi *Joint* ($Fl_n + C_m$), *Joint* ($P_n + M_{2m}$), *Joint* ($F_n + L_m$), *Cartesian Product* ($F_n \square P_m$), *Composition* ($C_n[Fl_m]$), *Amalgamation Amal* ($F_n, v = A, r$) dan *Crown Product* ($P_n \odot W_m$);

- b. Menentukan himpunan dominasi pada graf operasi *Joint* ($Fl_n + C_m$), *Joint* ($P_n + M_{2m}$), *Joint* ($F_n + L_m$), *Cartesian Product* ($F_n \square P_m$), *Composition* ($C_n[Fl_m]$), *Amalgamation Amal* ($F_n, v = A, r$) dan *Crown Product* ($P_n \odot W_m$);
- c. Menentukan himpunan total dominasi pada graf operasi *Joint* ($Fl_n + C_m$), *Joint* ($P_n + M_{2m}$), *Joint* ($F_n + L_m$), *Cartesian Product* ($F_n \square P_m$), *Composition* ($C_n[Fl_m]$), *Amalgamation Amal* ($F_n, v = A, r$) dan *Crown Product* ($P_n \odot W_m$).

1.5 Manfaat

Manfaat yang didapatkan dari penelitian ini adalah:

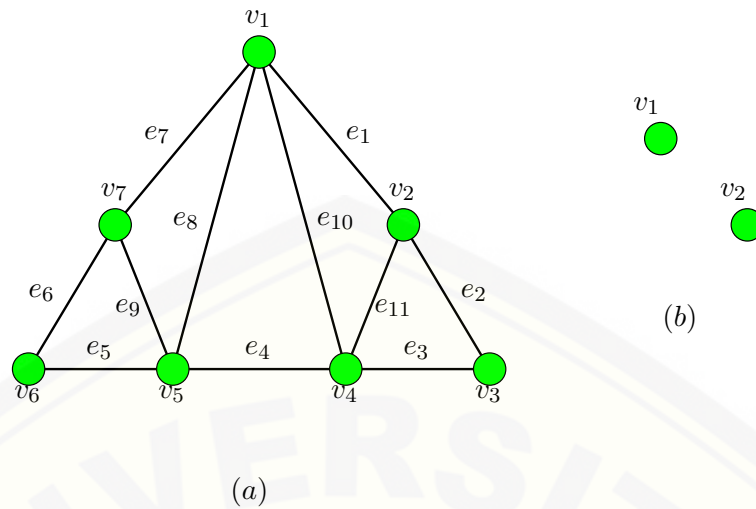
- a. Memberikan motivasi kepada pembaca untuk meneliti pada graf dari jenis aplikasi yang lain atau dalam masalah mencari himpunan dominasi dan himpunan total dominasi pada operasi graf;
- b. Hasil penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai pengembangan atau perluasan ilmu teori graf.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Terminologi Dasar Graf

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan terurut himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan sisi (boleh kosong) dari pasangan tidak terurut dua titik (v_1, v_2) dimana $v_1, v_2 \in V$, yang disebut sisi (*edges*). V disebut himpunan titik dari G , dan E disebut himpunan sisi dari G . Seringkali kita menuliskan $V(G)$ adalah himpunan titik dari graf G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi dari graf G . Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi Vertexnya harus ada minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial (Munir, 2009).

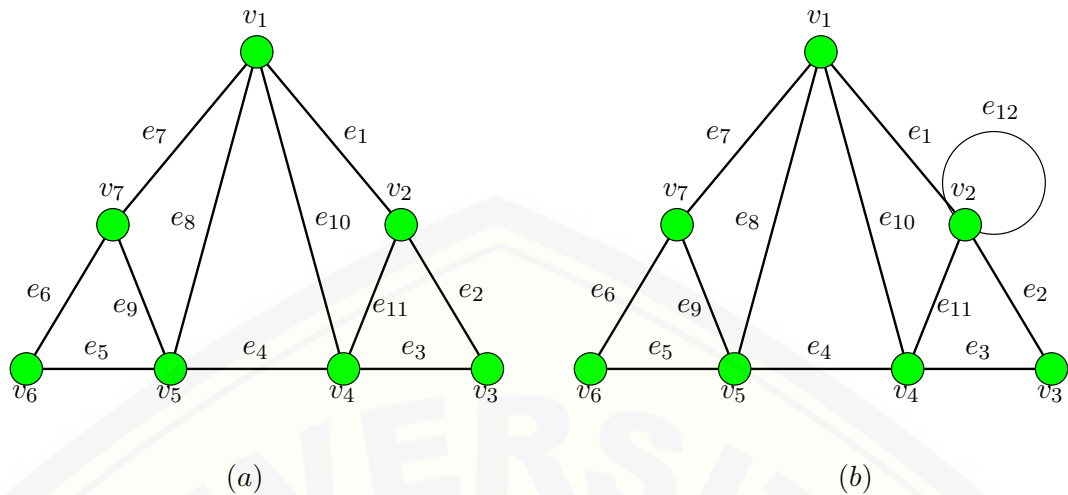
Suatu graf dengan p buah verteks dan q buah sisi ditulis dengan $G(p, q)$. Secara umum graf dapat digambarkan dengan suatu diagram dimana verteks yang ditunjukkan sebagai titik yang dinotasikan dengan $v_i, i = 1, 2, 3, \dots$ dan sisi yang digambarkan dengan sebuah garis lurus atau dengan garis lengkung yang menghubungkan dua verteks v_i, v_j dan dinotasikan $e_k, k = 1, 2, 3, \dots$, sedangkan q disebut dengan titik-titik (verteks) dari e_k . Dengan kata lain titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, dengan bilangan asli, atau dengan menggunakan huruf dan angka (bilangan asli). Misalkan v_i dan v_j adalah titik pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j dinyatakan dengan pasangan (v_i, v_j) atau dengan lambang $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ (Douglas, 1996). Gambar 2.1 merupakan contoh dari graf terhubung dan tidak terhubung.



Gambar 2.1 Graf Terhubung (a) dan Tidak Terhubung (b)

Pada gambar 2.1 point (a) adalah graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$ dengan $e_1 = \{v_1v_2\}$, $e_2 = \{v_2v_3\}$, $e_3 = \{v_3v_4\}$, $e_4 = \{v_4v_5\}$, $e_5 = \{v_5v_6\}$, $e_6 = \{v_6v_7\}$, $e_7 = \{v_7v_1\}$, $e_8 = \{v_5v_1\}$, $e_9 = \{v_5v_7\}$, $e_{10} = \{v_4v_1\}$, $e_{11} = \{v_2v_4\}$. Titik v_1 dan v_2 berhubungan langsung, sisi e_1 terkait dengan titik v_1 dan v_2 . Dua titik dikatakan berhubungan (*adjacent*) jika ada sisi yang menghubungkan keduanya dan sebuah sisi dikatakan menempel untuk titik yang menghubungkan sisi tersebut. Sejumlah sisi yang menempel pada sebuah titik disebut derajat titik (*degree*). Sebagai contoh, graf pada gambar 2.1, v_1 berhubungan dengan v_2 dan v_2 berhubungan dengan v_3 , dan sisi e_1 menempel dengan titik v_1 dan v_2 . Titik v_2 memiliki derajat 2, dan v_1 memiliki derajat 2.

Sebuah sisi yang menghubungkan pasangan titik yang sama atau bisa disebut juga sebuah sisi yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut dengan *loop*. Dan dua atau lebih sisi yang mempunyai titik-titik ujung yang sama disebut dengan sisi *parallel*. Sebuah graf yang didalamnya tidak terdapat *loop* dan sisi *parallel* disebut dengan graf sederhana. Gambar 2.2 merupakan contoh dari graf sederhana dan tidak sederhana.



Gambar 2.2 Graf Sederhana (a) dan Tidak Sederhana (b)

Pada graf G , jalan J dari titik v_0 ke titik v_n adalah barisan selang-seling dari titik dan sisi $v_0, e_0, v_1, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ yang dimulai dan diakhiri dengan titik $e_i = v_i v_{i+1}$, untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Panjang dari jalan $v_0, e_0, v_1, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ adalah banyaknya sisi pada barisan tersebut. jika pada jalan J berlaku $v_0 = v_n$, maka J disebut jalan tertutup. Jalan J disebut lintasan (*path*) bila semua titiknya berbeda. sedangkan jika setiap sisinya yang berbeda maka jalan tersebut dinamakan jejak (*trail*). Jejak tertutup disebut sirkuit.

Pada gambar 2.1 dapat diketahui bahwa $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ merupakan jalan *walk*, $v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_1$ merupakan jejak *trail*, $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ merupakan lintasan *path*, $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ merupakan *sirkuit*

Apabila graf diproses menggunakan program komputer, maka graf harus direpresentasikan di dalam memori. Representasi yang sering digunakan yaitu matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*), misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul. Matriks ketetanggaan G adalah matriks dwimatra yang berukuran $n \times n$. Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$ jika simpul i dan j bertetangga, sebaliknya $a_{ij} = 0$ jika simpul i dan j tidak bertetangga (Howard, 2000).

Matriks adjacent dari Gambar 2.1 adalah

$$\mathbf{X} = [X_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan orientasi arah pada suatu graf, graf dibedakan atas dua jenis:

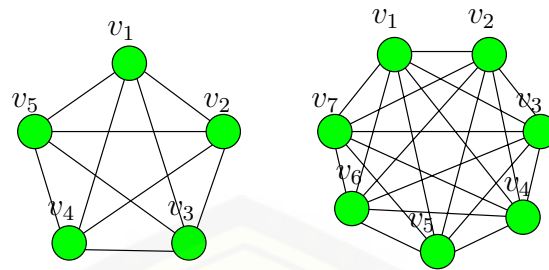
- Graf tak-berarah (*undirected graph*) adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah.
- Graf berarah (*directed graph*) adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah.

Graf berarah *directed graph/ digraph* merupakan pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan terurut (u, v) dari titik yang berbeda $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi berarah (Slamin, 2009).

2.2 Graf Khusus dan Operasi Graf

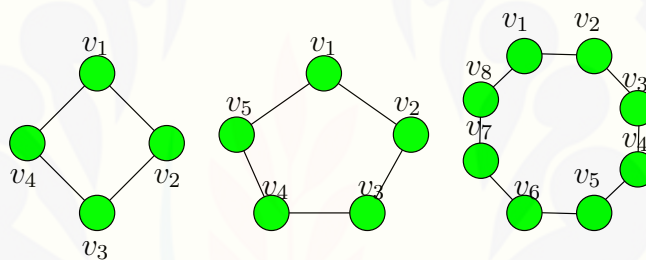
Graf khusus adalah graf yang mempunyai keunikan dan karakteristik bentuk khusus. Keunikannya adalah graf khusus tidak isomorfis dengan graf lainnya. Karakteristik bentuknya dapat diperluas sampai order n tetapi simetris. Berikut ini adalah beberapa contoh graf khusus.

- Graf lengkap (*Complete Graph*) Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n . Berdasarkan gambar 2.3, jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$ sisi. Contoh dari graf lengkap bisa dilihat pada Gambar 2.3.



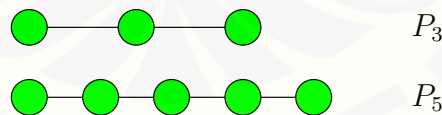
Gambar 2.3 Graf Lengkap K_5 dan K_7

- b. Graf Lingkaran (*Cycle*) Graf Lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titik berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n . Contoh dari graf lingkaran bisa dilihat pada gambar 2.4.



Gambar 2.4 Graf Lingkaran C_4 , C_5 , dan C_8

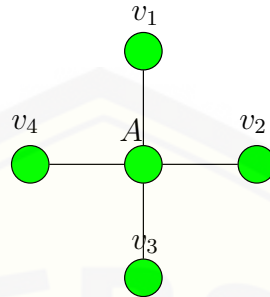
- c. Graf Lintasan (*Path*) Graf Lintasan adalah graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n dengan $n \geq 2$. Contoh dari graf lintasan bisa dilihat pada gambar 2.5.



Gambar 2.5 Graf Lintasan P_3 dan P_5

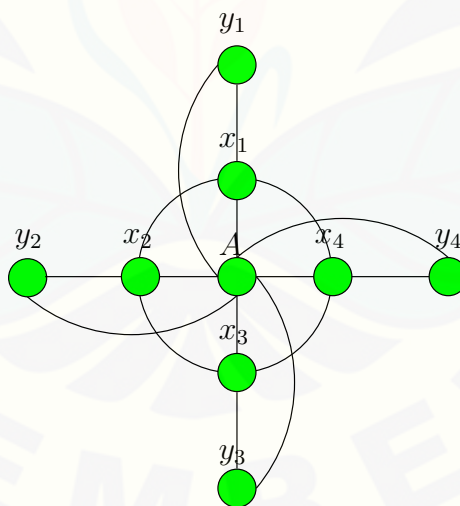
- d. Graf Bintang (*Star Graph*) Graf Bintang adalah graf pohon yang terdiri dari satu titik yang berderajat $n - 1$ dan $n - 1$ titik yang berderajat 1. Jadi,

graf bintang S_n terdiri dari n titik dan $n - 1$ sisi dengan $n \geq 3$. Sebagai ilustrasi perhatikan graf S_8 pada gambar 2.6.



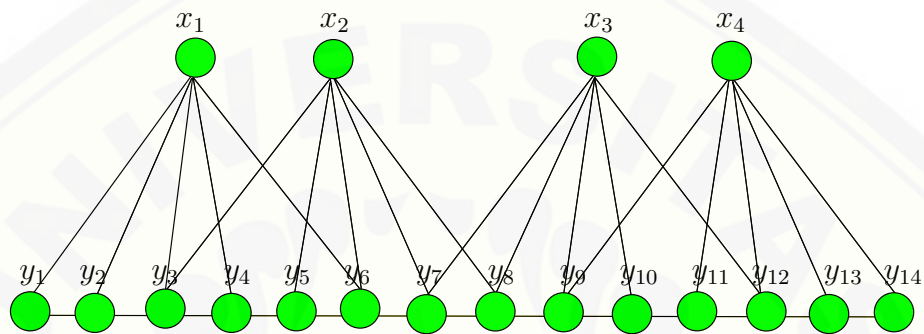
Gambar 2.6 Graf Bintang S_4

- e. Graf Bunga Graf bunga (*flower*) dilambangkan dengan Fl_n adalah sebuah graf dengan himpunan *vertex*, $V = \{A, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan *edge*, $E = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Ay_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_n x_1, 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\}$ nilai n yang dimaksud adalah banyaknya titik yang menyentuh lingkaran pada graf bunga (Hidayati, 2012). Gambar 2.7 merupakan sebuah ilustrasi graf bunga Fl_4 .



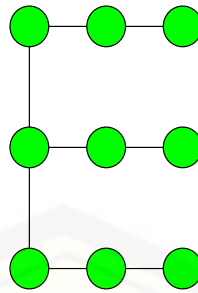
Gambar 2.7 Graf Bunga Fl_4

- f. Graf Gunung Graf gunung dilambangkan dengan M_{2n} adalah sebuah graf dengan himpunan *vertex*, $V = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq 2n \text{ dan } 1 \leq j \leq 6n + 2, n \in \mathbb{N}\}$ dan himpunan *edge*, $E = \{\{x_i y_{3i-2}; 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{x_i y_{3i+3}; 1 \leq i \leq 2n\}$ untuk i ganjil $\} \cup \{\{x_i y_{3i-3}; 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{x_i y_{3i+2}; 1 \leq i \leq 2n\}$ untuk i genap $\} \cup \{\{x_i y_{3i-1}; 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{x_i y_{3i}; 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{x_i y_{3i+1}; 1 \leq i \leq 2n\}$ untuk i sebarang $\} \cup \{y_j y_{j+1}, 1 \leq j \leq 6n + 1\}$ (Fajriyatin, 2011). Gambar 2.8 merupakan contoh graf gunung.



Gambar 2.8 Graf Gunung $M_{2,2}$

- g. Graf E Graf E adalah sebuah graf pohon dengan 9 simpul yang digambarkan seperti huruf *E* dilambangkan dengan E_n . Graf E (E_n) dengan $1 \leq i \leq 2n - 3$ dan $1 \leq j \leq n - 1$ mempunyai himpunan titik $V(E_n) = \{x_i, x_{1,j}, x_{n-1,j}, x_{2n-3,j}; 1 \leq i \leq 2n - 3, 1 \leq j \leq n - 1\}$ dan himpunan sisi $E(E_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq 2n - 4\} \cup \{x_{1,j} x_{1,j+1}, x_{n-1,j} x_{n-1,j+1}, x_{2n-3,j} x_{2n-3,j+1}, x_1 x_{1,j}, x_{n-1} x_{n-1,j}; 1 \leq j \leq n - 2\} \cup \{x_{2n-3} x_{2n-3,j}; j = n - 1\}$ (Deviana, 2014). Gambar 2.9 menunjukkan contoh graf E (E_n).

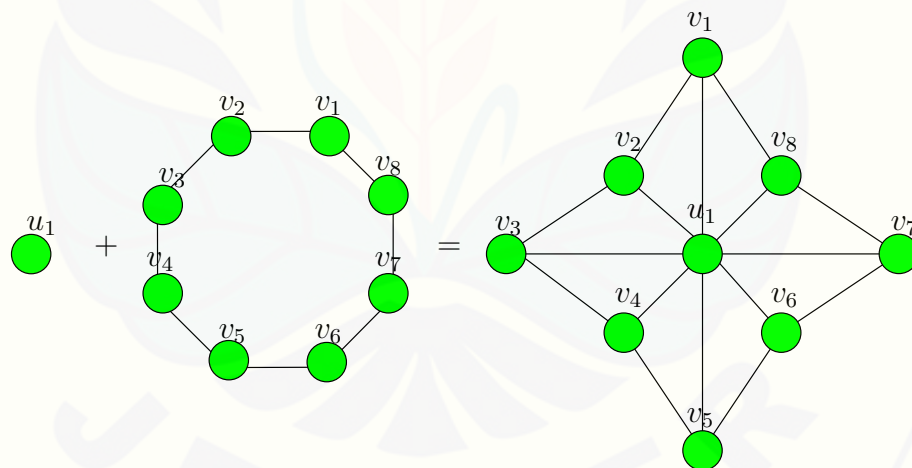


Gambar 2.9 Graf E

Operasi Graf adalah beberapa cara untuk memperoleh graf baru dengan melakukan suatu operasi terhadap dua graf. Berikut akan diberikan beberapa macam-macam operasi graf beserta contohnya.

1. *Operasi Joint*

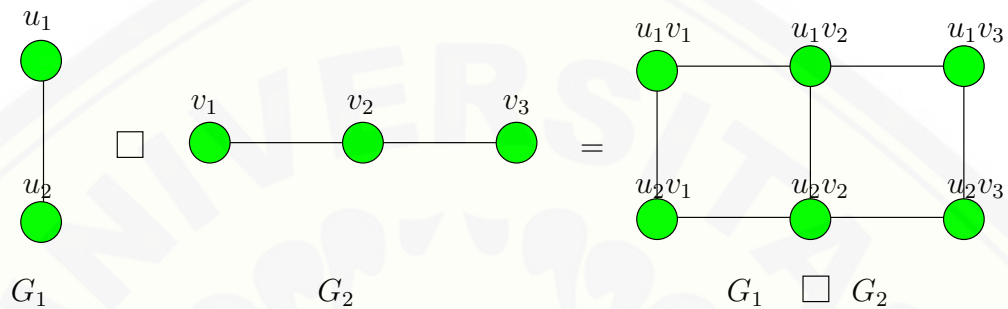
Definisi 2.2.1. *Graph Joint (G_1+G_2) Joint dari graf G_1 dan G_2 , dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$, adalah graf G dimana $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), \in V(G_2)\}$.*



Gambar 2.10 Contoh Operasi Graf *Joint*

2. Operasi Cartesian Product

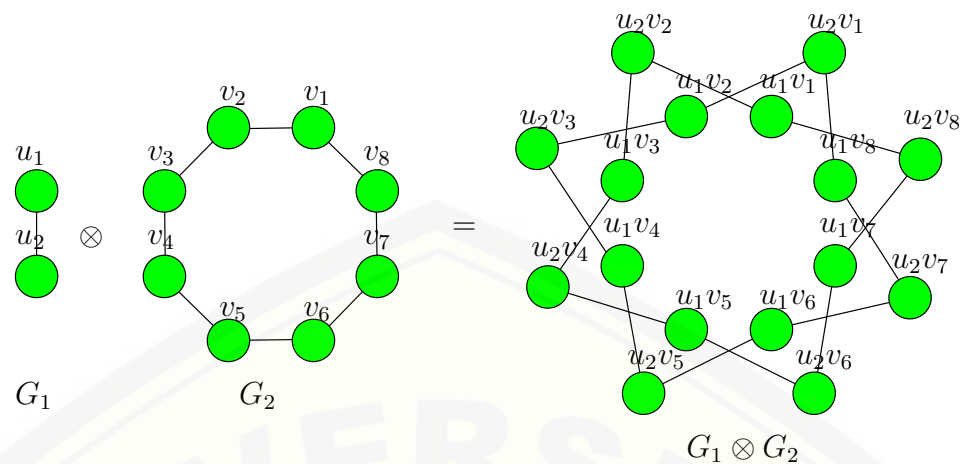
Definisi 2.2.2. Cartesian Product dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ adalah graf $G(V, E)$, ditulis $G = G_1 \times G_2$, jika $V = V_1 \times V_2$, dan dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku : $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E_2$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E_1$.



