e-ISSN 2722-7774

CGANT

Journal of Mathematics and Applications

CGANT University of Jember

EDITORIAL TEAM

HONORARY EDITOR

Prof, Drs Dafik, M.Sc, Ph.D, University of Jember, Indonesia

EDITOR IN CHIEF

Zainur Rasyid Ridlo, S.Pd, M.Pd, University of Jember, Indonesia

MANAGING EDITORS

Dr. Ika Hesti Agustin, S.Si., M.Si., University of Jember, Indonesia
Dr. Arika Indah Kristiana, S.Si., M.Pd., University of Jember, Indonesia
Ridho Alfarisi, S.Pd., M.Si., University of Jember, Indonesia
Rafiantika Megahnia Prihandini, S.Pd., M.Si., University of Jember, Indonesia
Robiatul Adawiyah, S.Pd., M.Si., University of Jember, Indonesia

GRAPHICAL EDITORS

Rosanita Nisviasari, S.Si., M.Si., University of Jember, Indonesia
Ika Nur Maylisa, S.Pd., M.Pd., University of Jember, Indonesia

LAYOUTING EDITORS

Elsa Yuli Kurniawati, S.Pd., M,Si., University of Jember, Indonesia
Dwi Agustin Retno Wardani, S.Si., M.Si., University of Jember, Indonesia
Rifki Ilham Baihaqi, S.Si, M.Mat, University of Jember, Indonesia

VOL 3, NO 1 (2022)

CGANT JOURNAL OF MATHEMATICS AND APPLICATIONS

DOI: https://doi.org/10.25037/cgantjma.v3i1

Available Online Since June 2022

TABLE OF CONTENTS

ARTICLES

CGANT JMA
http://www.jcgantunej.or.id
Volume 3, No 1, 2022
DOI:
10.25037/cgantjma.v3i1.78

Journal of
MATHEMATICS AND APPLICATIONS

e-ISSN 2722-7774

Analisis rainbow vertex connection pada beberapa graf khusus dan operasinya

Ida Ariska[2], I.H. Agustin[1,2], Kusbudiono[2]

[1]CGANT, Universitas Jember, Indonesia
[2]Matematika, Universitas Jember, Indonesia

Abstract. The vertex colored graph G is said rainbow vertex cennected, if for every two vertices are connected by a path whose internal vertices have distinct colors. The rainbow vertex connection number of G, denoted by rvc(G), is the smallest number of colors that are needed in order to make G rainbow vertex connected. On this research, will be raised the issue of how to produce graphs the results of some special graph and how to find the rainbow vertex connection. Operation that use cartesian product, crown product, and shackle. Theorem in this research rainbow vertex connection number in graph the results of operations $Wd_{3,m} \square P_n$,, $Wd_{3,m} \odot P_n$, and $shack(Bt_m, v, n)$.

1. Pendahuluan

Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah sebuah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut dengan titik, sedangkan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan tak terurut dua titik $u, v \in V(G)$ yang disebut sisi [8]. Sebuah graf yang tidak mempunyai sisi tetapi hanya memiliki sebuah titik disebut *null graph. Order* adalah banyaknya titik dalam suatu graf G, dinotasikan dengan p atau $|V(G)|$, sedangkan *size* adalah banyaknya sisi pada graf G, dan dinotasikan dengan q atau $|E(G)|$.

Dua buah titik v_1, v_2 dari graf G adalah bertetangga (*adjacent*) jika v_1, v_2 adalah sebuah sisi pada graf G. Dapat dikatakan juga bertetangga bila keduanya terhubung langsung yaitu pada sisi e ditulis dengan $e = v_1v_2$. Jika $e = v_1v_2$ adalah sebuah sisi dari graf G, maka e dikatakan bersisian atau *incident* dengan titik $v_1$dan v_2. Untuk sembarang sisi $e = v_1v_2$ dikatakan e bersisian dengan titik v_1 jika v_2 merupakan titik ujung dari e atau e bersisian dengan titik v_2, jika v_2 merupakan titik ujung dari e.