Gambar 2.11 Contoh Operasi Graf Cartesian Product

3. Operasi Tensor Product

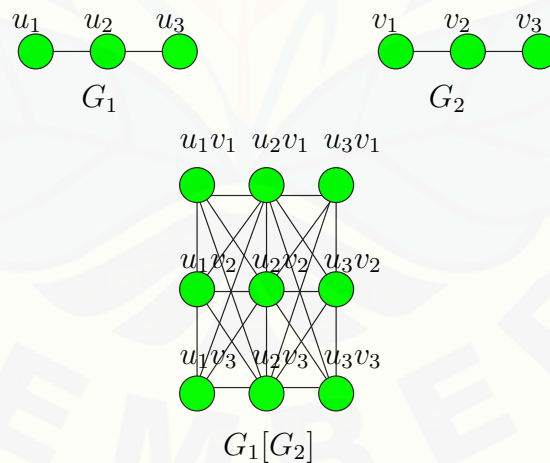
Definisi 2.2.3. Tensor product dari dua graf G_1 dan G_2 adalah penggabungan dari dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan oleh $G_1 \otimes G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G_1 \otimes G_2) = \{(u_1, v_2) (u_2, v_2) | u_1 u_2 \in E(G_1)\}$ dan $v_1 v_2 \in E(G_2)$ (Endrayana, 2013).



Gambar 2.12 Contoh Operasi Graf *Tensor Product*

4. *Operasi Komposisi*

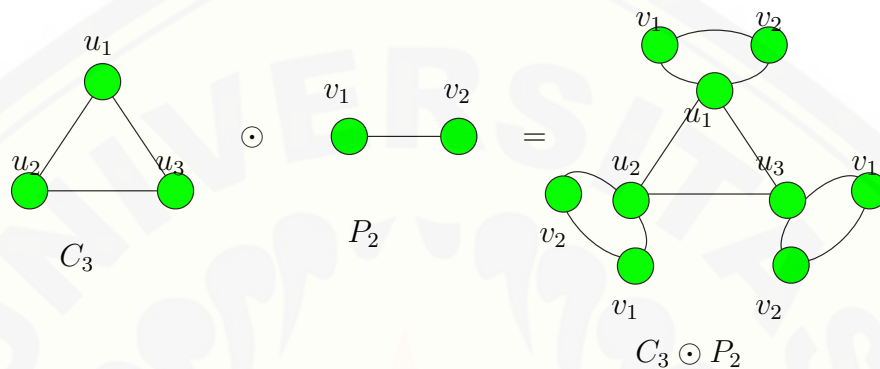
Definisi 2.2.4. *Composition* dinotasikan dengan $G = G_1[G_2]$, G_1 dan G_2 dengan disjoint himpunan titik V_1 dan V_2 dan himpunan sisi X_1 dan X_2 adalah graf dengan titik $V_1 \times V_2$ dan $u = (u_1, u_2)$ yang adjacent dengan $v = (v_1, v_2)$ ketika $[u_1 \text{ adj } v_1]$ atau $[u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ adj } v_2]$ (Harrary, 1994).



Gambar 2.13 Contoh Operasi Graf *Competition*

5. Operasi Crown Product

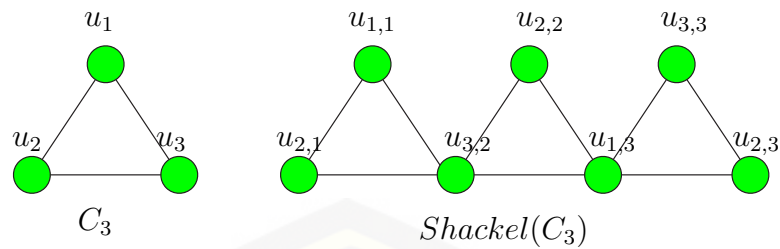
Definisi 2.2.5. *Crown Product* $G \odot H$ dari dua graf G dan H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|V(G)|$ duplikat $H_1, H_2, \dots, H_{|V(G)|}$ dari H , kemudian menghubungkan titik ke- i dari G ke setiap titik di $H_i, i = 1, 2, 3, \dots, V(G)$. sebagai contoh, $C_5 \odot 2K_1$ dan $P_3 \odot P_2$.



Gambar 2.14 Contoh Operasi Graf *Crown Product*

6. Operasi Shackle

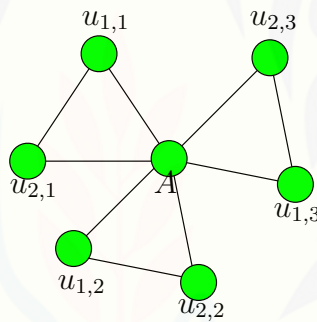
Definisi 2.2.6. *Graph Shackel* dari G_1, G_2, \dots, G_k dinotasikan dengan $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$ merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf (G_1, G_2, \dots, G_k) sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq i, j \leq k$ dengan $|i - j| \geq 2, G_i$ dan G_j tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap $1 \leq i \leq k - 1, G_i$ dan G_{i+1} tepat satu titik yang sama, disebut *vertex linkage* dimana $k - 1$ linkage titik semua berbeda.



Gambar 2.15 Contoh Operasi Graf $Shack(C_3, 3)$

7. Operasi Amalgamation

Definisi 2.2.7. Amalgamation dinotasikan dengan $Amal(H_i, v_{0i})$. Misalkan H_i adalah suatu keluarga graf berhingga dan setiap H_1 mempunyai suatu titik v_{0i} yang disebut titik terminal (Ardiyansah, 2013).



Gambar 2.16 Contoh Operasi Graf $Amal(C_3, v = A, 3)$

2.3 Dominating Set

Sejarah *dominating number* dimulai pada tahun 1850 di Eropa. Mereka bertanya, pada papan catur 8×8 diperlukan minimal berapa *Queen* agar semua posisi dapat diserang langsung oleh *Queen* tersebut. Secara matematis dipelajari sejak tahun 1960 yang kemudian berkembang pada aplikasi seperti komunikasi, jaringan komputer, teori jaringan sosial dan pemasangan kamera pengawas.

Menurut Haynes dan Henning dalam Agustin dan Dafik (2014), himpunan D dari titik graf sederhana G dinamakan *dominating set* jika setiap titik $u \in$

$V(G) - D$ adjacent ke beberapa titik $v \in D$. Kardinalitas terkecil dari *dominating set* disebut *domination number* yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$. *Dominating set* D dengan $|D| = \gamma(G)$ dinamakan *minimum dominating set*. Menurut [?], batas atas dari *domination number* adalah banyaknya titik di graf. Ketika paling sedikit satu titik yang dibutuhkan untuk himpunan dominasi di graf, maka $1 \leq \gamma(G) \leq n$ untuk setiap graf ber-order n . Nilai dari *domination number* selalu $\gamma(G) \leq |V(G)|$.

Teorema 2.3.1. Untuk sebarang graf G , maka $\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$.

Keterangan:

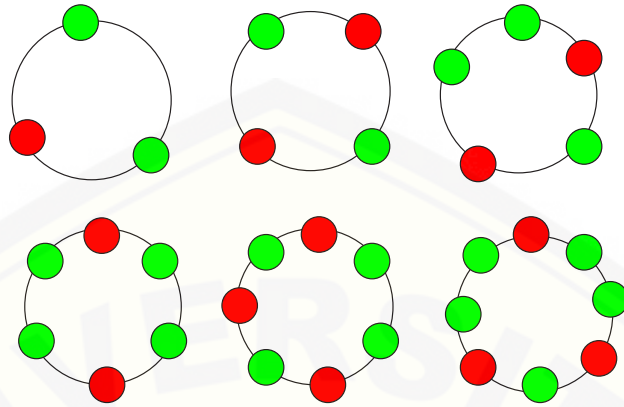
p = Banyaknya titik

$\Delta(G)$ = Derajat Terbesar

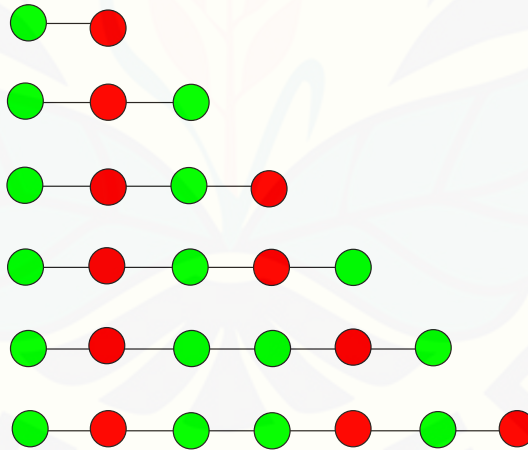
$\gamma(G)$ = *Dominating Number*

Bukti: Misalkan S adalah sebuah *dominating set* dari G . Untuk batas bawahnya, setiap titik dapat sebagai *dominating set* dan mempunyai $\Delta(G)$ ke titik yang lain. Berakibat, $\gamma(G) \geq \lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil$. Untuk batas atasnya, misalkan v adalah titik dengan derajat maksimum ($\Delta(G)$) dan $N[v]$ merupakan titik yang *adjacent* dengan v . Maka v sebagai *dominating set* dari $N[v]$ dan titik-titik di $V - N[v]$ merupakan *dominating set* mereka sendiri. Berakibat, $V - N[v]$ merupakan *dominating set* dengan kardinalitas $p - \Delta(G)$, sehingga $\gamma(G) \leq p - \Delta(G)$. Maka $\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$.

Berikut adalah contoh *dominating set* pada graf lingkaran dan graf lintasan yang dapat dilihat pada Gambar 2.17 dan Gambar 2.18, dimana titik yang berwarna merah merupakan *dominating set*-nya.



Gambar 2.17 Contoh *Dominating Set* pada Graf Cycle



Gambar 2.18 Contoh *Dominating Set* pada Graf Path

2.4 Penelitian Terdahulu *Dominating Set*

Pada bagian ini disajikan beberapa rangkuman hasil *Dominating Set* yang dapat digunakan sebagai rujukan penelitian ini. Berikut adalah penelitian-penelitian yang pernah dilakukan mengenai pencarian *dominating set*.

Tabel 2.1: Penelitian *Dominating Set* Sebelumnya

Graf	$\gamma(G)$	Keterangan
Graf Parasut (PC_n)	$\gamma(PC_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$	Agustin dan Dafik
Graf Helm ($H_{n,m}$)	$\gamma(H_{n,m}) = n$, untuk $m \geq 1$	Agustin dan Dafik
Graf Regular ($A_{2n,m}$)	$\gamma(A_n) = \lceil \frac{2n}{m+1} \rceil$, untuk $3 \leq m \leq 2n$	Agustin dan Dafik
Graf Rem Cakram ($Db_{m,n}$)	$\gamma(Db_{n,m}) = \lceil \frac{3nm-2n}{5} \rceil$, jika $n \geq 3$ dan $m \geq 2$	Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Lampion ($\mathcal{L}_{n,m}$)	$\gamma(\mathcal{L}_{n,m}) = n + 1$, jika $n \geq 2$ dan $m \geq 1$	Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Prisma ($D_{n,m}$)	$\gamma(D_{n,m}) = \lceil \frac{nm}{4} \rceil$, jika $n \geq 3$ dan $m \geq 2$	Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Tingkat Tangga Prisma ($Dt_{n,m}$)	$\gamma(Dt_{n,m}) = n$, jika $m = 1$ dan $n \geq 3$ $\gamma(Dt_{n,m}) = n \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, jika $m = 1$ dan $n \geq 3$	Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Lampion ($\mathcal{L}_{n,m}$)	$\gamma_2(\mathcal{L}_{n,m}) = \lfloor \frac{2nm+n+1}{4m+3} \rfloor$, jika $n \geq 2$ dan $m \geq 1$	Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Rem Cakram ($Db_{m,n}$)	$\gamma_2(Db_{n,2}) = 2$, jika $n = 3$ $\gamma_2(Db_{n,2}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, jika $4 \leq n \leq 6$ dan $n \geq 10$ $\gamma_2(Db_{n,2}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$, jika $7 \leq n \leq 9$	Alfarisi <i>et al.</i> Alfarisi <i>et al.</i> Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Amalgamasi <i>Cycle Amal</i> ($C_n, 1, m$)	$\gamma_2(C_n, 1, m) = m \lceil \frac{n}{5} + 1 \rceil$, jika $n \geq 3$ dan $m \geq 3$	Alfarisi <i>et al.</i>
Graf Tribun (\mathfrak{T}_n)	$\gamma(\mathfrak{T}_n) = n + 1$, untuk $n \geq 2$	Muharromah <i>et al.</i>
Graf Rantai	$\gamma(\mathfrak{BC}_n) = n + 1$,	Muharromah <i>et al.</i>

Graf	$\gamma(G)$	Keterangan
Pentagon (\mathfrak{BC}_n)	untuk $n \geq 2$	
Graf Shack (S_m, n)	$\gamma(S_m, n) = n,$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$	Muharromah <i>et al.</i>
Graf $C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)$	$\gamma(C_n \odot (P_4 + \overline{K}_1)n) = n,$ untuk $n \geq 3$	Muharromah <i>et al.</i>
Graf Join $C_n + P_n$	$\gamma(C_n + P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil,$ untuk $n \geq 3$	Muharromah <i>et al.</i>
Graf Lobster ($L_{i,j,k}$)	$\gamma(L_{i,j,k}) = 2n,$ untuk $n \geq 2$	Muharromah <i>et al.</i>
Graf Triangular Ladder (L_n)	$\gamma(L_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil,$ untuk $n = 3$ dan $n = 2k$ dimana $k \geq 2$ $\gamma(L_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil,$ untuk $n = 2k + 1$ dimana $k \geq 2$	Muharromah <i>et al.</i>
Graf $P_2 \otimes C_n$	$\gamma(P_2 \otimes C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil,$ untuk $n \geq 3$	Muharromah <i>et al.</i>
Graf $P_n[C_3]$	$\gamma P_n[C_3] = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil,$ untuk $n \geq 4$	Muharromah <i>et al.</i>
Graf Fl_n	$\gamma(Fl_n) = 1,$ untuk $n \geq 2$	Wardani <i>et al.</i>
Graf $\vartheta_{n,m}$	$\gamma(\vartheta_{n,m}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil,$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 1$	Wardani <i>et al.</i>
Graf $F_{n,k}$	$\gamma(F_{n,k}) = n,$ untuk $n \geq 1$	Wardani <i>et al.</i>
Graf $B_{n,m}$	$\gamma(B_{n,m}) = n + 1,$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$	Wardani <i>et al.</i>
Graf $CR_{n,m}$	$\gamma(CR_{n,m}) = \lceil \frac{n}{3} \rceil,$ untuk $n \geq 3$	Wardani <i>et al.</i>
Graf $P_n + F_m$	$\gamma(P_n + F_m) = 1,$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$	Saputro
Graf $C_n \odot L_m$	$\gamma(C_n \odot L_m) = n,$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$	Saputro
Graf $P_n \odot F_m$	$\gamma(P_n \odot F_m) = n,$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$	Saputro
Graf $P_n[K_m]$	$\gamma(P_n[K_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil,$ untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$	Saputro

2.5 Total Dominating Set

Menurut Maryam Atapour dan Nasrin Soltankhah (2009), Sebuah himpunan titik S pada graf $G(V, E)$ dikatakan *total dominating set* jika setiap titik $v \in V$ adjacent dengan himpunan S . *Domination number* pada sebuah graf G yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$ adalah kardinalitas minimal pada *dominating set* pada G . Sedangkan *total domination number* pada sebuah graf G yang dinotasikan dengan $\gamma_t(G)$ adalah kardinalitas minimal dari *total dominating set* pada G . Sehingga $\gamma(G) \leq \gamma_t(G)$, dan juga dapat dikatakan $\gamma_t(G) \leq 2\gamma(G)$.

◇ **Teorema 2.5.1.** *Jika G adalah graf terhubung, maka $\gamma_t(G) \geq \lceil \frac{p}{\Delta(G)} \rceil$.*

Keterangan:

p = Banyaknya titik

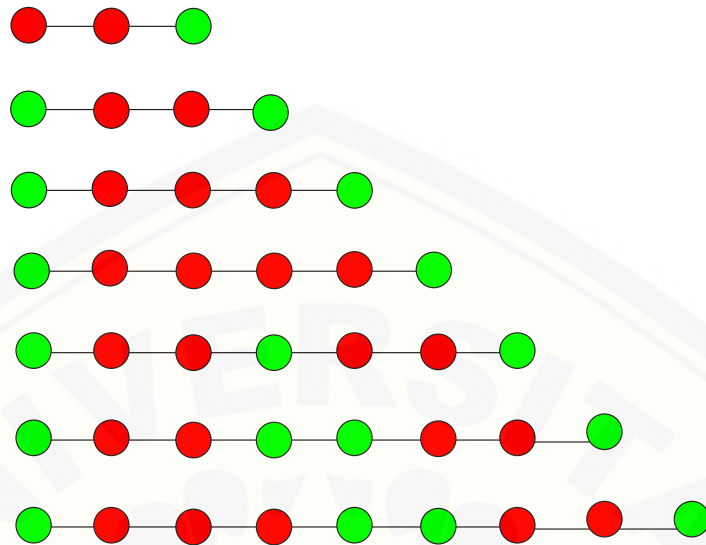
$\Delta(G)$ = Derajat Terbesar

$\gamma_t(G)$ = Total Domination Number

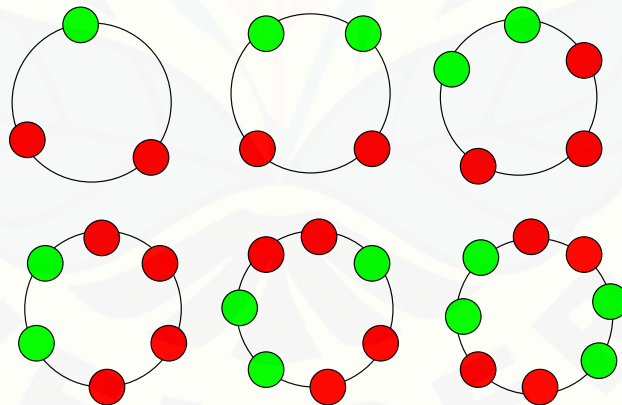
Bukti: Misalkan S adalah sebuah *dominating set* dari G . Setiap titik di S *dominating set* adalah $\Delta(G) - 1$ untuk $V(G) - S$ dan *dominating set*-nya setidaknya ada satu titik di S . Oleh karena itu, $|S|(\Delta(G) - 1) + |S| \geq n$. Karena S adalah *total dominating set*, maka $\gamma_t(G) \geq \lceil \frac{n}{\Delta(G)} \rceil$.

Total domination number pada graf telah diperkenalkan oleh A.Klobucar pada tahun 2004, dimana telah dikembangkan *total dominating set* pada graf lingkaran C_n dan graf lintasan P_n untuk $n \leq 3$. Sehingga didapatkan *total dominating set* pada graf lingkaran dan graf lintasan:

$$\gamma_t(C_n) = \gamma_t(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{jika } n \equiv 0(\text{mod } 4) \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \text{n lainnya} \end{cases}$$



Gambar 2.19 Contoh *Total Dominating Set* pada Graf C_n



Gambar 2.20 Contoh *Total Dominating Set* pada Graf P_n

2.6 Aplikasi untuk Menentukan Lokasi Tempat Usaha

Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang dapat diterapkan dalam bentuk graf. Graf digunakan untuk mendeskripsikan permasalahan-permasalahan dan menggambarannya secara jelas. Graf juga digunakan untuk mempermudah menyelesaikan berbagai macam persoalan yang sulit dipecahkan dengan perhitungan dan pertimbangan biasa. Inti dari pengaplikasian graf adalah bagaimana cara membaca permasalahan, kemudian mendefinisikan apa yang menjadi objek diskrit yang kemudian akan menjadi titik-titik dari graf yang akan dibangun untuk menggambarkan permasalahan yang akan diselesaikan. Apabila telah didapatkan titik-titik, maka akan mudah untuk membangun graf dengan memberi sisi pada titik-titik yang saling berhubungan. Salah satu permasalahan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan teori graf adalah menentukan lokasi tempat usaha di kabupaten Jember. Lokasi usaha adalah salah satu dari faktor yang penting dalam memulai untuk berwirausaha. Seorang wirausahawan sering salah dalam menentukan lokasi usahanya sehingga usaha mereka kurang lancar atau bahkan gulung tikar.

Dalam menentukan lokasi tempat usaha harus sesuai dengan keadaan sekitar dan juga sesuai dengan faktor-faktor lain seperti masyarakat, pendapatan, geografis, pendidikan dan lain-lain. Sehingga dengan semua itu, permasalahan ini diharapkan mampu menjadi pedoman para usahawan muda. Permasalahannya adalah bagaimana cara menentukan lokasi tempat usaha di kabupaten Jember. Permasalahan tersebut dapat diselesaikan menggunakan teori *dominating set*. Teori *dominating set* merupakan suatu cabang teori graf yang mempelajari cara penentuan titik pada graf dengan ketentuan titik sebagai *dominating set* menjangkau titik yang ada disekitarnya dan seminimal mungkin.

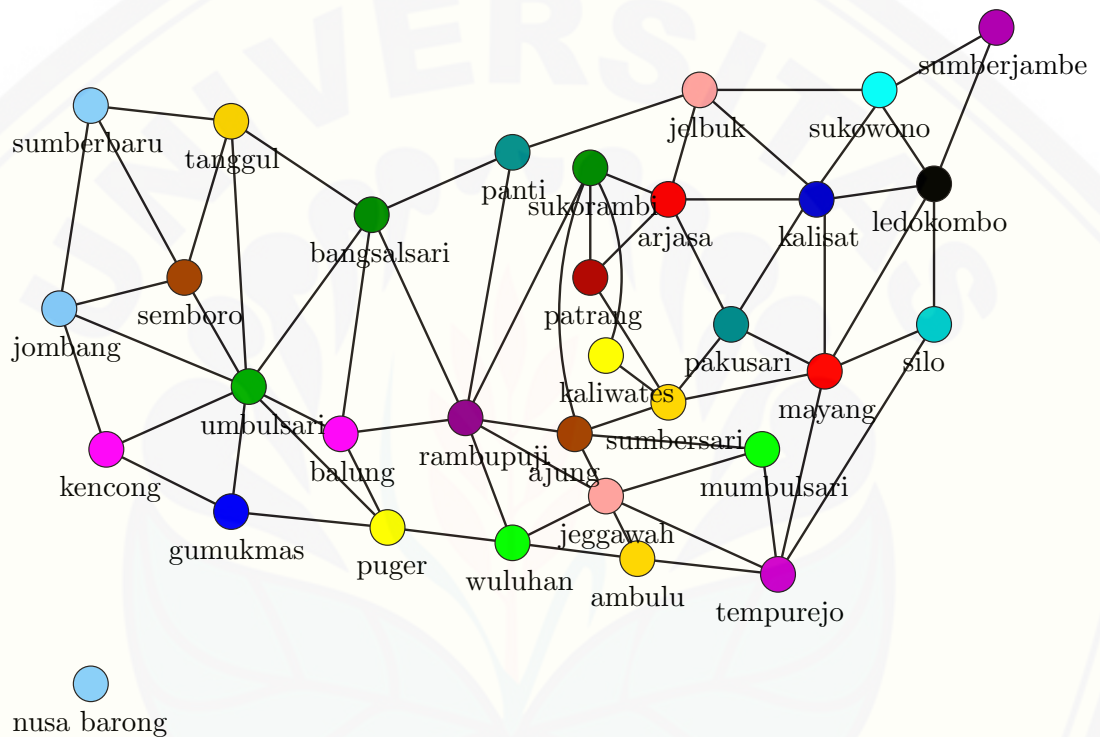
Pada gambar 2.21 dapat kita lihat bahwa pada peta kabupaten Jember terdapat beberapa kecamatan dimana setiap kecamatan memiliki luas daerah yang berbeda-beda. Dalam hal ini penulis akan menyelesaikan permasalahan untuk menentukan lokasi tempat usaha di kabupaten Jember. Untuk menentukan lokasi tempat usaha yang strategis tentu diperlukan banyak pertimbangan dengan berbagai faktor yang ada pada daerah tersebut, misalnya dalam hal trans-

portasi, kepadatan penduduknya dan luas wilayah daerah tersebut. Menetapkan tempat usaha adalah salah satu faktor yang sangat penting dalam berwirausaha, dimana perusahaan memiliki tempat usaha yang tidak akan dibangun di setiap tempat. Menetapkan tempat usaha perlu di bangun pada wilayah yang strategis serta menguntungkan. Penempatan perusahaan di wilayah yang strategis akan mendukung lancarnya kegiatan usaha. Dalam permasalahan ini, penulis menggunakan basis simulasi peta kabupaten Jember sebagai objek permasalahan.



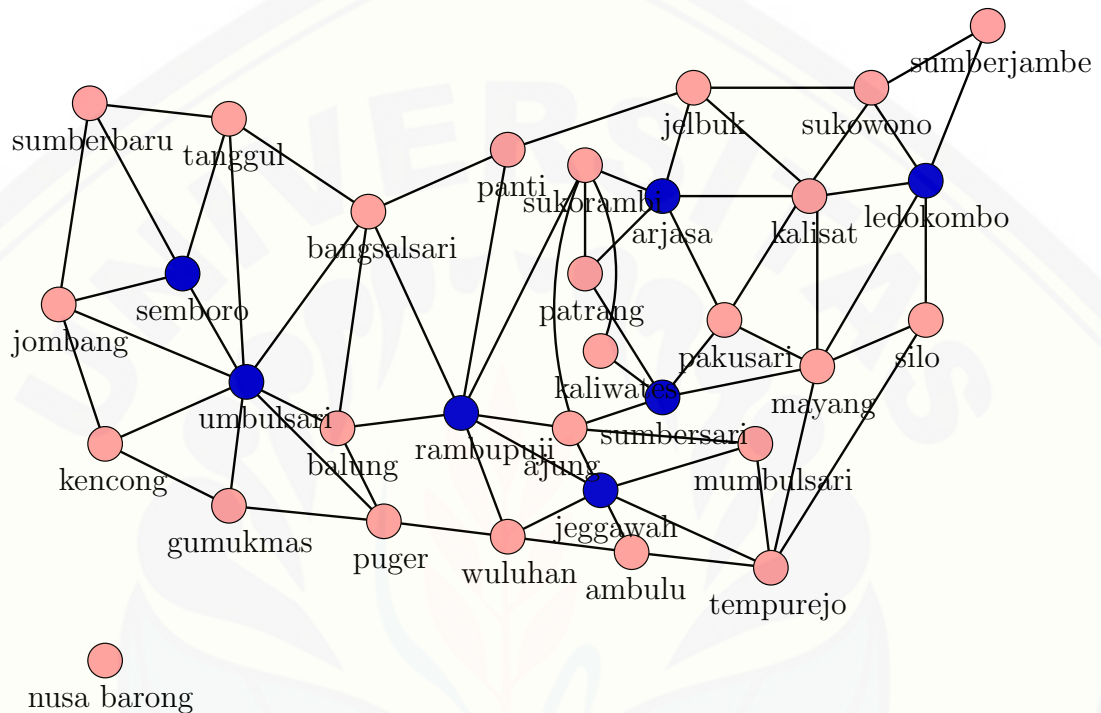
Gambar 2.21 Basis Simulasi Peta Kabupaten Jember

Gambar 2.22 adalah representasi peta kabupaten Jember dimana wilayah kecamatan pada kabupaten Jember direpresentasikan sebagai titik, sedangkan relasi antara kecamatan pada peta tersebut direpresentasikan sebagai sisi dan setiap titik memiliki relasi ke beberapa kecamatan yang direpresentasikan sebagai derajat. Dalam permasalahan ini penulis akan menerapkan teori *dominating set* pada peta kabupaten Jember tersebut untuk menentukan lokasi tempat usaha berdasarkan derajat terbesar yang dimiliki titik tersebut dimana titik tersebut adalah kecamatan pada kabupaten Jember.



Gambar 2.22 Representasi Peta Kabupaten Jember

Berdasarkan pernyataan diatas, permasalahan dalam menentukan tempat usaha di kabupaten Jember dapat terselesaikan dengan menggunakan teori *Dominating set*. Hal ini membuktikan bahwa dengan teori graf kita dapat mengaplikasikannya dalam menyelesaikan permasalahan untuk menentukan lokasi tempat usaha di kabupaten Jember. Berikut adalah hasil *Dominating set* pada peta kabupaten Jember berdasarkan derajat terbesar yang ditunjukkan pada gambar 2.23.



Gambar 2.23 *Dominating Set* pada Peta Kabupaten Jember

Dari gambar 2.23 dapat dilihat *dominating set* dari peta kabupaten Jember, dan dapat diambil kesimpulan bahwa wilayah yang cocok untuk lokasi tempat usaha di abupaten Jember terdapat pada kecamatan Semboro, kecamatan Umbulsari, kecamatan Rambipuji, kecamatan Jenggawah, kecamatan Sumberjember, kecamatan Ledokombo, dan kecamatan Sukowono.

BAB 3. METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini dikategorikan kedalam penelitian eksploratif dan penelitian terapan (*applied research*).

1. Penelitian eksploratif adalah jenis penelitian yang bertujuan menggali hal-hal yang ingin diketahui oleh peneliti dan hasil penelitian dapat digunakan sebagai dasar penelitian selanjutnya.
2. Penelitian terapan (*applied research*) merupakan penyelidikan yang hati-hati, sistematis dan terus-menerus terhadap suatu masalah dengan tujuan untuk digunakan dengan segera untuk keperluan tertentu.

3.2 Objek Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yang di dapat dari penelitian sebelumnya. Data yang digunakan berupa graf-graf khusus yang akan dioperasikan. Graf-graf yang digunakan adalah graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf kipas, graf roda, graf bunga, graf ladder dan graf gunung. Penelitian ini menggunakan metode deduktif aksiomatik dalam menyelesaikan permasalahan. Metode deduktif menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah.

3.3 Rancangan Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada pengoperasian graf, yaitu pada graf lintasan (*path*), graf lingkaran (*cycle*), graf kipas, graf roda, graf bunga dan graf gunung. Adapun langkah penelitian pada tugas akhir ini dapat dijelaskan sebagai berikut.

- a. Menentukan graf-graf khusus sebagai objek penelitian;
- b. Menerapkan operasi graf pada graf-graf khusus yang telah dioperasikan;
- c. Menerapkan *dominating set* dan *total dominating set* pada graf-graf khusus yang telah dioperasikan;

d. Optimal

Pada tahap ini akan dilihat keoptimalan *dominating set* dan *total dominating set* pada suatu graf dengan mencari batas atas dan batas bawahnya pada graf tersebut.

Pada tahap ini ada dua kemungkinan luaran yang terjadi yaitu luaran yang menunjukkan *dominating set* dan *total dominating set* yang telah mencapai nilai minimal dan *dominating set* yang tidak. Jika luaran yang dihasilkan telah minimal maka akan dilanjutkan pada tahap selanjutnya dan jika luaran yang dihasilkan tidak minimal maka akan kembali pada tahap ketiga yaitu menganalisis *dominating set* dan *total dominating set* kembali;

- e. Menentukan *domination number* dan *total domination number*

Tahap ini dilakukan jika luaran pada tahap sebelumnya telah minimal. Pada tahap ini akan menentukan *domination number* $\gamma(G)$ dan *total domination number* $\gamma_t(G)$ pada operasi graf;

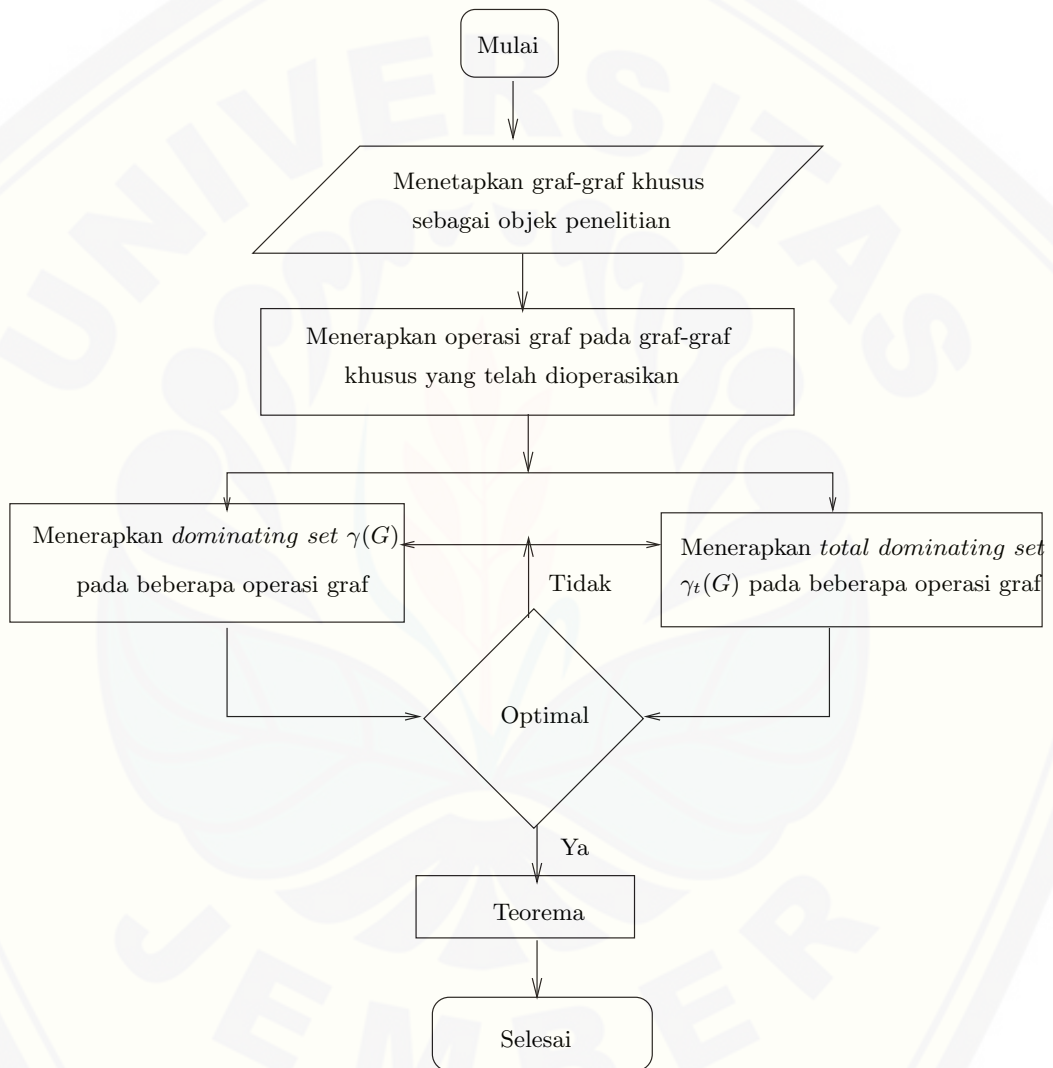
f. Teorema

Setelah menentukan *domination number* dan *total dominating set* maka

akan terbentuk teorema baru;

g. Selesai

Dari hasil *output* teorema baru yang didapat pada tahap sebelumnya, maka selesailah langkah kerja pada penelitian ini.



Gambar 3.1 Skema Langkah Kerja Penelitian

BAB 4. DOMINATING SET DAN TOTAL DOMINATING SET

Bagian ini merupakan jawaban dari rumusan masalah yang telah dirumuskan sebelumnya yaitu menjelaskan hasil penelitian mengenai *dominating set* dan *total dominating set* pada graf hasil operasi. Terdapat tiga rumusan masalah yang akan dijawab yaitu bagaimana menentukan kardinalitas sisi dan kardinalitas titik dari operasi graf *Joint*, *Cartesian Product*, *Crown Product*, dan *Composition* pada graf-graf khusus, bagaimana menentukan himpunan dominasi dari operasi graf *Joint*, *Cartesian Product*, *Crown Product*, dan *Composition* pada graf-graf khusus, bagaimana menentukan himpunan total dominasi dari operasi graf *Joint*, *Cartesian Product*, *Crown Product*, dan *Composition* pada graf-graf khusus. Graf-graf khusus yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf lingkaran, graf lintasan, graf roda, graf kipas, graf bunga, dan graf gunung. Penelitian ini diawali dengan mengoperasikan graf-graf khusus yang telah ditentukan. Kemudian menerapkan *dominating set*, *total dominating set* dan menguji apakah *dominating set* dan *total dominating set* sudah minimum dengan menggunakan teorema yang sudah ada, kemudian memeriksa apakah *dominating set* dan *total dominating set* membentuk pola, jika sudah minimum dan membentuk pola maka dilanjutkan dengan menentukan *domination number* dan *total domination number*.

Pada penelitian ini menghasilkan teorema, dan akibat baru yang ditimbulkan dengan \diamond . Terdapat 7 (tujuh) teorema mengenai *dominating set*, 7 (tujuh) teorema mengenai *total dominating set* yang ditemukan secara eksperimental dalam penelitian ini. Format penyajian temuan penelitian dalam bab ini diawali dengan pernyataan teorema kemudian dilanjutkan dengan bukti dan contoh gambar atau ilustrasi sebagai visualisasi kebenaran pembuktian teorema.

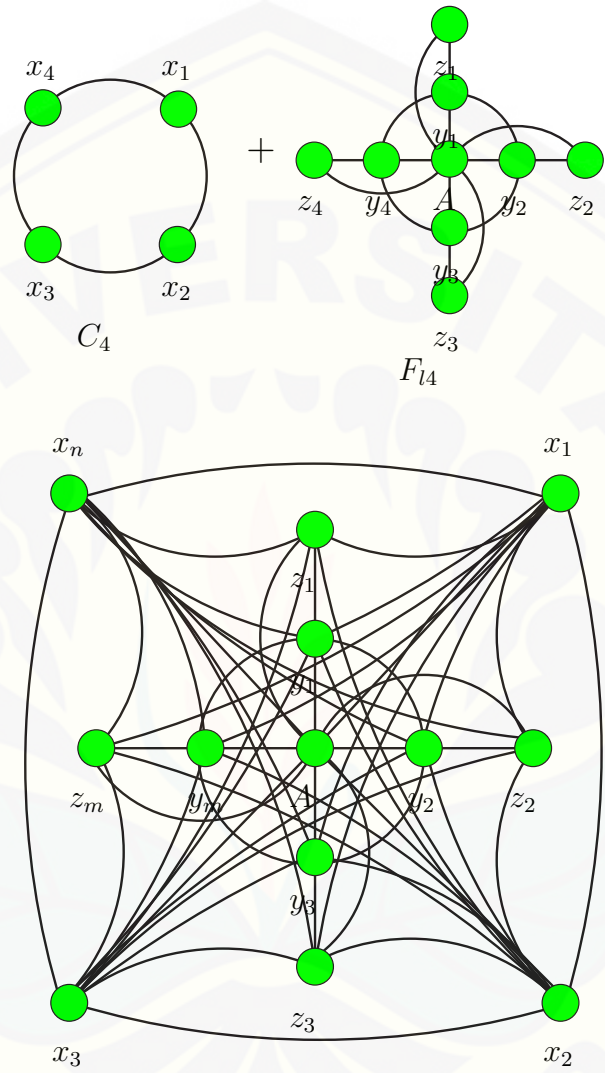
Dari hasil penelitian ini, peneliti mengembangkan *dominating set* dan *total dominating set* pada graf hasil operasi graf lintasan, graf lingkaran, graf bunga, graf gunung, graf kipas, graf roda seperti *Joint* $[(C_n + F_{lm})$ dan *Joint* $(P_n + M_{2m})]$, *Joint* $(F_n + L_m)$, *Cartesian Product* $[(F_n \square P_m)$, $(Amal(F_n, v = A, r))$ dan

$(W_m) \otimes (P_n)$], *Composition* $[(C_n[Fl_m])]$. Langkah-langkah yang digunakan untuk membuktikan teorema pada hasil penelitian ini, yaitu menggunakan observasi terlebih dahulu. Observasi bertujuan untuk mendefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi dari graf hasil operasi. Berikut hasil observasi dan teorema beserta pembuktiannya.

Observasi 4.0.1. Misal G adalah joint dari graf lingkaran C_n dengan $V(C_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ dan graf bunga Fl_m dengan $V(Fl_m) = \{A, y_i, z_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(Fl_m) = \{Ay_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{Az_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_m y_1, 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq m\}$. Operasi joint dari C_n dan Fl_m yang dinotasikan dengan $C_n + Fl_m$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ maka himpunan titik dan himpunan sisinya dapat disajikan dalam $V(C_n + Fl_m) = \{A, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_n + Fl_m) = \{Ax_i, Ay_i, x_i x_{i+1}, x_n x_1, x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Az_j, x_i z_j, y_i z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_j z_{j+1}, z_m z_1; 1 \leq j \leq m-1\}$, $p = |V(C_n + Fl_m)| = 2n + m + 1$ dan $q = |E(C_n + Fl_m)| = 2nm + 4n + 2m$.

Bukti: Sesuai dengan Definisi 2.2.1 menjelaskan bahwa $C_n + Fl_m$ memiliki $V(C_n + Fl_m) = V(C_n) \cup V(Fl_m)$ dan $E(C_n + Fl_m) = E(C_n) \cup E(Fl_m) \cup \{uv | u \in V(C_n), v \in V(Fl_m)\}$. Definisi ini dapat diilustrasikan seperti gambar 4.1 dan diperoleh $V(C_n + Fl_m) = \{A, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_n + Fl_m) = \{Ax_i, Ay_i, x_i x_{i+1}, x_n x_1, x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Az_j, x_i z_j, y_i z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_j z_{j+1}, z_m z_1; 1 \leq j \leq m-1\}$, $p = |V(C_n + Fl_m)| = 2n + m + 1$ dan $q = |E(C_n + Fl_m)| = 2nm + 4n + 2m$. \square

Gambar 4.1 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $C_n + Fl_m$ diawali dengan menggambar graf bunga (Fl_m), kemudian menggambar graf lingkaran (C_n) yang berada di luar graf bunga (Fl_m). Setelah itu, setiap titik pada graf bunga (Fl_m) dihubungkan ke semua titik pada graf lingkaran (C_n). Graf $C_n + Fl_m$ dapat di-*expand* dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan hubungan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.



Gambar 4.1 Graf Joint ($C_4 + Fl_4$)

Setelah observasi pada graf hasil operasi *joint* dari graf lingkaran dan graf bunga, ditentukan *dominating set* dan *total dominating set* pada graf hasil operasi *joint* yang disajikan dalam teorema berikut.

Berikut adalah teorema *Dominating set* pada graf *joint* $(C_n + Fl_m)$.

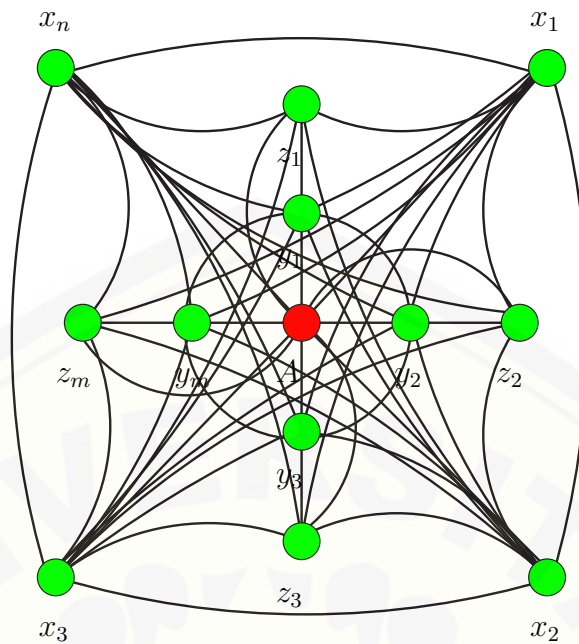
◇ **Teorema 4.0.1.** Misal G adalah graf hasil operasi *joint* dari (C_n) dan (Fl_m) , untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka $\gamma(C_n + Fl_m) = 1$.