Derajat (*degree*) dari sebuah titik v adalah banyaknya sisi yang bersisian atau *incident* dengan v. Derajat dari titik pada graf dinotasikan dengan d_i dimana i menunjukkan titik ke-i pada graf. Jika setiap titik dari graf tersebut mempunyai derajat yang sama maka graf G dikatakan *regular*, jika sebaliknya maka dikatakan *non-reguler*. Titik yang mempunyai derajat satu disebut titik akhir (*end vertex*) atau daun (*leaf*). Sedangkan sebuah titik yang mempunyai derajat *0* (nol) atau tidak bertetangga dengan titik lain disebut titik terisolasi (*isolated vertex*). Banyaknya sisi minimal yang bersisian pada suatu titik v di graf G diantara titik-titik lainnya di graf G disebut derajat terkecil dinotasikan dengan $\delta(G)$. Sedangkan banyaknya maksimal sisi yang bersisian pada suatu titik di graf G disebut derajat terbesar, dinotasikan dengan $\Delta(G)$ [4].

Jarak atau *distance* dinotasikan $d(v_i,v_j)$ yang artinya jarak antara dua titik v_i dan v_j. Jarak pada graf G adalah panjang lintasan terpendek dari titik v_i ke titik v_j. Jika tidak ada lintasan dari titik v_i ke v_j, maka didefinisikan jarak $d(v_i,v_j)=\infty$. Jarak maksimum antara dua titik sebarang pada graf G disebut diameter, dinotasikan *diam G*. Salah satu kajian dalam teori graf adalah *rainbow vertex connection,* yang didefinisikan misalkan pada graf $G=(V(G),E(G))$ adalah graf terhubung tak-trivial suatu pewarnaan $c' : V(G) \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ dengan titik-titik interior berbeda. Lintasan *u-v path* di G dapat dikatakan *rainbow vertex path* jika semua titik internal pada lintasan di G mempunyai warna berbeda. Graf G dikatakan *rainbow vertex connected* apabila dua titik yang berbeda dihubungkan oleh *rainbow vertex path.* Pewarnaan titik pada G yang merupakan *rainbow vertex connected* dikatakan sebagai *rainbow vertex coloring* di G. Dalam hal ini, pewarnaan c' dikatakan *rainbow vertex coloring* di G. Kemudian akan didefinisikan *rainbow vertex connection number* pada graf terhubung dinotasikan $rvc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk mewarnai graf G [5].

Terdapat beberapa jenis graf khusus, berikut beberapa graf khusus tersebut:

Graf Lintasan (*Path Graph*) adalah graf yang hanya terdiri dari satu lintasan dengan n titik. Graf Lintasan dinotasikan dengan P_n, dimana $n \geq 2$ yang terdiri dari n titik dan n-1 sisi.

Graf Kincir angin (*Windmill Graph*) ialah graf sederhana yang terdiri dari satu titik pusat dan dikelilingi n buah segitiga. Jumlah titik $2n + 1$ dan jumlah sisi $3n$. Graf kincir angin dinotasikan $Wd_{m,n}$ dimana n ≥ 2.

Graf Buku Segitiga (Triangular Book *Graph*) dinotasikan Bt_n yaitu graf yang terdiri dari sejumlah n buah segitiga ($n \geq 3$) dengan setiap segitiga memiliki sebuah sisi yang dipakai bersama atau dengan kata lain setiap segitiga memiliki 2 titik yang sama.

Berikut beberapa definisi operasi graf yang dipakai dalam penelitian ini.

Definisi 1 *Cartesian Product dari graf $G_1(V_1,E_1)$ dan $G_2(V_2,E_2)$ adalah graf $G(V,E)$ dinotasikan dengan $G = G_1 \square G_2$, jika $V=V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1,u_2) dan (v_1,v_2) di G bertetangga jika dan hanya jika $u_1=v_1$ atau $u_2=v_2$*[3].

Definisi 2 *Crown Product dinotasikan dengan $G\odot H$, didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|V(G)|$ duplikat $H_1, H_2, \ldots, H_{|V(G)|}$ dari H, kemudian menghubungkan titik ke-i dari G ke setiap titik di H_i, $i = 1,2,3,\ldots, |V(G)|$* [2].

Definisi 3 *Shackle dinotasikan dengan Shack(Gi, v ,n). Misalkan {Gi} merupakan graf yang dibangun dari graf terhubung nontrivial dan order graf (G_1 , G_2, ..., G_k) sedemikian hingga untuk setiap $1 \leq i, j \leq k$ dengan $| i - j | \geq 2$, Gi dan Gj tidak memiliki titik umum, dan untuk setiap $1 \leq i \geq k - 1$, Gi dan Gi+1 tepat satu titik yang sama, yang disebut vertex linkage dimana k – 1 linkage titik semua berbeda* [7].