Bukti: Sesuai dengan observasi 4.0.1 Graf *Joint* $(C_n + Fl_m)$ memiliki himpunan titik $V(C_n + Fl_m) = \{A, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(C_n + Fl_m) = \{Ax_i, Ay_i, x_i x_{i+1}, x_n x_1, x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Az_j, x_i z_j, y_i z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_j z_{j+1}, z_m z_1; 1 \leq j \leq m - 1\}$, $p = |V(C_n + Fl_m)| = 2n + m + 1$, $q = |E(C_n + Fl_m)| = 2nm + 4n + 2m$ dan $\Delta(C_n + Fl_m) = 2n + m$. Dari teorema 2.3.1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1 + \Delta(C_n + Fl_m)} \rceil \leq \gamma(C_n + Fl_m) \leq p - \Delta(C_n + Fl_m)$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \gamma(C_n + Fl_m) &\geq \left\lceil \frac{p}{1 + \Delta(C_n + Fl_m)} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{2n + m + 1}{1 + 2n + m} \right\rceil \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\gamma(C_n + Fl_m) \leq 1$ dengan memilih himpunan dominasi, yaitu $D = A$. Dapat dilihat jelas bahwa setiap titik di G bertetangga dengan $A \in D$, sehingga $|D| = 1$. Terbukti bahwa $\gamma(C_n + Fl_m) = 1$. □

Dapat dilihat pada Gambar 4.2 merupakan *dominating set* dari graf *joint* $(C_n + Fl_m)$.



Gambar 4.2 Contoh *Dominating Set* Graf Joint $(C_4 + Fl_4)$

Berikut adalah teorema *Total Dominating Set* pada graf Joint $(C_n + Fl_m)$.

◇ **Teorema 4.0.2.** Misal G adalah graf hasil operasi joint dari (C_n) dan (Fl_m) , untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka $\gamma_t(C_n + Fl_m) = 2$.

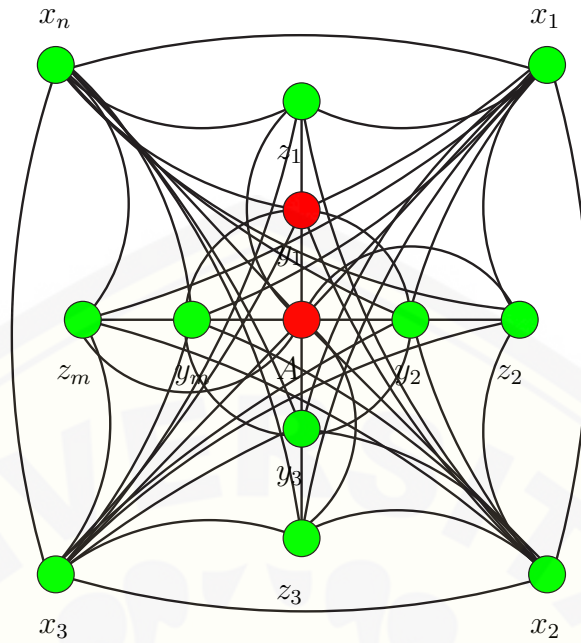
Bukti: Sesuai dengan observasi 4.0.1 Graf Joint $(C_n + Fl_m)$ memiliki himpunan titik $V(C_n + Fl_m) = \{A, x_i, y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(C_n + Fl_m) = \{Ax_i, Ay_i, x_i x_{i+1}, x_n x_1, x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{Az_j, x_i z_j, y_i z_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_j z_{j+1}, z_m z_1; 1 \leq j \leq m - 1\}$, $p = |V| = 2n + m + 1$, $q = |E| = 2nm + 4n + 2m$ dan $\Delta C_n + Fl_m = 2n + m$. Dari teorema 2.4.1

dinyatakan bahwa $\gamma_t(G) \geq \lceil \frac{p}{\Delta(G)} \rceil$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \gamma_t(C_n + Fl_m) &\geq \lceil \frac{p}{\Delta(C_n + Fl_m)} \rceil \\ &\geq \lceil \frac{2n + m + 1}{2n + m} \rceil \\ &\geq \lceil 1 + \frac{1}{2n + m} \rceil \\ &\geq 2 \end{aligned}$$

Setelah disubstitusikan nilai p dan $\Delta(C_n + Fl_m)$ sehingga diperoleh batas atas *total domination number* yaitu $\gamma_t(C_n + Fl_m) \geq 2$. Maka $\gamma_t(C_n + Fl_m)$ berada pada batas atas *total domination number*. Untuk *total dominating set*, pilih $D = \{A, y_i | i \text{ adalah satu dari } 1 \leq i \leq n\}$ sehingga $|D| = 2$. Dapat dilihat bahwa $\{A, y_1\}$ saling bertetangga. Pada gambar tersebut dapat diketahui bahwa $\gamma(C_n + Fl_m) \leq \gamma_t(C_n + Fl_m)$ yaitu $\gamma_t(C_n + Fl_m) = n + 1$. Terbukti $\gamma_t(C_n + Fl_m) = 2$. \square

Dapat dilihat pada Gambar 4.3 merupakan *total dominating set* dari graf *joint* $(C_n + Fl_m)$.

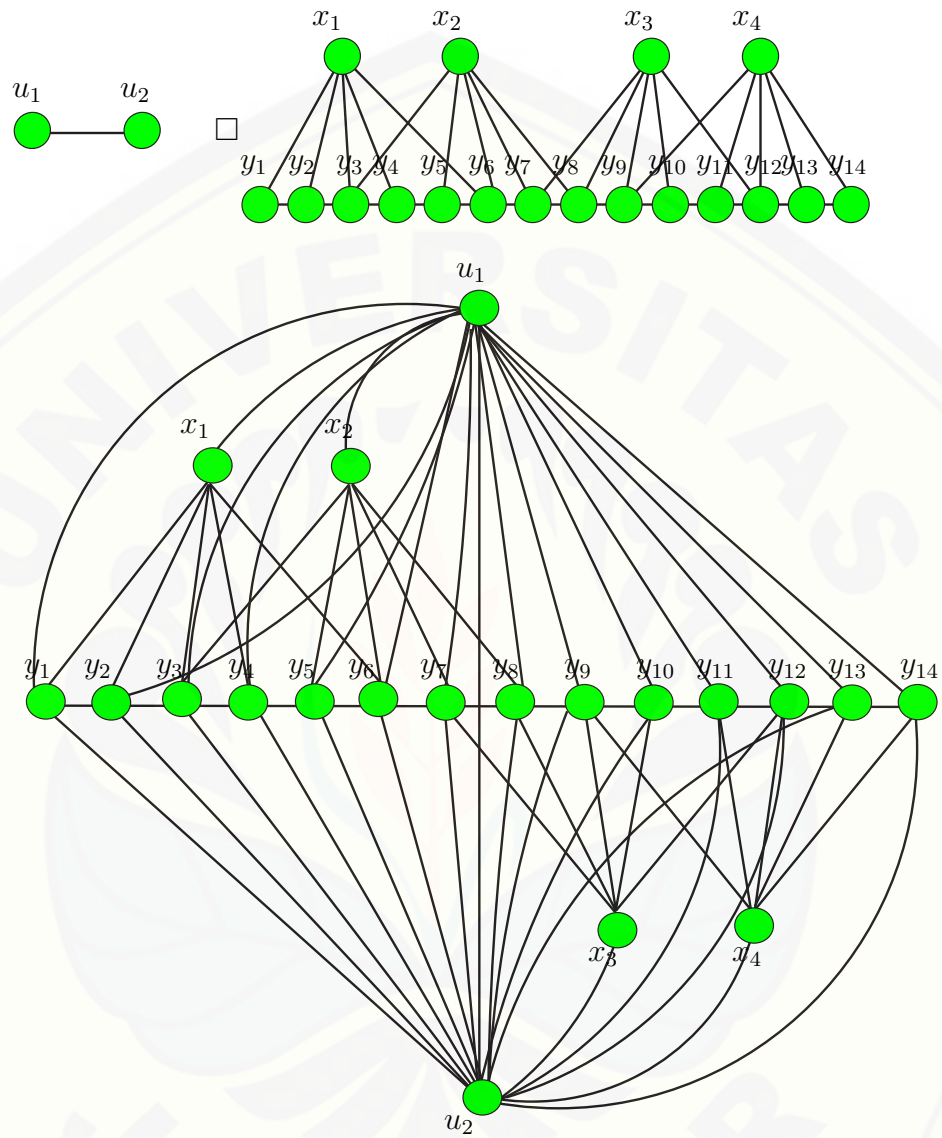


Gambar 4.3 Contoh *Total Dominating Set* Graf Joint $(C_4 + Fl_4)$

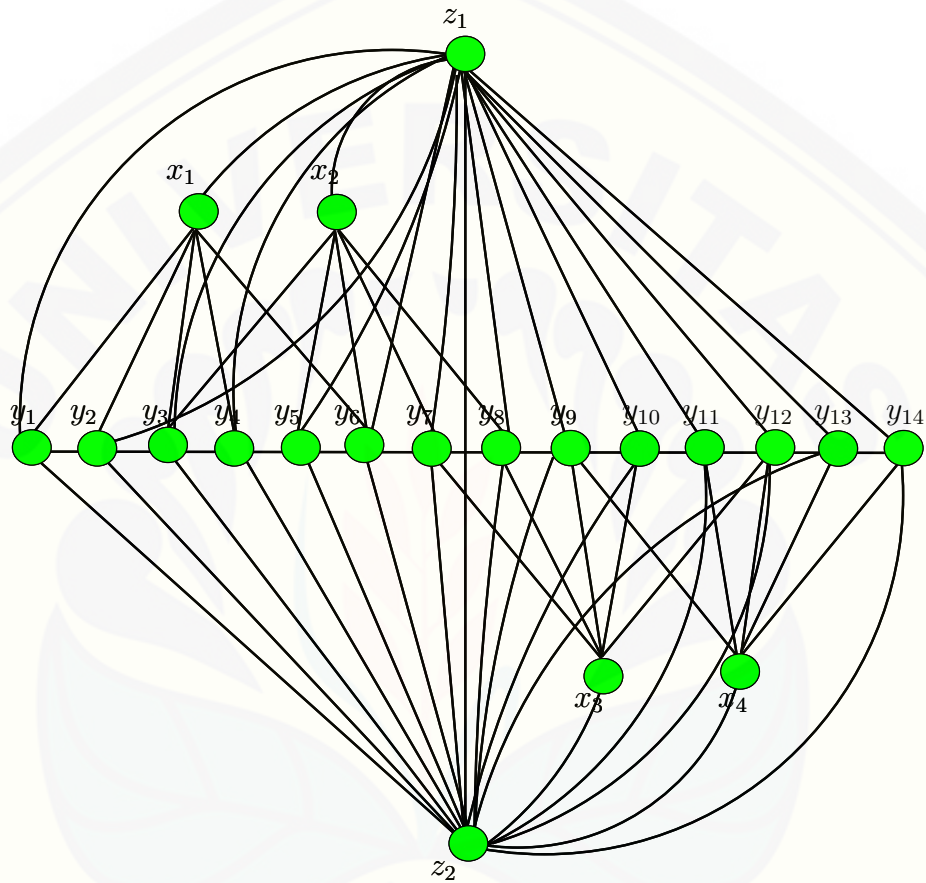
Observasi 4.0.2. Misal G adalah joint dari graf lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$ dan graf gunung (M_{2m}) dengan $V(M_{2m}) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq 2m, 1 \leq j \leq 6m + 2\}$ dan $E(M_{2m}) = \{\{x_i y_{3i-2}; 1 \leq i \leq 2m\} \cup \{x_i y_{3i+3}; 1 \leq i \leq 2m\}$ untuk i ganjil $\} \cup \{\{x_i y_{3i-3}; 1 \leq i \leq 2m\} \cup \{x_i y_{3i+2}; 1 \leq i \leq 2m\}$ untuk i genap $\} \cup \{\{x_i y_{3i-1}; 1 \leq i \leq 2m\} \cup \{x_i y_{3i}; 1 \leq i \leq 2m\} \cup \{x_i y_{3i+1}; 1 \leq i \leq 2m\}$ untuk i sebarang $\} \cup \{y_j y_{j+1}, 1 \leq j \leq 6m + 1\}$. Operasi joint dari P_n dan M_{2m} yang dinotasikan dengan $P_n + M_{2m}$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 1$ maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(P_n + M_{2m}) = \{x_i, y_j, z_k; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2, 1 \leq k \leq n, \}$ dan $E(P_n + M_{2m}) = \{x_i y_{3j-2}, x_i y_{3j+3}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\}$ untuk i ganjil $\} \cup \{\{x_i y_{3j-3}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\} \cup \{x_i y_{3j+2}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\}$ untuk i genap $\} \cup \{\{x_i y_{3j-1}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\} \cup \{x_i y_{3j}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\} \cup \{x_i y_{3j+1}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\}$ untuk i sebarang $\} \cup \{y_j y_{j+1}, 1 \leq j \leq 6n + 1\} \cup \{z_k z_{k+1}, 1 \leq k \leq n\} \cup \{z_k x_i, z_k y_j; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}$, $p = |V| = 8m + n + 2$ dan $q = |E| = 8mn + 16m + 3n$.

Bukti: Sesuai dengan Definisi 2.2.1 menjelaskan bahwa $P_n + M_{2m}$ memiliki $V(P_n + M_{2m}) = V(P_n) \cup V(M_{2m})$ dan $E(P_n + M_{2m}) = E(P_n) \cup E(M_{2m}) \cup uv | u \in V(P_n), v \in V(M_{2m})$. Dengan menggunakan notasi P_n dan M_{2m} , maka graf $P_n + M_{2m}$ dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.4. Dengan demikian didapatkan $V(P_n + M_{2m}) = \{x_i, y_j, z_k; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2, 1 \leq k \leq n, \}$ dan $E(P_n + M_{2m}) = \{x_i y_{3j-2}, x_i y_{3j+3}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\}$ untuk i ganjil $\} \cup \{x_i y_{3j-3}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\} \cup \{x_i y_{3j+2}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\}$ untuk i genap $\} \cup \{x_i y_{3j-1}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\} \cup \{x_i y_{3j}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\} \cup \{x_i y_{3j+1}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\}$ untuk i sebarang $\} \cup \{y_j y_{j+1}, 1 \leq j \leq 6n + 1\} \cup \{z_k z_{k+1}, 1 \leq k \leq n\} \cup \{z_k x_i, z_k y_j; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}$, $p = |V| = 8m + n + 2$ dan $q = |E| = 8mn + 16m + 3n$.

□



Gambar 4.4 Graf Joint $(P_2 + M_{2,2})$



Gambar 4.5 Contoh Operasi Graf Joint ($P_2 + M_{2,2}$)

Gambar 4.5 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $P_n + M_{2m}$ diawali dengan menggambar graf gunung (M_{2m}), kemudian menggambarkan graf lintasan (P_n) diantara graf gunung (M_{2m}). Setelah itu, setiap titik pada graf gunung (M_{2m}) dihubungkan ke semua titik pada graf lintasan (P_n). Graf $P_n + M_{2m}$ dapat di-*expand* dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan hubungan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

Setelah observasi pada graf hasil operasi *joint* dari graf lintasan dan graf gunung, ditentukan *dominating set* dan *total dominating set* pada graf hasil operasi *joint* yang disajikan dalam teorema berikut.

Berikut adalah teorema *Dominating set* pada graf joint ($P_n + M_{2m}$).

◇ **Teorema 4.0.3.** Misal G adalah graf hasil operasi *joint* dari (P_n) dan (M_{2m}), untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 1$, maka *Dominating set*-nya adalah:

$$\gamma(P_n + M_{2m}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 2 \leq n \leq 3 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{untuk } n > 3 \end{cases}$$

Bukti. Graf ($P_n + M_{2m}$) adalah graf dengan himpunan titik $V(P_n + M_{2m}) = \{x_i, y_j, z_k; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2, 1 \leq k \leq n, \}$ dan $E(P_n + M_{2m}) = \{x_i y_{3j-2}, x_i y_{3j+3}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\}$ untuk i ganjil $\} \cup \{x_i y_{3j-3}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\} \cup \{x_i y_{3j+2}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\}$ untuk i genap $\} \cup \{x_i y_{3j-1}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\} \cup \{x_i y_{3j}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\} \cup \{x_i y_{3j+1}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\}$ untuk i sebarang $\} \cup \{y_j y_{j+1}, 1 \leq j \leq 6n + 1\} \cup \{z_k z_{k+1}, 1 \leq k \leq n\} \cup \{z_k x_i, z_k y_j; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}$, $p = |V| = 8m + n + 2$ dan $q = |E| = 8mn + 16m + 3n$, dan terdapat 2 kemungkinan $\Delta(P_n + M_{2m})$, yaitu $\Delta(P_n + M_{2m}) = 8m + 3$ untuk $n \leq 3$ dan $\Delta(P_n + M_{2m}) = 8m + 4$ untuk $n > 3$. Dari teorema 2.3.1 dinyatakan bahwa

$\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n+M_{2m})} \rceil \leq \gamma(P_n + M_{2m}) \leq p - \Delta(P_n + M_{2m})$ maka diperoleh bahwa

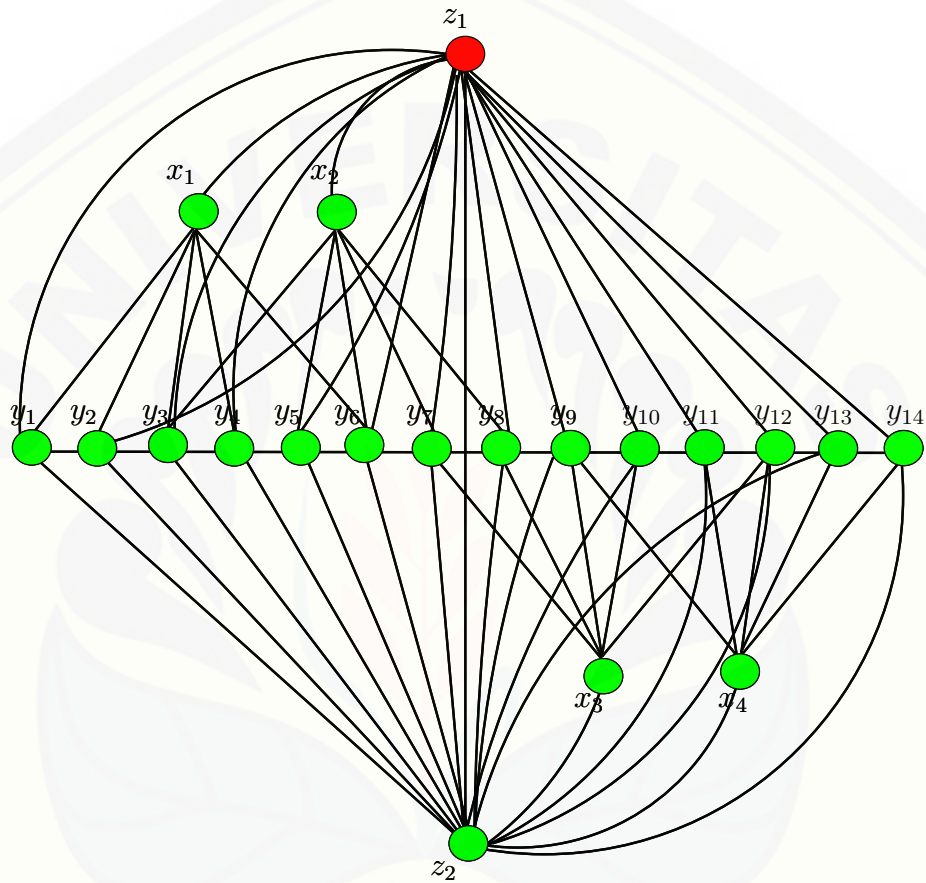
$$\begin{aligned} \gamma(P_n + M_{2m}) &\geq \lceil \frac{p}{1 + \Delta(P_n + M_{2m})} \rceil \\ &\geq \lceil \frac{8m + n + 2}{1 + 8m + 3} \rceil \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\gamma(P_n + M_{2m}) \leq 1$ dengan memilih himpunan dominasi, yaitu $D = z_1$. Dapat dilihat jelas bahwa setiap titik di G bertetangga dengan $z_1 \in D$, sehingga $|D| = 1$. Ter bukti bahwa $\gamma(P_n + M_{2m}) = 1$. Untuk $n > 3$ maka $\Delta(P_n + M_{2m}) = 8m + 4$. Dari teorema 2.3.1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(P_n+M_{2m})} \rceil \leq \gamma(P_n + M_{2m}) \leq p - \Delta(P_n + M_{2m})$ maka diperoleh bahwa

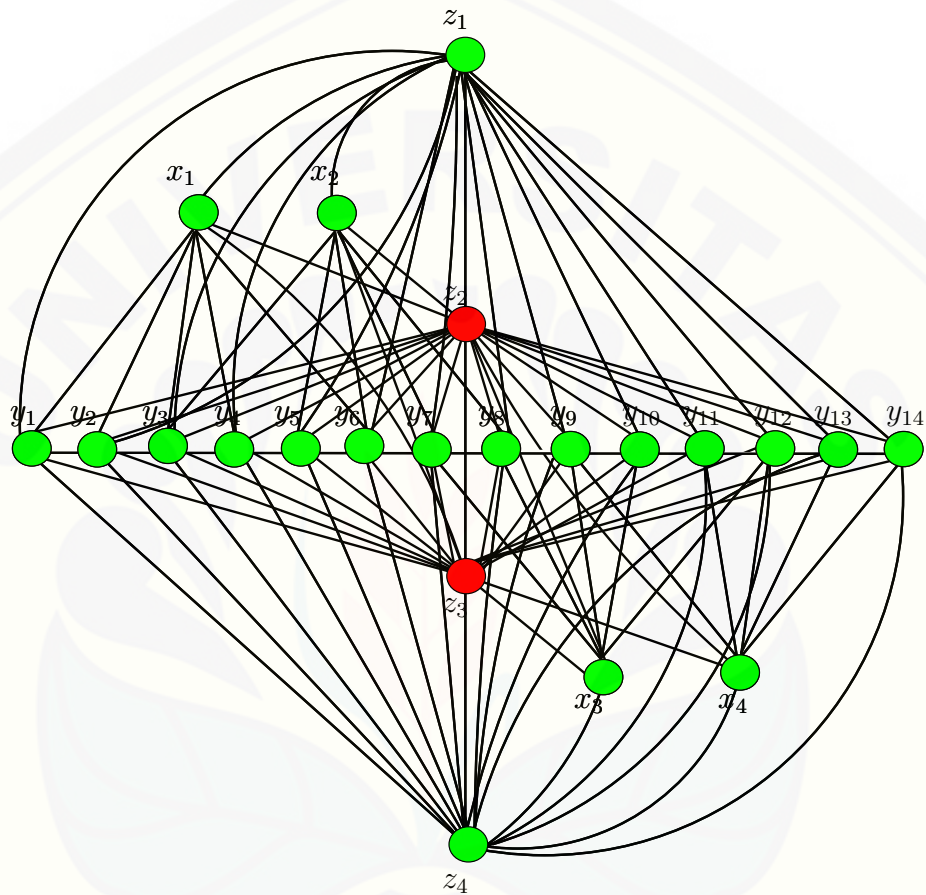
$$\begin{aligned} \gamma(P_n + M_{2m}) &\geq \lceil \frac{p}{1 + \Delta(P_n + M_{2m})} \rceil \\ &\geq \lceil \frac{8m + n + 2}{1 + 8m + 4} \rceil \\ &\geq \lceil \frac{n}{3} \rceil \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\gamma(P_n + M_{2m}) \leq n - 2$ dengan memilih himpunan dominasi, yaitu $D = z_2$ dan z_3 . Dapat dilihat jelas bahwa setiap titik di G bertetangga dengan z_1 dan $z_2 \in D$, sehingga $|D| = 2$ untuk $(P_4 + M_{2,2})$. Terbukti bahwa $\gamma(P_n + M_{2m}) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. \square

Dapat dilihat pada Gambar 4.6 merupakan *dominating set* dari graf *joint* $(P_n + M_{2m})$, Gambar 4.7 merupakan *dominating set* dari graf *joint* $(P_4 + M_{2,2})$.



Gambar 4.6 Contoh *Dominating Set* Graf Joint $(P_2 + M_{2,2})$



Gambar 4.7 Contoh *Dominating Set* Graf Joint $(P_4 + M_{2,2})$

Berikut adalah teorema *Total Dominating Set* pada graf joint $(P_n + M_{2m})$.

◇ **Teorema 4.0.4.** *Misal G adalah graf hasil operasi joint dari (P_n) dan (M_{2m}) , untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 1$, maka *Total Dominating Set*-nya adalah:*

$$\gamma_t(P_n + M_{2m}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } 2 \leq n \leq 3 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{untuk } n > 3 \end{cases}$$

Bukti. Graf $(P_n + M_{2m})$ adalah graf dengan himpunan titik $V(P_n + M_{2m}) = \{x_i, y_j, z_k; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2, 1 \leq k \leq n, \}$ dan $E(P_n + M_{2m}) = \{x_i y_{3j-2}, x_i y_{3j+3}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\}$ untuk i ganjil $\cup \{x_i y_{3j-3}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\} \cup \{x_i y_{3j+2}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\}$ untuk i genap $\cup \{x_i y_{3j-1}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\} \cup \{x_i y_{3j}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\} \cup \{x_i y_{3j+1}; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 6n + 2\}$ untuk i sebarang $\cup \{y_j y_{j+1}, 1 \leq j \leq 6n + 1\} \cup \{z_k z_{k+1}, 1 \leq k \leq n\} \cup \{z_k x_i, z_k y_j; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}$, $p = |V| = 8m + n + 2$ dan $q = |E| = 8mn + 16m + 3n$, dan terdapat 2 kemungkinan $\Delta(P_n + M_{2m})$, yaitu $\Delta(P_n + M_{2m}) = 8m + 3$ untuk $n \leq 3$ dan $\Delta(P_n + M_{2m}) = 8m + 4$ untuk $n > 3$. Dari teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa $\gamma_t(G) \geq \lceil \frac{p}{\Delta(G)} \rceil$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \gamma_t(P_n + M_{2m}) &\geq \lceil \frac{p}{\Delta(P_n + M_{2m})} \rceil \\ &\geq \lceil \frac{8m + n + 2}{8m + 3} \rceil \\ &\geq \lceil 1 + \frac{8m + 2 + n}{8m + 3} \rceil \\ &\geq \lceil 1,05 \rceil \\ &\geq 2 \end{aligned}$$

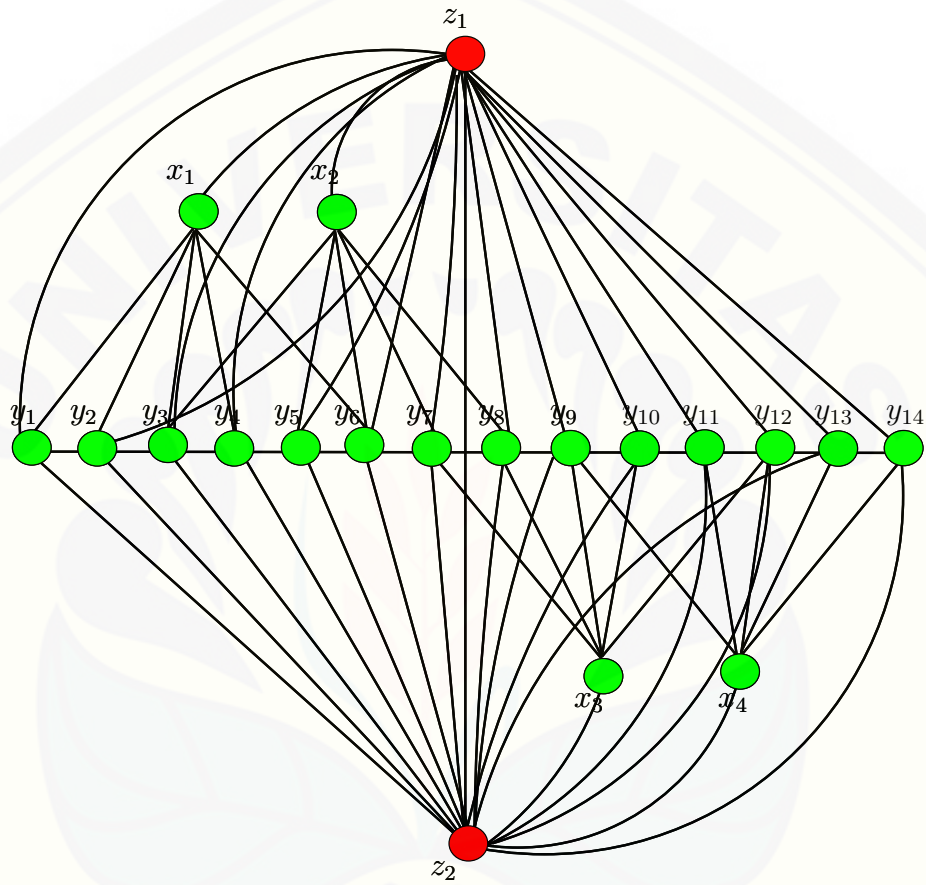
Setelah disubstitusikan nilai p dan $\Delta(P_n + M_{2m})$ sehingga diperoleh batas atas *total domination number* yaitu $\gamma_t(P_n + M_{2m}) \geq 2$. Maka $\gamma_t(P_n + M_{2m})$ berada pada batas atas *total domination number*. Untuk *total dominating set*, pilih $D = \{z_1 \text{ dan } z_2\}$ sehingga $|D| = 2$. Dapat dilihat bahwa $\{z_1 \text{ dan } z_2\}$ saling bertetangga.

Pada gambar tersebut dapat diketahui bahwa $\gamma(P_n + M_{2m}) \leq \gamma_t(P_n + M_{2m})$ yaitu $\gamma_t(P_n + M_{2m}) = n + 1$. Terbukti $\gamma_t(P_n + M_{2m}) = 2$. Untuk $n > 3$ dan misalkan ambil $n = 4$ maka $\Delta(P_n + M_{2m}) = 8m + 4$. Disubstitusikan nilai p dan $\Delta(P_n + M_{2m})$ sehingga diperoleh bahwa

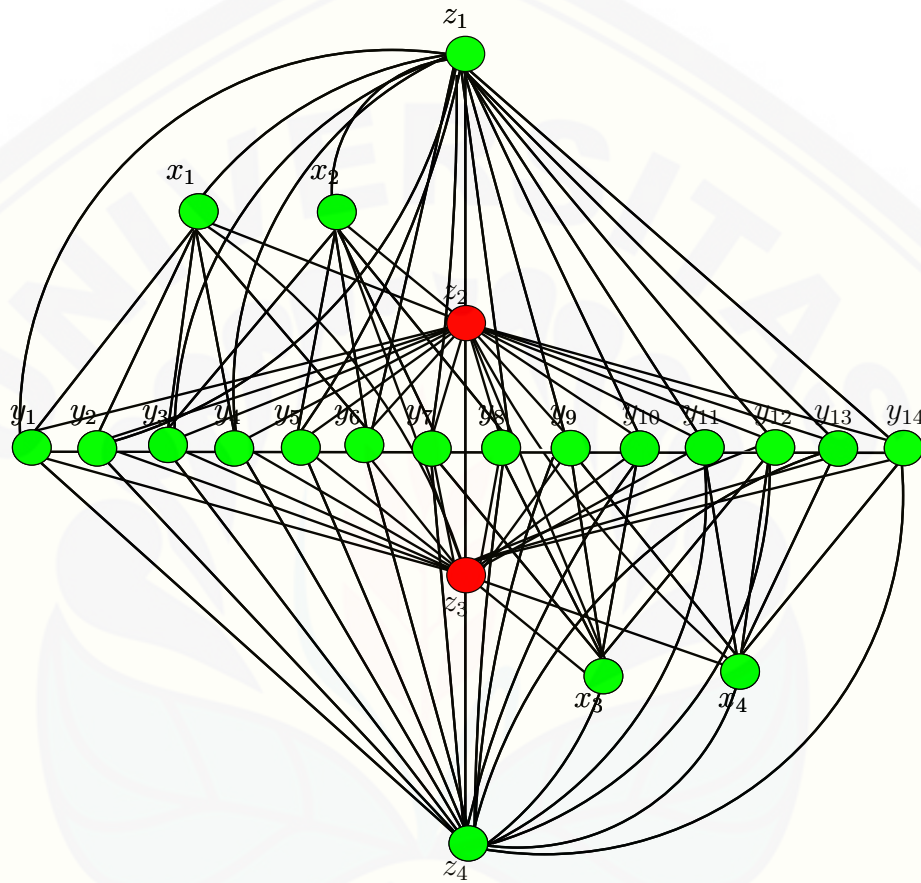
$$\begin{aligned} \gamma_t(P_n + M_{2m}) &\geq \left\lceil \frac{p}{\Delta(P_n + M_{2m})} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{8m + n + 2}{8m + 4} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil 1 + \frac{8m + 4 + 2}{8m + 4} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil 1 + \frac{2}{8m + 4} \right\rceil \\ &\geq [1, 01] \\ &\geq 2 \end{aligned}$$

Setelah disubstitusikan nilai p dan $\Delta(P_n + M_{2m})$ sehingga diperoleh batas atas *total domination number* yaitu $\gamma_t(P_n + M_{2m}) \geq 2$. Maka $\gamma_t(P_n + M_{2m})$ berada pada batas atas *total domination number*. Untuk *total dominating set*, pilih $D = \{z_2 \text{ dan } z_3\}$ untuk $n = 4$ sehingga $|D| = 2$. Dapat dilihat bahwa $\{z_2 \text{ dan } z_3\}$ saling bertetangga. Pada gambar tersebut dapat diketahui bahwa $\gamma(P_2 + M_{2,2}) = \gamma_t(P_2 + M_{2,2})$ yaitu $\gamma_t(P_2 + M_{2,2}) = n$. Terbukti $\gamma_t(P_2 + M_{2,2}) = 2$ untuk $n = 4$. \square

Dapat dilihat pada Gambar 4.8 merupakan *total dominating set* dari graf *joint* $(P_n + M_{2m})$, Gambar 4.9 merupakan *total dominating set* dari graf *joint* $(P_4 + M_{2,2})$.



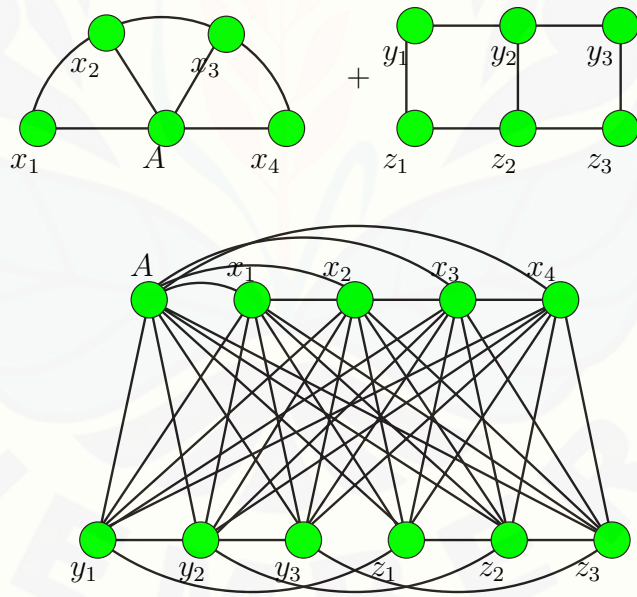
Gambar 4.8 Contoh *Total Dominating Set* Graf Joint $(P_2 + M_{2,2})$



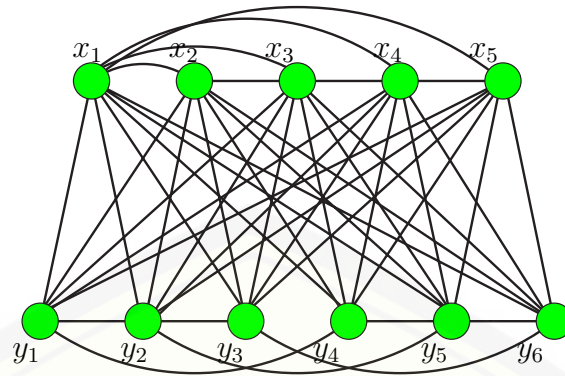
Gambar 4.9 Contoh *Total Dominating Set* Graf Joint $(P_4 + M_{2,2})$

Observasi 4.0.3. Misal diketahui graf kipas F_n dengan $V(F_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(F_n) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{Ax_n; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf ladder L_m dengan $V(L_m) = \{y_j, z_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(L_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{y_j z_j; 1 \leq j \leq m\} \cup \{z_j z_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$. Operasi joint dari F_n dan L_m yang dinotasikan dengan $F_n + L_m$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$ maka himpunan titik dan himpunan sisinya dapat disajikan dalam $V(F_n + L_m) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(F_n + L_m) = \{x_i x_{i+1}, x_n x_1, x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+m}; 1 \leq j \leq m\}$, $p = |V(F_n + L_m)| = n + 2m + 1$ dan $q = |E(F_n + L_m)| = 4nm + 2n + 4m$

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.2.1 menjelaskan bahwa $F_n + L_m$ memiliki $V(F_n + L_m) = V(F_n) \cup V(L_m)$ dan $E(F_n + L_m) = E(F_n) \cup E(L_m) \cup \{uv | u \in V(F_n), v \in V(L_m)\}$. Definisi ini dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.1 dan diperoleh $V(F_n + L_m) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(F_n + L_m) = \{x_i x_{i+1}, x_n x_1, x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+m}; 1 \leq j \leq m\}$, $p = |V(F_n + L_m)| = n + 2m + 1$ dan $q = |E(F_n + L_m)| = 4nm + 2n + 4m$. \square



Gambar 4.10 Graf Joint $F_n + L_m$



Gambar 4.11 Contoh Graf $F_4 + L_3$

Gambar 4.11 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $F_n + L_m$ diawali dengan menggambar graf kipas (F_n), kemudian menggambar graf ladder (L_m). Setelah itu, setiap titik pada graf ladder (L_m) dihubungkan ke semua titik pada graf Kipas (F_n). Graf $F_n + L_m$ dapat di-*expand* dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan hubungan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

Setelah observasi pada graf hasil operasi *joint* dari graf kipas dan graf ladder, ditentukan *dominating set* dan *total dominating set* pada graf hasil operasi *joint* yang disajikan dalam teorema berikut.

Berikut adalah teorema *Dominating set* pada graf *joint* ($F_n + L_m$).

◇ **Teorema 4.0.5.** Misal G adalah graf hasil operasi *joint* dari (F_n) dan (L_m), untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, maka $\gamma(F_n + L_m) = 1$.

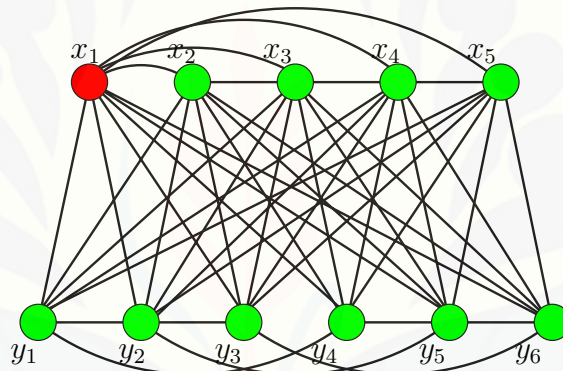
Bukti: Sesuai dengan observasi 4.0.3 Graf *Joint* ($F_n + L_m$) memiliki himpunan titik $V(F_n + L_m) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(F_n + L_m) = \{x_i x_{i+1}, x_n x_1, x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+m}; 1 \leq j \leq m\}$, $p = |V(F_n + L_m)| = n + 2m + 1$ dan $q = |E(F_n + L_m)| = 4nm + 2n + 4m$ dan $\Delta(F_n + L_m) = n + 2m$. Dari teorema 2.3.1 dinyatakan bahwa

$\lceil \frac{p}{1+\Delta(F_n+L_m)} \rceil \leq \gamma(F_n+L_m) \leq p - \Delta(F_n+L_m)$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \gamma(F_n+L_m) &\geq \lceil \frac{p}{1+\Delta(F_n+L_m)} \rceil \\ &\geq \lceil \frac{n+2m+1}{1+n+2m} \rceil \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\gamma(F_n+L_m) \leq 1$ dengan memilih himpunan dominasi, yaitu $D = x_1$. Dapat dilihat jelas bahwa setiap titik di G bertetangga dengan $x_1 \in D$, sehingga $|D| = 1$. Terbukti bahwa $\gamma(F_n+L_m) = 1$. \square

Dapat dilihat pada Gambar 4.12 merupakan *dominating set* dari graf *joint* (F_n+L_m) .



Gambar 4.12 Contoh *Dominating Set* Graf *Joint* F_4+L_3

Berikut adalah teorema *Total Dominating Set* pada graf *Joint* $(F_n + L_m)$.

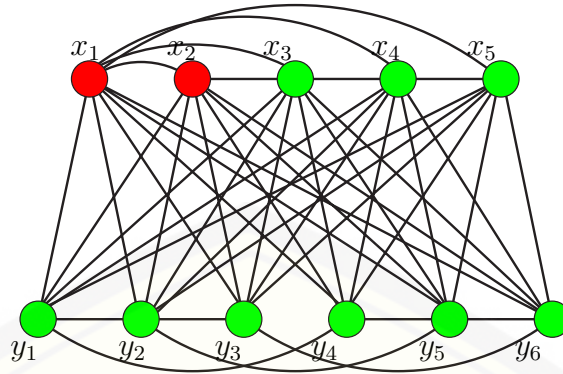
◇ **Teorema 4.0.6.** Misal G adalah graf hasil operasi *joint* dari (F_n) dan (L_m) , untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$, maka $\gamma_t(F_n + L_m) = 2$.