Terdapat beberapa hasil penelitian *rainbow vertex connection* sebelumnya, seperti Krivellevich dan Yuster pada salah satu artikelnya yaitu *The Rainbow connection of graph is* (*at most*) *reciprocal to its minimum degree* [5]. Li and Liu pada salah satu artikelnya yaitu *Rainbow Connection of Graphs A survey* [6]. Dian N.S dan A.N.M Salman pada salah satu artikelnya yaitu *The Rainbow (Vertex) Connection Number of Pencil Graphs* [1]. Pada penelitian ini, penulis akan mengangkat masalah bagaimana menemukan *rainbow vertex connection* dari graf hasil operasi $Wd_{3,m} \square P_n$,$Wd_{3,m} \odot P_n$, dan $shack(Bt_m,v,n)$.

Teorema yang digunakan untuk batas atas dan bawah dari koneksi pelangi adalah sebagai berikut.

Teorema 1 *Misalkan G adalah graf terhubung dengan diam(G), maka $rvc(G) \geq diam(G)$*-1 [5].

2. Hasil Penelitian

Dari hasil penelitian ini didapatkan beberapa teorema terkait *rainbow vertex connection number* pada graf hasil operasi $Wd_{3,m} \square P_n$,$P_m \odot Wd_{3,n}$, dan $shack(Bt_m,v,n)$. Teorema yang pertama adalah *rainbow vertex connection number* dari graf $G = Wd_{3,m} \square P_n$, yang disajikan dalam teorema berikut.

◊ **Teorema 1.1** *Misal G adalah cartesian product dari graf kincir angin $Wd_{3,m}$ dan graf lintasan P_n. Untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 2$, nilai rainbow vertex connection dari graf $G= Wd_{3,m} \square P_n$ adalah n.*

Bukti. Graf $Wd_{3,m} \square P_n$ memiliki V($Wd_{3,m} \square P_n$) = $\{x^j;\ 1 \le j \le n\} \cup \{x_i^{\,j}\ ;\ 1 \le i \le 2m,\ 1 \le j \le n\}$, $E(Wd_{3,m} \square P_n) = \{x^j x_i^{\,j}\ ;\ 1 \le i \le 2m,\ 1 \le j \le n\} \cup \{x_i^{\,j} x_{i+1}^{\,j}\ ;\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\} \cup \{x_i^{\,j}\, x_i^{\,j+1}\ ;\ 1 \le i \le 2m+1,\ 1 \le j \le n-1\}$. $|V(Wd_{3,m} \square P_n)| = 2mn+n$ dan $|E(Wd_{3,m} \square P_n)| = 5mn-2m+n-1$.

Berdasarkan Teorema 1, bahwa $rvc(G) \ge diam(G) - 1$. Untuk $m \ge 2$ dan $n \ge 2$, $Wd_{3,m} \square P_n$ berdiameter $n+1$ maka $rvc(Wd_{3,m} \square P_n) \ge n$. Akan dibuktikan bahwa $rvc(Wd_{3,m} \square P_n) \le n$, dengan mendefinisikan fungsi $c'(v)$ sebagai berikut:

Dari fungsi tersebut dapat ditentukan $rvc(Wd_{3,m} \square P_n) \le n$. Oleh karena $rvc(Wd_{3,m} \square P_n) \ge n$ dan $rvc(Wd_{3,m} \square P_n) \le n$, maka $rvc(Wd_{3,m} \square P_n) = n$.

Teorema yang kedua adalah *rainbow vertex connection number* dari graf $G = P_m \odot Wd_{3,n}$ yang disajikan dalam teorema berikut.
◊ **Teorema 1.2** *Misal G adalah crown product dari graf P_m dan $Wd_{3,n}$. Untuk $m \ge 2$ $n \ge 2$, nilai rainbow vertex connection dari graf $G = P_m \odot Wd_{3,n}$ adalah m.*

Bukti. Graf $P_m \odot Wd_{3,n}$ memiliki V($P_m \odot Wd_{3,n}$) = $\{x_i\ ;\ 1 \le i \le m\} \cup \{y_j^{\,i}\ ;\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le 2n\} \cup \{y^i\ ;\ 1 \le i \le m\}$, $E(P_m \odot Wd_{3,n}) = \{x_i x_{i+1}\ ;\ 1 \le i \le m-1\} \cup \{y^i y_j^{\,i};\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le 2n\} \cup \{y_{2j-1}^{\,i}\, y_{2j}^{\,i}\ ;\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\} \cup \{x_i y^i\ ;\ 1 \le i \le m\} \cup \{x_i y_j^{\,i}\ ;\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le 2n\}$. $|V(P_m \odot Wd_{3,n})| = 2mn+2m$ dan $|E(P_m \odot Wd_{3,n})| = 5mn + 2m - 1$.