Bukti: Sesuai dengan observasi 4.0.1 Graf *Joint* $(F_n + L_m)$ memiliki himpunan titik $V(F_n + L_m) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(F_n + L_m) = \{x_i x_{i+1}, x_n x_1, x_i y_j; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+m}; 1 \leq j \leq m\}$, $p = |V(F_n + L_m)| = n + 2m + 1$ dan $q = |E(F_n + L_m)| = 4nm + 2n + 4m$ dan $\Delta(F_n + L_m) = n + 2m$. Dari teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa $\gamma_t(G) \geq \lceil \frac{p}{\Delta(G)} \rceil$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \gamma_t(F_n + L_m) &\geq \lceil \frac{p}{\Delta(F_n + L_m)} \rceil \\ &\geq \lceil \frac{n + 2m + 1}{n + 2m} \rceil \\ &\geq \lceil 1 + \frac{1}{n + 2m} \rceil \\ &\geq 2 \end{aligned}$$

Setelah disubstitusikan nilai p dan $\Delta(F_n + L_m)$ sehingga diperoleh batas atas *total domination number* yaitu $\gamma_t(F_n + L_m) \geq 2$. Maka $\gamma_t(F_n + L_m)$ berada pada batas atas *total domination number*. Untuk *total dominating set*, pilih $D = \{x_1 \text{ dan } x_2\}$ sehingga $|D| = 2$. Dapat dilihat bahwa $\{x_1 \text{ dan } x_2\}$ saling bertetangga. Pada gambar tersebut dapat diketahui bahwa $\gamma(F_n + L_m) \leq \gamma_t(F_n + L_m)$ yaitu $\gamma_t(F_n + L_m) = n + 1$. Terbukti $\gamma_t(F_n + L_m) = 2$. □

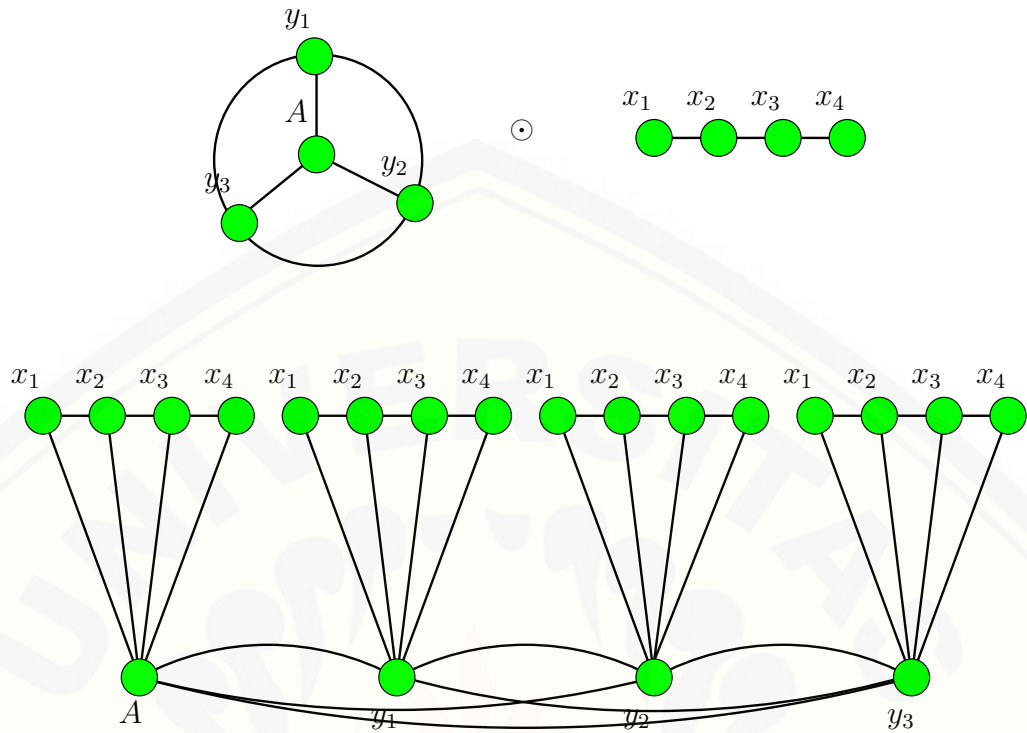
Dapat dilihat pada Gambar 4.13 merupakan *total dominating set* dari graf *joint* $(F_n + L_m)$.



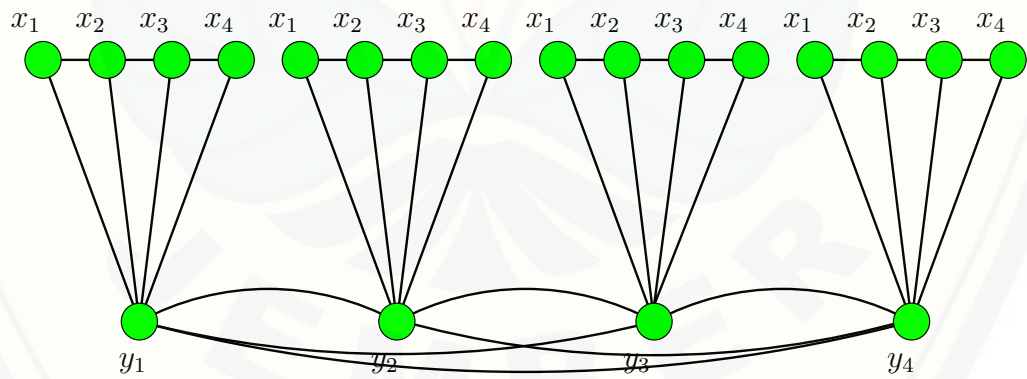
Gambar 4.13 Contoh *Total Dominating Set* Graf Joint $F_4 + L_3$

Observasi 4.0.4. Misal diketahui graf roda W_m dengan $V(W_m) = \{A, y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(W_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{y_m y_1\} \cup \{A y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan graf lintasan P_n dengan $V(P_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\}$. Operasi crown product dari P_n dan W_m yang dinotasikan dengan $W_m \odot P_n$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(W_m \odot P_n) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(W_m \odot P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{y_m y_1; 1 \leq i \leq m\}$, $|V(W_m \odot P_n)| = nm + m$, dan $|E(W_m \odot P_n)| = 2nm + m - 2$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.2.5 menjelaskan bahwa $G_1 \odot G_2$, yaitu graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G_1 dan $|V(G_1)|$ duplikat dari G_2 ($G_{2,1}, G_{2,2}, \dots, G_{2,|V(G_1)|}$), kemudian menghubungkan titik ke- i dari G_1 ke setiap titik di $G_{2,i}$, $i = 1, 2, 3, \dots, |V(G_1)|$. Maka graf $W_m \odot P_n$ dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.14. Dengan demikian didapatkan $V(W_m \odot P_n) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(W_m \odot P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{y_m y_1; 1 \leq i \leq m\}$, $|V(W_m \odot P_n)| = nm + m$, dan $|E(W_m \odot P_n)| = 2nm + m - 2$. \square



Gambar 4.14 Graf *Crown Product* ($W_m \odot P_n$)



Gambar 4.15 Contoh Graf *Crown Product* ($W_3 \odot P_4$)

Gambar 4.15 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $W_m \odot P_n$ diawali dengan menggambar graf roda W_m , kemudian menggambar graf lintasan P_n sebanyak titik pada graf kipas W_m . Kemudian setiap titik ke- j pada graf kipas W_m dihubungkan ke setiap titik pada duplikat ke- i dari graf lintasan P_n . Graf $W_m \odot P_n$ dapat di-*expand* dengan menambahkan banyaknya titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan hubungan *adjacency*-nya dilakukan melalui cara yang sama.

Setelah observasi pada graf hasil operasi *crown product* dari graf $W_m \odot P_n$, ditentukan *dominating set* dan *total dominating set* pada graf hasil operasi *crown product* yang disajikan dalam teorema berikut.

Berikut adalah teorema *Dominating set* pada graf $W_m \odot P_n$.

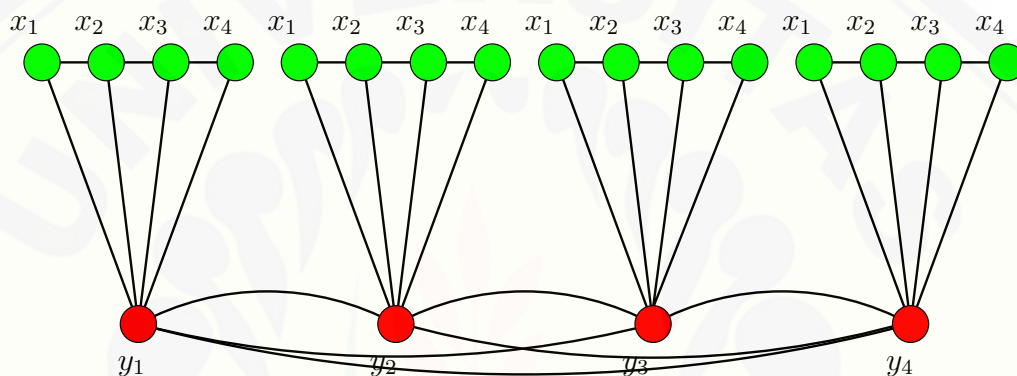
◇ **Teorema 4.0.7.** *Misal G adalah graf hasil operasi crown product dari (W_m) dan (P_n) , untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, maka $\gamma(W_m \odot P_n) = n + 1$.*

Bukti. Sesuai dengan observasi 4.0.4 Graf *crown product* $(W_m \odot P_n)$ memiliki himpunan titik $V(W_m \odot P_n) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(W_m \odot P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{y_m y_1; 1 \leq i \leq m\}$, $|V(W_m \odot P_n)| = nm + m$, dan $|E(W_m \odot P_n)| = 2nm + m - 2$ dan $\Delta W_m \odot P_n = n + m - 1$. Dari teorema 2.3.1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1 + \Delta(W_m \odot P_n)} \rceil \leq \gamma(W_m \odot P_n) \leq p - \Delta(W_m \odot P_n)$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \gamma(W_m \odot P_n) &\geq \left\lceil \frac{p}{1 + \Delta(W_m \odot P_n)} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{nm + m}{1 + n + m - 1} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{4n + 4}{n + 4} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{16}{7} \right\rceil \\ &\geq 3 \end{aligned}$$

Setelah disubstitusikan nilai p dan $\Delta(W_m \odot P_n)$ sehingga diperoleh batas bawah dan batas atas *domination number* yaitu $3 \leq \gamma(W_m \odot P_n) \leq 4n + 1$ terbukti bahwa $\gamma(W_m \odot P_n)$ berada pada selang batas bawah dan batas atas. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\gamma(W_m \odot P_n) \leq 4n + 1$ dengan memilih himpunan dominasi, yaitu $D = y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_m$. Dapat dilihat jelas bahwa setiap titik di G bertetangga dengan y_1, y_2, y_3 dan $y_4 \in D$, sehingga $|D| = 4$ untuk $(W_3 \odot P_4)$. Terbukti bahwa $\gamma(W_m \odot P_n) = n + 1$. \square

Dapat dilihat pada Gambar 4.16 merupakan *dominating set* dari graf *crown product* $(W_m \odot P_n)$.



Gambar 4.16 Contoh *Dominating Set* Graf *Crown Product* $(W_3 \odot P_4)$

Berikut adalah teorema *Total dominating set* pada graf $W_m \odot P_n$.

\diamond **Teorema 4.0.8.** Misal G adalah graf hasil operasi crown product dari (W_m) dan (P_n) , untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, maka $\gamma_t(W_m \odot P_n) = n + 1$.

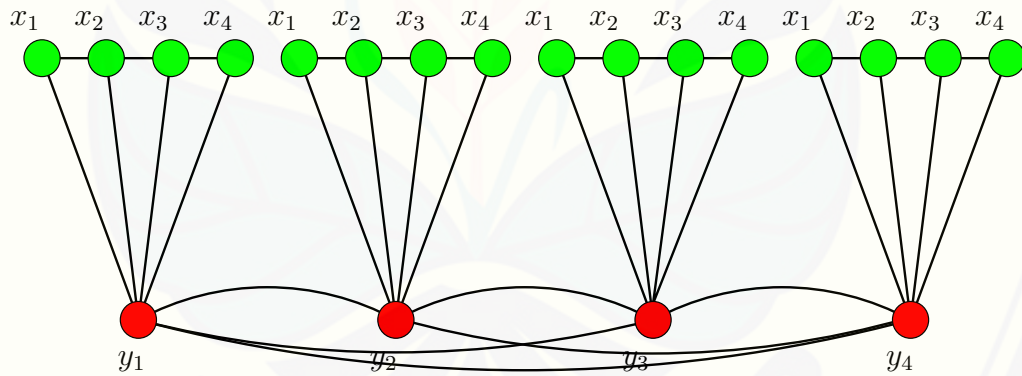
Bukti. Sesuai dengan observasi 4.0.4 Graf *crown product* $(W_m \odot P_n)$ memiliki himpunan titik $V(W_m \odot P_n) = \{x_i, y_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(W_m \odot P_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{y_j x_i; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m - 1\} \cup \{y_m y_1; 1 \leq i \leq m\}$, $|V(W_m \odot P_n)| = nm + m$, dan $|E(W_m \odot P_n)| = 2nm + m - 2$ dan $\Delta W_m \odot P_n = n + m - 1$. Dari teorema 2.4.1

dinyatakan bahwa $\gamma_t(G) \geq \lceil \frac{p}{\Delta(G)} \rceil$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \gamma_t(W_m \odot P_n) &\geq \lceil \frac{p}{\Delta(W_m \odot P_n)} \rceil \\ &\geq 1 + \lceil \frac{nm + m}{n + m - 1} \rceil \\ &\geq 1 + \lceil 2,6 \rceil \\ &\geq 4 \end{aligned}$$

Setelah disubstitusikan nilai p dan $\Delta(W_m \odot P_n)$ sehingga diperoleh batas atas *total domination number* yaitu $\gamma_t(W_m \odot P_n) \geq 4$. Maka $\gamma_t(W_m \odot P_n)$ berada pada batas atas *total domination number*. Untuk *total dominating set*, pilih $D = \{y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_m\}$ sehingga $|D| = 4$. Dapat dilihat bahwa $\{y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_m\}$ saling bertetangga. Pada gambar tersebut dapat diketahui bahwa $\gamma(W_3 \odot P_4) = \gamma_t(W_3 \odot P_4)$ yaitu $\gamma_t(W_3 \odot P_4) = n$. Terbukti $\gamma_t(W_3 \odot P_4) = 4$. \square

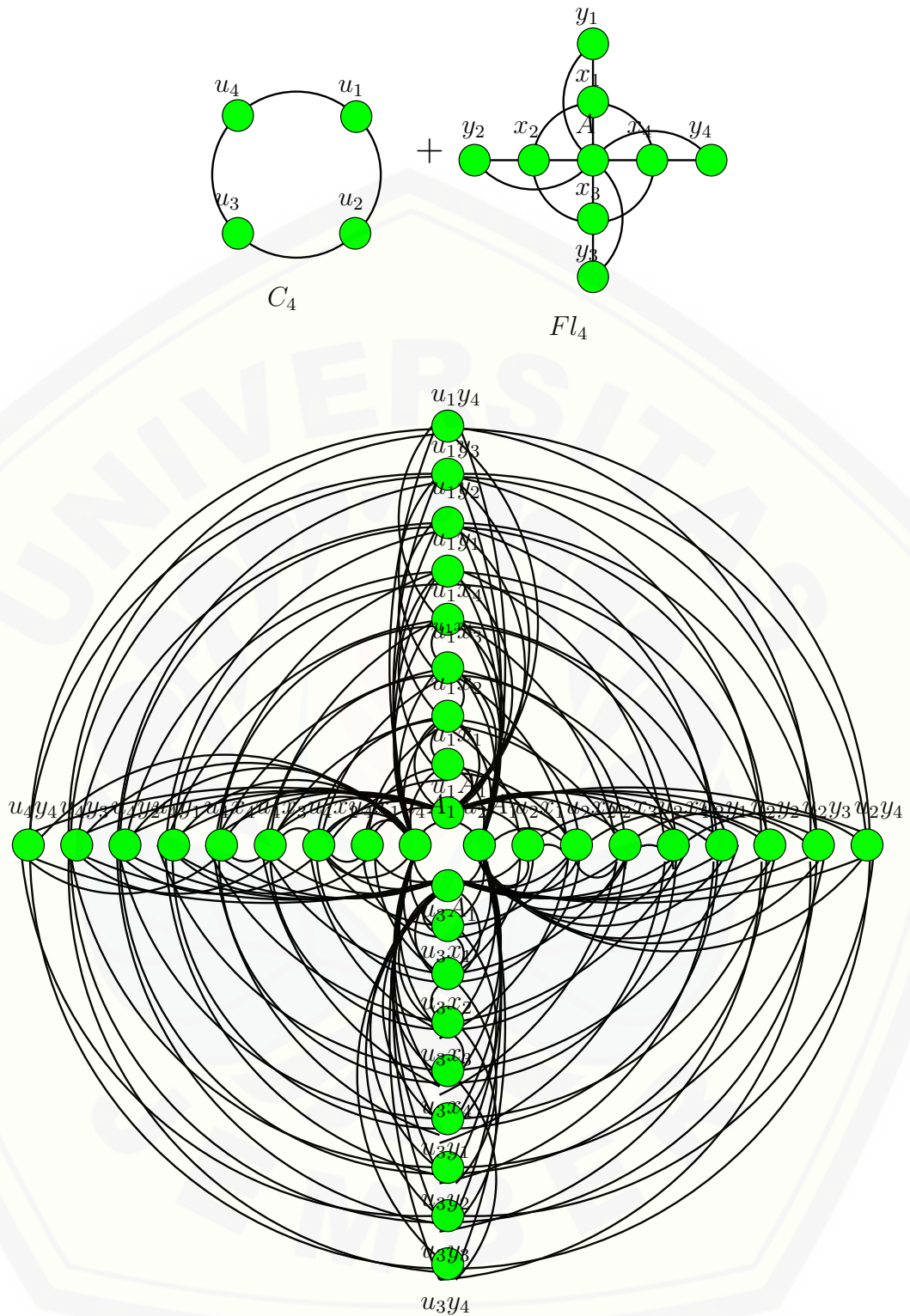
Dapat dilihat pada Gambar 4.17 merupakan *total dominating set* dari graf joint $(W_m \odot P_n)$.



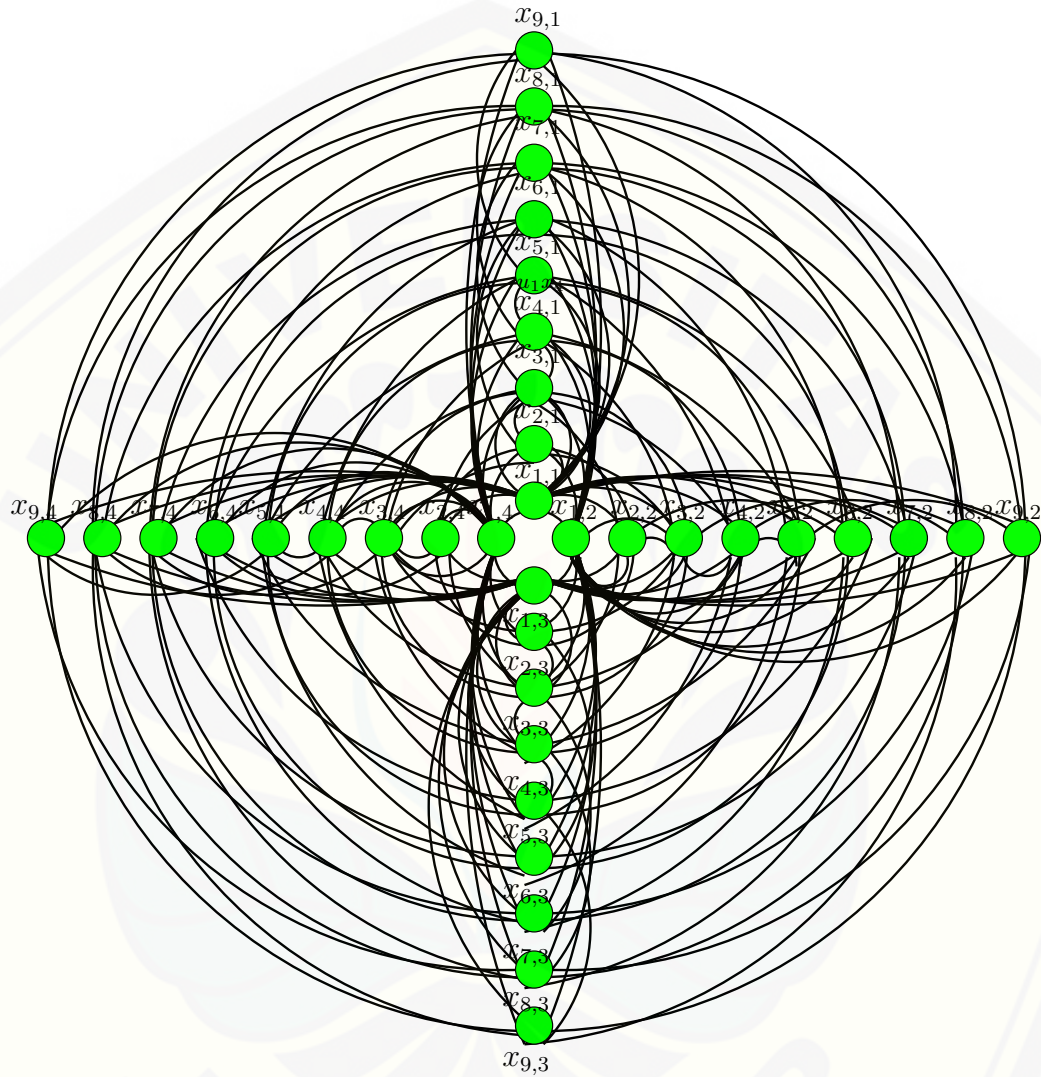
Gambar 4.17 Contoh *Total Dominating Set* Graf *Crown Product* $(W_3 \odot P_4)$

Observasi 4.0.5. Misal G adalah graf Composition dari graf lingkaran C_n dengan $V(C_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$ dan graf bunga Fl_m dengan $V(Fl_m) = \{A, y_i, z_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(Fl_m) = \{Ay_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{Az_i; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_m y_1; 1 \leq i \leq m\} \cup \{y_i z_i; 1 \leq i \leq m\}$. Operasi graf Composition dari C_n dan Fl_m yang dinotasikan dengan $C_n[Fl_m]$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$ maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(C_n[Fl_m]) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(C_n[Fl_m]) = \{x_{ij} x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{nm} x_{1j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij} x_{i+1j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij} x_{i-1j+1}; 2 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij} x_{i+nj+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij} x_{i+nj}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij} x_{i+1j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$, $p = |V| = 2mn + n$ dan $q = |E| = m^3 + nm^2 + 6nm + n$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.2.4 menjelaskan bahwa $G = C_n[Fl_m]$, C_n dan Fl_m dengan disjoint himpunan titik V_1 dan V_2 dan himpunan sisi X_1 dan X_2 adalah graf dengan titik $V_1 \times V_2$ dan $u = (u_1, u_2)$ yang adjacent dengan $v = (v_1, v_2)$ ketika $[u_1 \text{ adj } v_1]$ atau $[u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ adj } v_2]$. Definisi ini dapat diilustrasikan seperti Gambar 4.18. Pada Gambar 4.19 maka diperoleh himpunan titik $V(C_n[Fl_m]) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(C_n[Fl_m]) = \{x_{ij} x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{nm} x_{1j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij} x_{i+1j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij} x_{i-1j+1}; 2 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij} x_{i+nj+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij} x_{i+nj}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij} x_{i+1j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$, $p = |V| = 2mn + n$ dan $q = |E| = m^3 + nm^2 + 6nm + n$. \square



Gambar 4.18 Graf *Composition* ($C_n[Fl_m]$)



Gambar 4.19 Contoh Graf *Composition* ($C_4[Fl_4]$)

Operasi *composition* merupakan kombinasi dari operasi *cartesian product* dengan operasi *tensor product*. Gambar 4.19 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $C_n[Fl_m]$ diawali dengan menggambar titik-titik graf bunga, kemudian diduplikasi sebanyak n kali. Setelah titik-titik pada graf lingkaran dan graf bunga dikalikan seperti operasi *cartesian product* atau operasi *tensor product*, kemudian titik-titiknya dihubungkan seperti operasi *cartesian product* dan hasil perkalian titik-titik tersebut yang *adjacent* dihubungkan seperti operasi *tensor product*. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.

Setelah observasi pada graf hasil operasi *composition* dari graf lingkaran dan graf bunga, ditentukan *dominating set* dan *total dominating set* pada graf hasil operasi *composition* yang disajikan dalam teorema berikut.

Berikut adalah teorema *Dominating set* pada graf *composition* ($C_n[Fl_m]$).

◇ **Teorema 4.0.9.** *Misal G adalah graf hasil operasi composition dari (C_n) dan (Fl_m) , untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka $\gamma(C_n[Fl_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

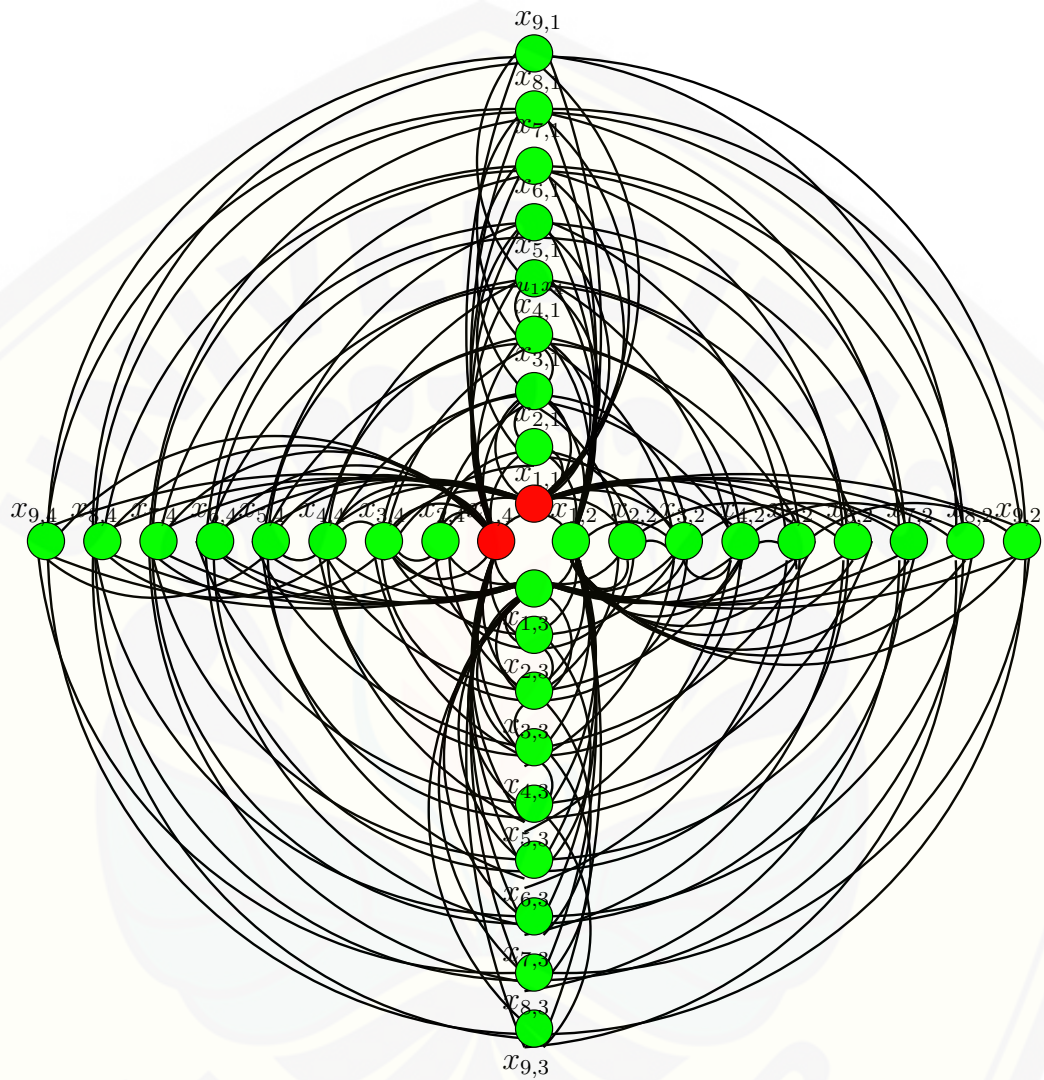
Bukti. Sesuai dengan observasi 4.0.1 Graf *composition* ($C_n[Fl_m]$) memiliki himpunan titik $V(C_n[Fl_m]) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(C_n[Fl_m]) = \{x_{ij}x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{nm}x_{1j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij}x_{i+1j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij}x_{i-1j+1}; 2 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij}x_{i+nj+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij}x_{i+nj}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij}x_{i+1j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$, $p = |V| = 2nm + n$ dan $q = |E| = m^3 + nm^2 + 6nm + n$ dan $\Delta C_n[Fl_m] = 6m + 2$. Dari teorema 2.3.1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1+\Delta(C_n[Fl_m])} \rceil \leq \gamma(C_n[Fl_m]) \leq p - \Delta(C_n[Fl_m])$ maka diperoleh

bahwa

$$\begin{aligned}
 \gamma(C_n[Fl_m]) &\geq \left\lceil \frac{p}{1 + \Delta(C_n[Fl_m])} \right\rceil \\
 &\geq \left\lceil \frac{2nm + n}{1 + 6m + 2} \right\rceil \\
 &\geq \left\lceil \frac{9n}{27} \right\rceil \\
 &\geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil
 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\gamma(C_n[Fl_m]) \leq 9n - 23$ dengan memilih himpunan dominasi, yaitu $D = x_{1,1}$ dan $x_{1,4}$. Dapat dilihat jelas bahwa setiap titik di G bertetangga dengan $x_{1,1}$ dan $x_{1,4} \in D$, sehingga $|D| = 2$ untuk $(C_4[Fl_4])$. Terbukti bahwa $\gamma(C_n[Fl_m]) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. \square

Dapat dilihat pada Gambar 4.20 merupakan *dominating set* dari graf *Composition* $(C_n[Fl_m])$.



Gambar 4.20 Contoh *Dominating Set* Graf *Composition* ($C_4[Fl_4]$)

Berikut adalah teorema *Total dominating set* pada graf *composition* $(C_n[Fl_m])$.

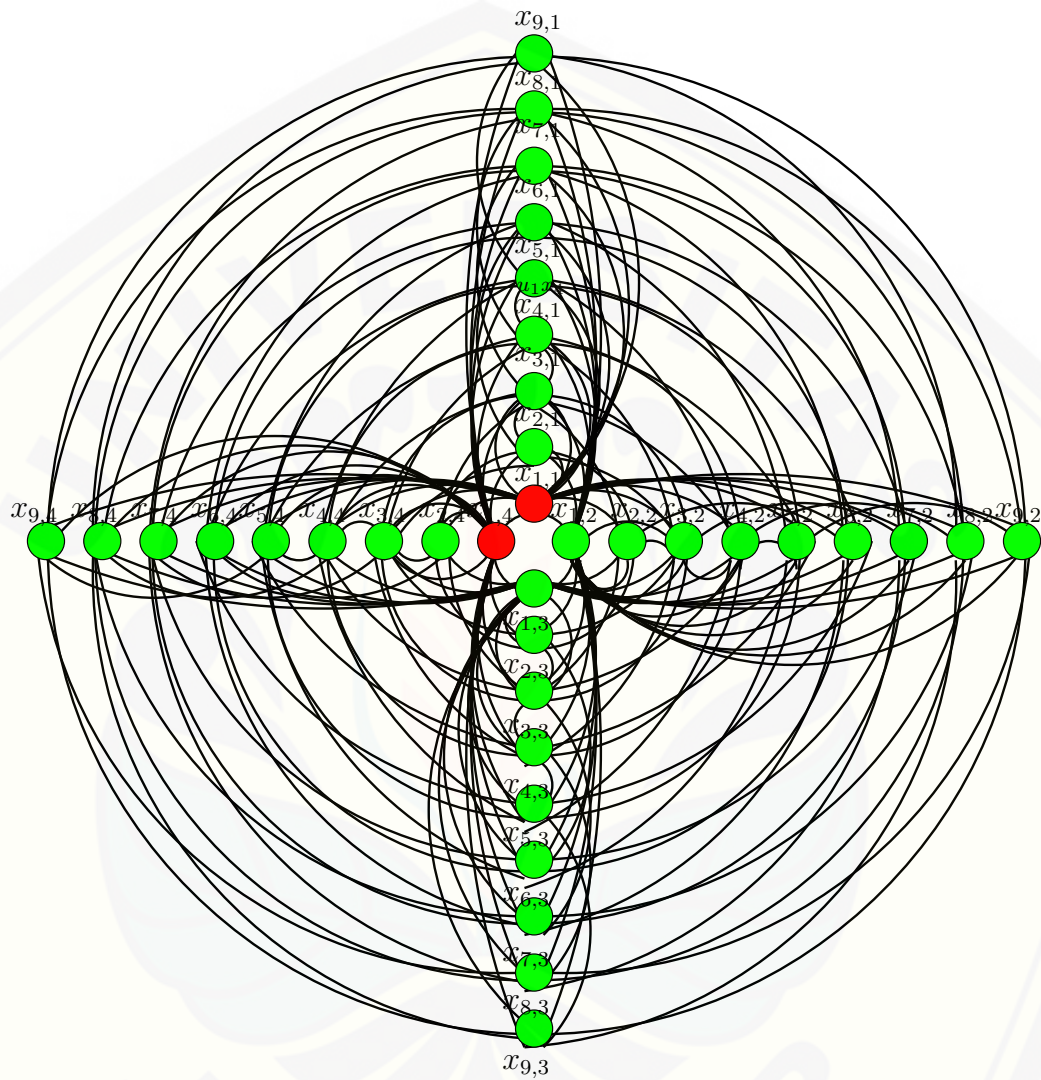
◇ **Teorema 4.0.10.** *Misal G adalah graf hasil operasi composition dari (C_n) dan (Fl_m) , untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, maka $\gamma_t(C_n[Fl_m]) = 2\lceil \frac{n}{3} \rceil$.*

Bukti. Sesuai dengan observasi 4.0.1 Graf *composition* $(C_n[Fl_m])$ memiliki himpunan titik $V(C_n[Fl_m]) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpunan sisi $E(C_n[Fl_m]) = \{x_{ij}x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{nm}x_{1j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij}x_{i+1j+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij}x_{i-1j+1}; 2 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij}x_{i+nj+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij}x_{i+nj}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{ij}x_{i+1j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$, $p = |V| = 2mn + n$ dan $q = |E| = m^3 + nm^2 + 6nm + n$ dan $\Delta C_n[Fl_m] = 6m + 2$. Untuk *total dominating set*, Berdasarkan teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa $\gamma_t(G) \geq \lceil \frac{p}{\Delta(G)} \rceil$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \gamma_t(C_n[Fl_m]) &\geq \left\lceil \frac{p}{\Delta(C_n[Fl_m])} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{2mn + n}{6m + 2} \right\rceil \\ &\geq 1 + \lceil 1, 4 \rceil \\ &\geq 3 \end{aligned}$$

Setelah disubstitusikan nilai p dan $\Delta(C_n[Fl_m])$ sehingga diperoleh batas atas *total domination number* yaitu $\gamma_t(C_n[Fl_m]) \geq 3$. Maka $\gamma_t(C_n[Fl_m])$ berada pada selang batas atas *total domination number*. Untuk *total dominating set*, pilih $D = \{x_{1,1} \text{ dan } x_{1,4}\}$ untuk $n = 4$ sehingga $|D| = 2$. Dapat dilihat bahwa $\{x_{1,1} \text{ dan } x_{1,4}\}$ saling bertetangga. Pada gambar tersebut dapat diketahui bahwa $\gamma(C_n[Fl_m]) = \gamma_t(C_n[Fl_m])$ yaitu $\gamma_t(C_n[Fl_m]) = n$. Terbukti $\gamma_t(C_n[Fl_m]) = 2$ berada pada selang batas atas *total domination number* yaitu $\gamma_t(C_n[Fl_m]) \geq 3$. □

Dapat dilihat pada Gambar 4.21 merupakan *total dominating set* dari graf *composition* $(C_n[Fl_m])$.

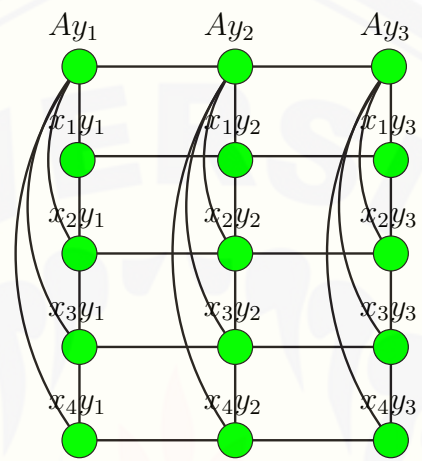
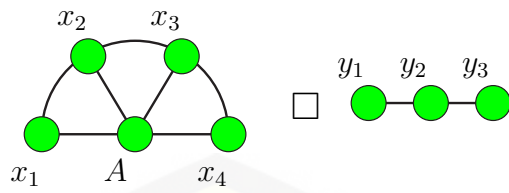


Gambar 4.21 Contoh *Total Dominating Set* Graf Composition ($C_4[Fl_4]$)

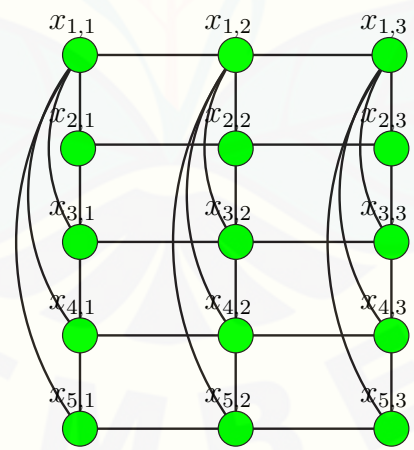
Observasi 4.0.6. Misal diketahui graf kipas F_n dengan $V(F_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(F_n) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{Ax_n; 1 \leq i \leq n\}$ dan graf lintasan P_m dengan $V(P_m) = \{y_j; 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(P_m) = \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq m-1\}$. Operasi cartesian product dari F_n dan P_m yang dinotasikan dengan $F_n \square P_m$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(F_n \square P_m) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(F_n \square P_m) = \{x_{ij} x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij} x_{i+1j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{nj} x_{1j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{nj} x_{nj+m}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq m\}$, $|V(F_n \square P_m)| = nm + m$, dan $|E(F_n \square P_m)| = 3nm - n - 1$.

Bukti. Sesuai dengan Definisi 2.2.2 menjelaskan bahwa *Cartesian Product* dari graf $G_1(V_1, E_1)$ dan $G_2(V_2, E_2)$ adalah graf $G(V, E)$, ditulis $G = G_1 \times G_2$, jika $V = V_1 \times V_2$, dan dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku : $u_1 = v_1$ dan $(u_2, v_2) \in E_2$ atau $u_2 = v_2$ dan $(u_1, v_1) \in E_1$. Maka graf $F_n \square P_m$ dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.22. Dengan demikian didapatkan $V(F_n \square P_m) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(F_n \square P_m) = \{x_{ij} x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij} x_{i+1j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{nj} x_{1j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{nj} x_{nj+m}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq m\}$, $|V(F_n \square P_m)| = nm + m$, dan $|E(F_n \square P_m)| = 3nm - n - 1$. \square

Operasi *cartesian product* merupakan operasi perkalian, titik-titik pada graf roda dikalikan sebanyak titik-titik pada graf lintasan atau sebaliknya. Kemudian titik-titiknya dihubungkan sesuai dengan bentuk graf kipas dan graf lintasan. Gambar 4.23 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $F_n \square P_m$ diawali dengan menggambar graf kipas, kemudian diduplikasi sebanyak m kali, dan titik-titik yang bersesuaian membentuk graf lintasan. Untuk mengekspannya tinggal menambah jumlah titik dan sisi pada kedua graf tersebut, sedangkan ketetanggaannya dilakukan melalui cara yang sama.



Gambar 4.22 Graf Cartesian Product $F_n \square P_m$



Gambar 4.23 Contoh Graf Cartesian Product $F_4 \square P_3$

Setelah observasi pada graf hasil operasi *cartesian product* dari graf $F_n \square P_m$, ditentukan *dominating set* dan *total dominating set* pada graf hasil operasi *cartesian product* yang disajikan dalam teorema berikut.

Dominating set pada graf *cartesian product* $F_n \square P_m$.

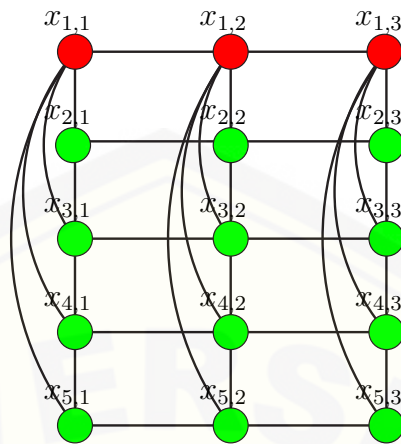
◇ **Teorema 4.0.11.** Misal G adalah graf hasil operasi *cartesian product* dari (F_n) dan (P_m) , untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, maka $\gamma(F_n \square P_m) = m$.

Bukti. Sesuai dengan observasi 4.0.6 Graf *cartesian product* $(F_n \square P_m)$ memiliki himpunan titik $V(F_n \square P_m) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(F_n \square P_m) = \{x_{ij}x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij}x_{i+1j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{nj}x_{1j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{nj}x_{n+j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq m\}$, $|V(F_n \square P_m)| = nm + m$, $|E(F_n \square P_m)| = 3nm - n - 1$ dan $\Delta F_n \square P_m = n + 2$. Dari teorema 2.3.1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1 + \Delta(F_n \square P_m)} \rceil \leq \gamma(F_n \square P_m) \leq p - \Delta(F_n \square P_m)$ maka diperoleh bahwa

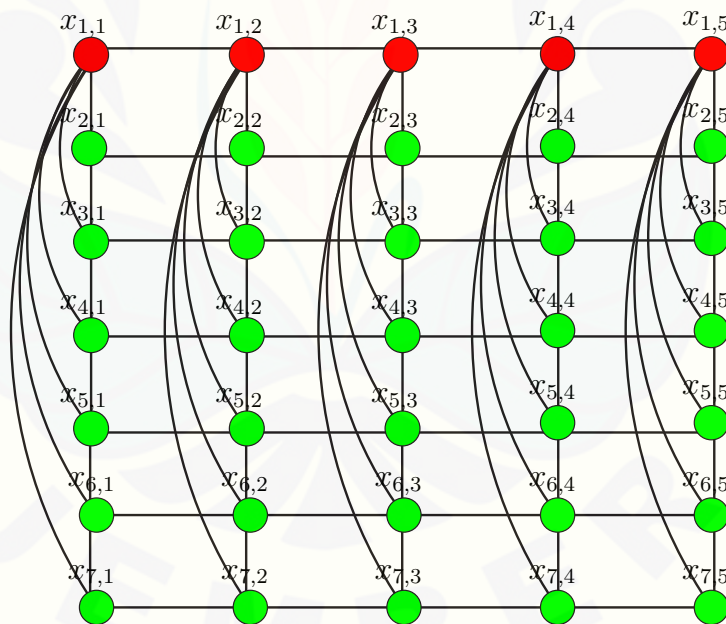
$$\begin{aligned} \gamma(F_n \square P_m) &\geq \left\lceil \frac{p}{1 + \Delta(F_n \square P_m)} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{nm + m}{n + 2 + 1} \right\rceil \\ &\geq m \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\gamma(F_n \square P_m) \leq 3m + m - 5$ dengan memilih himpunan dominasi, yaitu $D = x_{1,1}, x_{2,1}$ dan $x_{3,1}$. Dapat dilihat jelas bahwa setiap titik di G bertetangga dengan $x_{1,1}, x_{2,1}$ dan $x_{3,1} \in D$, sehingga $|D| = 3$ untuk $(F_4 \square P_3)$. Terbukti bahwa $\gamma(F_n \square P_m) = m$. □

Gambar 4.24 merupakan *dominating set* dari graf *cartesian product* $(F_4 \square P_3)$ dan Gambar 4.25 merupakan *dominating set* dari graf *cartesian product* $(F_n \square P_m)$



Gambar 4.24 Contoh *Dominating Set* Graf Cartesian Product $F_4 \square P_3$



Gambar 4.25 Contoh *Dominating Set* Graf Cartesian Product $F_6 \square P_5$

Total dominating set pada graf $F_n \square P_m$.