Berdasarkan Teorema 1, bahwa $rvc(G) \ge diam(G) - 1$. Untuk $m \ge 2$ dan $n \ge 2$, $P_m \odot Wd_{3,n}$ berdiameter $m+1$ maka $rvc(P_m \odot Wd_{3,n}) \ge m$. Akan dibuktikan bahwa $rvc(P_m \odot Wd_{3,n}) \le m$, dengan mendefinisikan fungsi $c'(v)$ sebagai berikut:
Dari fungsi tersebut dapat ditentukan $rvc(P_m \odot Wd_{3,n}) \le m$. Oleh karena $rvc(P_m \odot Wd_{3,n}) \ge m$ dan $rvc(P_m \odot Wd_{3,n}) \le m$, maka $rvc(P_m \odot Wd_{3,n}) = m$.

Teorema yang ketiga adalah *rainbow vertex connection number* dari graf $G = shack(Bt_m, v, n)$ yang disajikan dalam teorema berikut.

◊ **Teorema 1.3** *Misal G adalah shackle dari graf Bt_m. Untuk $m \ge 3$, nilai rainbow vertex connection dari graf $G = shack(Bt_m, v, n)$ adalah 2n-1.*

Bukti. Graf $shack(Bt_m, v, n)$ memiliki V($shack(Bt_m, v, n)$) = $\{x_i^{\,k}\ ;\ 1 \le i \le 2,\ 1 \le k \le n\} \cup \{y_i^{\,k};\ 1 \le i \le m-1,\ 1 \le k \le n\} \cup \{p\}$, $E(shack(Bt_m, v, n)) = \{x_1^{\,k} x_2^{\,k}\ ;\ 1 \le k \le n\} \cup \{x_1^{\,k} y_i^{\,k}\ ;\ 1 \le i \le m-1,\ 1 \le k \le n\} \cup \{x_2^{\,k} y_1^{\,k+1}\ ;\ 1 \le k \le n-1\} \cup \{x_1^{\,k}\, p\ ;\ 1 \le k \le 1\} \cup \{x_2^{\,k}\, p\ ;\ 1 \le k \le 1\}$. $|V(shack(Bt_m, v, n))| = mn+n+1$ dan $|E(shack(Bt_m, v, n))| = 2mn + n$.

Berdasarkan Teorema 1, bahwa $rvc(G) \ge diam(G) - 1$. Untuk $m \ge 3$, $shack(Bt_m, v, n)$ berdiameter $2n$ maka $rvc(shack(Bt_m, v, n)) \ge 2n-1$. Akan dibuktikan bahwa $rvc(shack(Bt_m, v, n)) \le 2n-1$, dengan mendefinisikan fungsi $c'(v)$ sebagai berikut:

3. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diatas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa $rvc(Wd_{3,m} \square P_n) = n$, $rvc(P_m \odot Wd_{3,n}) = m$, dan $rvc(shack(Bt_m,v,n)) \leq 2n-1$.

References

[1] Dian N.S. Simamora, A.N.M. Salman. 2015. The rainbow (vertex) connection number of pencil graphs. I*nternational Conference on Graph Theory and Informating Security* **74,** pages:138-142.

[2] Figueroa-Centeno, R., Ichisima, R., and Muntaner-Batle, F. 2002. On super edge-magic graph. Ars Combin, **64,** pages: 81-95.

[3] Harary, F. *Graph Theory.* New London: Wesley, 2007.

[4] Hartsfield, N. dan Ringel, G. 1990. *Pearls in Graph Theory*. Boston – San Diego – New York – London: Academic Press.

[5] Krivelevich, M and Yuster, R. 2009. *The Rainbow Connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree*. School of Mathematics, Tel Aviv University.

[6] Li, X. and Sun, Y. *Rainbow Connection of Graphs-A survey*. ArXiv: 1101.5747v2[math.CO], 2011.

[7] Maryati, T. K., Salman, A. N. M., Baskoro, E. T., Ryan, J., dan Miller, M. 2010. *On H-supermagic Labelings for Certain Shackles and Amalgamation of a Connected Graph.* Jurnal: Utilitas Mathematica. **83,** pages:333-342.

[8] Munir, R. 2009. *Matematika Diskrit Edisi 3*. Bandung: Informatika Bandung.