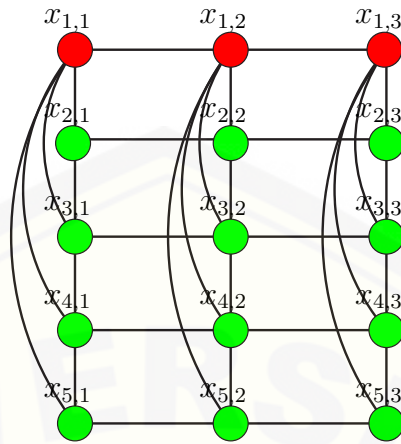
◇ **Teorema 4.0.12.** *Misal G adalah graf hasil operasi cartesian product dari (F_n) dan (P_m) , untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 3$, maka $\gamma_t(F_n \square P_m) = m$.*

Bukti. Sesuai dengan observasi 4.0.6 Graf *cartesian product* $(F_n \square P_m)$ memiliki himpunan titik $V(F_n \square P_m) = \{x_{ij}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$, $E(F_n \square P_m) = \{x_{ij}x_{ij+1}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{ij}x_{i+1j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_{nj}x_{1j}; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{x_{nj}x_{nj+m}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq i \leq m\}$, $|V(F_n \square P_m)| = nm + m$, $|E(F_n \square P_m)| = 3nm - n - 1$ dan $\Delta F_n \square P_m = n + 2$. Untuk *total dominating set*, Berdasarkan teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa $\gamma_t(G) \geq \lceil \frac{p}{\Delta(G)} \rceil$ maka diperoleh bahwa

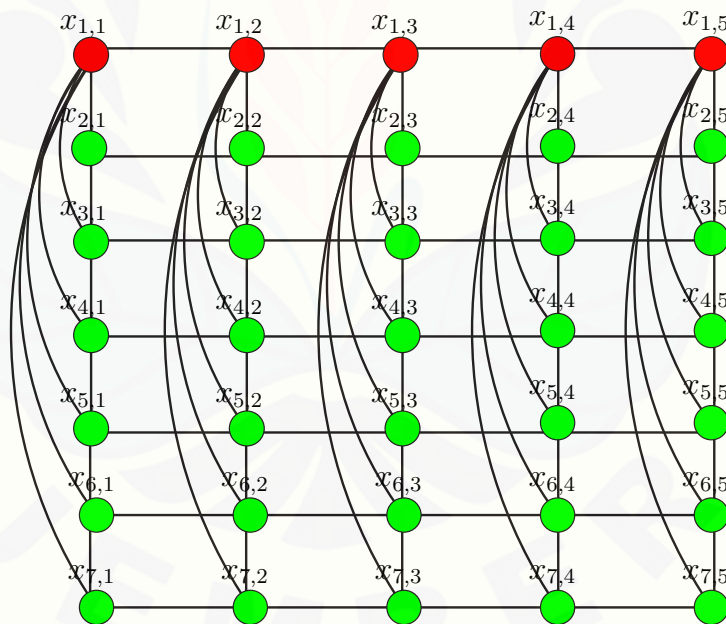
$$\begin{aligned} \gamma_t(F_n \square P_m) &\geq \lceil \frac{p}{\Delta(F_n \square P_m)} \rceil \\ &\geq \lceil \frac{nm + m}{n + 2} \rceil \\ &\geq 1 + \lceil 2, 5 \rceil \\ &\geq 4 \end{aligned}$$

Setelah disubstitusikan nilai p dan $\Delta(F_n \square P_m)$ sehingga diperoleh batas atas *total domination number* yaitu $\gamma_t(F_n \square P_m) \geq 4$. Maka $\gamma_t(F_n \square P_m)$ berada pada selang batas atas *total domination number*. Untuk *total dominating set*, pilih $\{D = x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}\}$ untuk $n = 4$ sehingga $|D| = 3$. Dapat dilihat bahwa $\{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}\}$ saling bertetangga. Pada gambar tersebut dapat diketahui bahwa $\gamma(F_n \square P_m) = \gamma_t(F_n \square P_m)$ yaitu $\gamma_t(F_n \square P_m) = n$. Terbukti $\gamma_t(F_n \square P_m) = 3$ berada pada selang batas atas *total domination number* yaitu $\gamma_t(F_n \square P_m) \geq 4$. □

Gambar 4.26 merupakan *total dominating set* dari graf joint $(F_4 \square P_3)$ dan Gambar 4.27 merupakan *total dominating set* dari graf joint $(F_n \square P_m)$



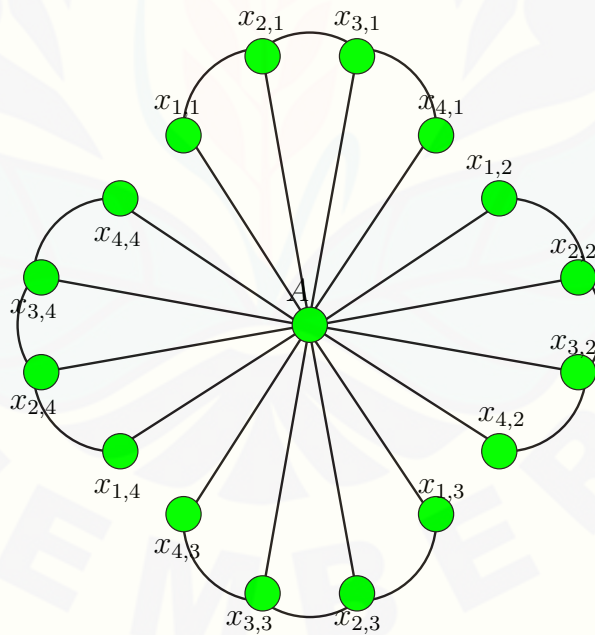
Gambar 4.26 Contoh *Total Dominating Set* Graf Cartesian Product $F_4 \square P_3$



Gambar 4.27 Contoh *Total Dominating Set* Graf Cartesian Product $F_6 \square P_5$

Observasi 4.0.7. Misal diketahui graf buku kipas F_n dengan $V(F_n) = \{A, x_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(F_n) = \{Ax_i; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{Ax_n; 1 \leq i \leq n\}$. Operasi amalgamation dari F_n yang dinotasikan dengan $Amal(F_n, v = A, r)$, untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, maka himpunan titik dan sisinya dapat disajikan dalam $V(Amal(F_n, v = A, r)) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$, $E(Amal(F_n, v = A, r)) = \{Ax_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\} \cup \{x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$, $|V(Amal(F_n, v = A, r))| = nr + 1$, dan $|E(Amal(F_n, v = A, r))| = 2nr - r$.

Bukti. Definisi 2.2.7 menjelaskan bahwa *amalgamation* titik dari suatu graf G dinotasikan dengan $Amal(G, v, r)$ dimana G adalah suatu keluarga graf berhingga, setiap G mempunyai suatu titik v yang disebut titik terminal, dan r menyatakan banyaknya graf G yang akan di-*amalgamation*. Maka graf $Amal(F_n, v = A, r)$ dapat diilustrasikan dengan Gambar 4.28. Dengan demikian didapatkan $V(Amal(F_n, v = A, r)) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$, $E(Amal(F_n, v = A, r)) = \{Ax_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\} \cup \{x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$, $|V(Amal(F_n, v = A, r))| = nr + 1$, dan $|E(Amal(F_n, v = A, r))| = 2nr - r$. \square



Gambar 4.28 Graf Amalgamation $Amal(F_4, v = A, 4)$

Gambar 4.28 mengilustrasikan bahwa untuk menggambar graf $Amal(F_n, v = A, r)$ diawali dengan menggambar graf kipas F_n yang diduplikasi sebanyak r yang merupakan jumlah *amalgamation*-nya. Selanjutnya semua duplikasi dilekatkan pada satu titik yang menjadi titik terminalnya yaitu A .

Dari Observasi 4.0.7 ditentukan *domination number* pada graf $Amal(F_n, v = A, r)$ yang disajikan dalam teorema berikut.

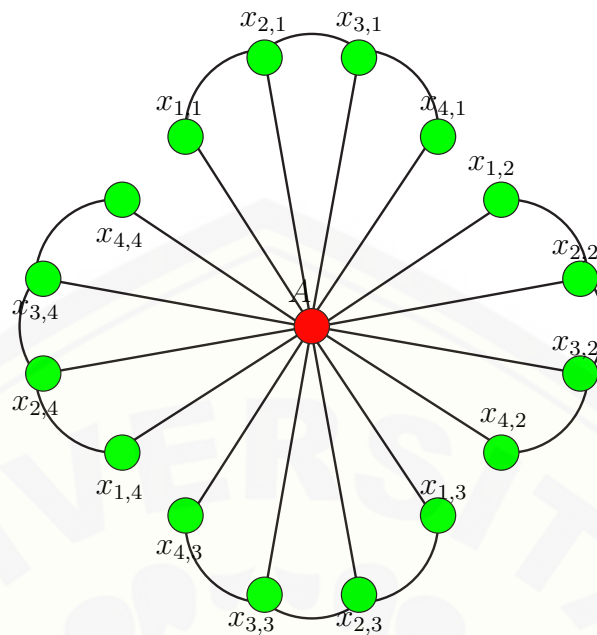
◇ **Teorema 4.0.13.** *Misal G adalah graf hasil operasi amalgamation dari graf F_n , dimana $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, maka $\gamma(Amal(F_n, v = A, r)) = 1$.*

Bukti. Graf $Amal(F_n, v = A, r)$ adalah graf dengan himpunan titik $V(Amal(F_n, v = A, r)) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$, $E(Amal(F_n, v = A, r)) = \{Ax_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\} \cup \{x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$, $|V(Amal(F_n, v = A, r))| = nr + 1$, dan $|E(Amal(F_n, v = A, r))| = 2nr - r$, dan $\Delta(Amal(F_n, v = A, r)) = nr$. Dari teorema 2.3.1 dinyatakan bahwa $\lceil \frac{p}{1 + \Delta Amal(F_n, v = A, r)} \rceil \leq \gamma Amal(F_n, v = A, r) \leq p - \Delta Amal(F_n, v = A, r)$ maka diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} \gamma Amal(F_n, v = A, r) &\geq \left\lceil \frac{p}{1 + \Delta Amal(F_n, v = A, r)} \right\rceil \\ &\geq \left\lceil \frac{nr + 1}{nr + 1} \right\rceil \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\gamma Amal(F_n, v = A, r) \leq 1$ dengan memilih himpunan dominasi, yaitu $D = A$. Dapat dilihat jelas bahwa setiap titik di G bertetangga dengan $A \in D$, sehingga $|D| = 1$ untuk $Amal(F_n, v = A, r)$. Terbukti bahwa $\gamma Amal(F_n, v = A, r) = 1$. □

Contoh *dominating set* pada graf $Amal(F_4, v = A, r)$ dapat dilihat pada Gambar 4.29, dimana titik yang berwarna merah merupakan *dominating set*-nya.



Gambar 4.29 Contoh *Dominating Set* Graf Amalgamation $Amal (F_4, v = A, 4)$

Total dominating set pada graf $Amal (F_n, v = A, r)$.

◇ **Teorema 4.0.14.** Misal G adalah graf hasil operasi Amalgamation dari (F_n) , untuk $n \geq 3$ dan $r \geq 2$, maka $\gamma_t(F_n \square P_m) = 2$.

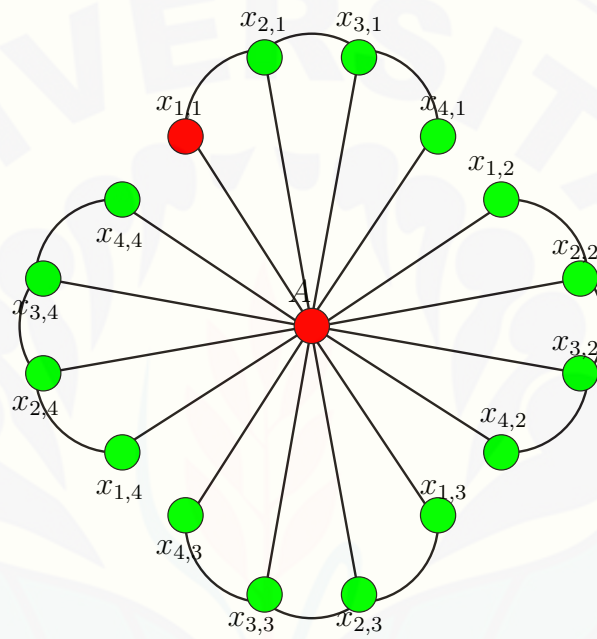
Bukti. Sesuai dengan observasi 4.0.7 graf *amalgamation* $Amal (F_n, v = A, r)$ memiliki himpunan titik $V(Amal (F_n, v = A, r)) = \{x_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$, $E(Amal (F_n, v = A, r)) = \{Ax_{i,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\} \cup \{x_{i+1,j}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$, $|V(Amal (F_n, v = A, r))| = nr + 1$, dan $|E(Amal (F_n, v = A, r))| = 2nr - r$, dan $\Delta (Amal (F_n, v = A, r)) = nr$. Untuk *total dominating set*, Berdasarkan teorema 2.4.1 dinyatakan bahwa $\gamma_t(G) \geq \lceil \frac{p}{\Delta(G)} \rceil$ maka diperoleh

bahwa

$$\begin{aligned}
 \gamma_t(\text{Amal}(F_n, v = A, r)) &\geq \left\lceil \frac{p}{\Delta(\text{Amal}(F_n, v = A, r))} \right\rceil \\
 &\geq \left\lceil \frac{nr + 1}{nr} \right\rceil \\
 &\geq 1 + \left\lceil \frac{1}{nr} \right\rceil \\
 &\geq 1 + [0,06] \\
 &\geq 2
 \end{aligned}$$

Setelah disubstitusikan nilai p dan $\Delta(\text{Amal}(F_n, v = A, r))$ sehingga diperoleh batas atas *total domination number* yaitu $\gamma_t(\text{Amal}(F_n, v = A, r)) \geq 2$. Maka $\gamma_t(\text{Amal}(F_n, v = A, r))$ berada pada batas atas *total domination number*. Untuk *total dominating set*, pilih $\{D = \text{Adan}x_{i,j} | i \text{ dan } j \text{ adalah salah satu dari } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq r\}$ sehingga $|D| = 2$. Dapat dilihat bahwa $\{\text{Adan}x_{i,j}\}$ saling bertetangga. Pada gambar tersebut dapat diketahui bahwa $\gamma(\text{Amal}(F_n, v = A, r)) \leq \gamma_t(\text{Amal}(F_n, v = A, r))$ yaitu $\gamma_t(\text{Amal}(F_n, v = A, r)) = n + 1$. Dari pernyataan diatas maka terbukti $\gamma_t(\text{Amal}(F_4, v = A, r)) = 2$. \square

Contoh *total dominating set* dapat dilihat pada Gambar 4.30, dimana titik yang berwarna merah merupakan *total dominating set*-nya dari graf *amalgamation* ($\text{Amal}(F_4, v = A, r)$).



Gambar 4.30 Contoh *Total Dominating Set* Graf Amalgamation ($Amal(F_4, v = A, 4)$)

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

Kardinalitas sisi dan titik dari operasi graf yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. $|V(C_n + Fl_m)| = 2n + m + 1$ dan $|E(C_n + Fl_m)| = 2nm + 4n + 2m$.
2. $|V(P_n + M_{2m})| = n + 8m + 2$ dan $|E(P_n + M_{2m})| = 8nm + 3n + 16m$.
3. $|V(F_n + L_m)| = n + 2m + 1$ dan $|E(F_n + L_m)| = 4nm + 2n + 4m$.
4. $|V(C_n[Fl_m])| = 2nm + n$ dan $|E(C_n[Fl_m])| = m^3 + nm^2 + 6nm + n$.
5. $|V(P_n \odot W_m)| = nm + m$, dan $|E(P_n \odot W_m)| = 2nm + m - 2$.
6. $|V(F_n \square P_m)| = nm + m$, dan $|E(F_n \square P_m)| = 3nm - n - 1$.
7. $|V(Amal(F_n, v = A, r))| = nr + 1$, dan $|E(Amal(F_n, v = A, r))| = 2nr - r$.

Dominating set pada hasil operasi graf khusus diperoleh yaitu:

1. $\gamma(P_n + F_m) = 1$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.

2.

$$\gamma(P_n + M_{2m}) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } 2 \leq n \leq 3 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{untuk } n > 3 \end{cases}$$

3. $\gamma(F_n + L_m) = 1$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$

4. $\gamma(W_m \odot P_n) = n + 1$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$

5. $\gamma(C_n[Fl_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$
6. $\gamma(F_n \square P_m) = m$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$
7. $\gamma(\text{Amal}(F_n, v = A, r)) = 1$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$.

Total Dominating set pada hasil operasi graf khusus diperoleh yaitu:

1. $\gamma_t(P_n + F_m) = 2$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.
2.

$$\gamma_t(P_n + M_{2m}) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } 2 \leq n \leq 3 \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil, & \text{untuk } n > 3 \end{cases}$$
3. $\gamma(F_n + L_m) = 2$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$
4. $\gamma_t(W_m \odot P_n) = n + 1$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$
5. $\gamma_t(C_n[Fl_m]) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$
6. $\gamma_t(F_n \square P_m) = m$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$
7. $\gamma_t(\text{Amal}(F_n, v = A, r)) = 2$, untuk $n \geq 2$ dan $m \geq 2$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian mengenai *dominating set* dan *total dominating set* pada hasil operasi graf khusus dan aplikasinya, maka peneliti memberikan saran kepada pembaca supaya dapat menganalisa himpunan domination number dan himpunan total domination number pada hasil operasi sebarang graf khusus yang berada pada batas bawah domination number. Selanjutnya, penulis juga dapat mengaplikasikan teori *dominating set* dan *total dominating set* pada permasalahan- permasalahan yang ada dalam kehidupan sehari-hari. Penulis juga memberikan saran kepada pembaca supaya dapat mencari domination number dan total domination number pada operasi graf khusus lainnya.

DAFTAR SUMBER RUJUKAN

- Agustin, I.H. 2014. *On The Domination Number Of Some Families Of Special Graphs*. Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember, 1(1).
- Alfarisi, R. 2014. *Analisa Himpunan Dominasi pada Graf-Graf Khusus*. Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember, 1(1).
- Ardiyansyah, R. 2013. *Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf*. Jurnal Sains dan Seni Pomits, 2 (1).
- Atapour, Soltankhah. 2009. *On Total Dominating Sets in Graphs*. Int. J. Contemp. Math. Science, Vol. 4, no. 6.
- Dafik. 2007. *Structural Properties and Labeling of Graph*. Australia: Tidak dipublikasikan (Tesis).
- Darmaji dkk. 2014. *"Dominating Set Berjarak Dua Pada Graf Jahangir dan Prisma"*. Tidak diterbitkan. Paper. Surabaya: ITS.
- Douglas. W. B. 1996. *Introduction to Graph Theory*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Endrayana, S. 2013. *Pelabelan Product Cordial pada Tensor Product Path dan Sikel*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Malang: UIN Malang.
- Fajriatin, A. 2011. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Gunung*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.
- Harray, F. 2007. *Graph Theory*. Addison: Wesley.
- Harsya. A. Y., Agustin, I. H., dan Dafik. 2014. *Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Lintasan, Graf Sikel, dan Graf Bintang*. Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember, 1 (1).

Haynes, Teresa W, Hedetniemi, S, Slater, P. 1998. *Fundamental Of Domination in Graphs* . New York: Marcel Dekker, INC.

Hidayati, R. "Nilai Ketakteraturan Total Sisi Dari Graf Bunga". 2012

Liedloff. 2009. *Dominating Set on Bipartite Graphs*, Université Paul Verlaine-Metz.

Muharromah, A. 2014. *Graf-Graf Khusus dan Bilangan Dominasinya*. Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember, 1 (1).

Mukhlis, I. 2012. *Pelabelan Total Super(a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Kelelawar*. Tidak dipublikasikan (Skripsi). Jember: Universitas Jember.

Munir. R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.

Purwanto, H., Indriani, G., Dayanti, E. 2006. *Matematika Diskrit*. Jakarta: PT. Ercontara Rajawali.

Roifah, M. 2014. *Kajian Himpunan Dominasi pada Graf Khusus dan Operasinya*. Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember, 1 (1).

Slamin. 2001. *Diregularity of Digraph Close to Moore Bound* . Australia : Tidak dipublikasikan (Tesis).

Wardani, D.A.R. 2014. *Bilangan Dominasi dari Graf-graf Khusus*. Prosiding Seminar Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Jember, 1 (1).

Wibisono, S. 2004. *Matematika Diskrit*. Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu.