Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 17 Nomor 1 2017, 17 – 22
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

HUBUNGAN MODEL CAMPURAN TERKENDALA EKSPLISIT DAN IMPLISIT

(*Relationship of Explicitly and Implicitly Constrained Mixed Model*)

Yuliani Setia Dewi

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember

Abstract. In linear models with independent observations, parameter constraints are usually handled by transforming the explicitly constrained model to implicitly constrained model, that takes the form of reduced-parameter. In this paper will be proofed that in mixed linear models (can used to analyze longitudinal data), explicitly constrained mixed model equivalent to the implicitly constrained mixed model with using general solution for linear equality constrains on the parameter

Keywords: Constraint, Explicitly Constrained Model, Implicitly Constrained Model, Linear Mixed Model
MSC2020: 62J05

1. Pendahuluan

Sebuah studi melibatkan 27 anak, 16 laki-laki dan 11 perempuan. Dari masing-masing anak tersebut diukur jarak (mm) dari pusat bawah otak ke celah bagian belakang rahang atas. Pengukuran dilakukan pada umur 8, 10, 12 dan 14 tahun. Yang ingin diketahui dari studi tersebut adalah : pertama, apakah dengan bertambahnya waktu rata-rata jarak tersebut lebih besar laki-laki daripada perempuan?; kedua, apakah rata-rata tingkat perubahannya sama untuk laki-laki dan perempuan. Untuk mengetahui hal-hal tersebut, model linier umum dapat kita gunakan. $Y = X\beta + e$, dengan Y adalah vektor jarak (mm) dari pusat bawah otak ke celah bagian belakang rahang atas, X adalah matriks rancangan yang mengandung variabel bebas X_1:umur dan X_2 : jenis kelamin, β adalah vektor parameter tak diketahui dan e adalah vektor galat. Akan tetapi model tersebut bukanlah model yang memadai apabila kita ingin melakukan pendugaan untuk masing-masing subyek (anak) tertentu atau kita tahu bahwa terdapat keragaman yang besar pada respon yang tidak dapat dijelaskan oleh variabel bebas yang ada. Untuk hal-hal seperti ini kita dapat memodifikasi model tersebut menjadi model linier campuran $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Zd} + \boldsymbol{e}$ dengan Y adalah vektor jarak (mm) dari pusat bawah otak ke celah bagian belakang rahang atas, X adalah matriks rancangan yang mengandung variabel bebas X_1:umur dan X_2 : jenis kelamin, Z adalah matriks rancangan yang berkaitan dengan efek acak, yang mengandung variabel bebas umur, β adalah vektor parameter efek tetap, d adalah vektor parameter efek acak dan e

adalah vektor galat. Jadi model linier campuran merupakan suatu model yang selain mempunyai efek tetap dalam model, juga terdapat efek acak di dalamnya. Model ini kadang-kadang juga dinamakan model multilevel atau model berhirarki.

Dalam model linier terkadang terdapat hubungan linier di antara parameter, misalnya hubungan tersebut dinyatakan dengan $\boldsymbol{R_1\beta} = \boldsymbol{r}$ dan $\boldsymbol{R_2 d} = \boldsymbol{0}$, dengan $\boldsymbol{R_1}$ dan $\boldsymbol{R_2}$ adalah matriks diketahui dan $\boldsymbol{r}$ adalah vektor diketahui. Hubungan ini merupakan bagian dari model yang dinamakan batasan model atau kendala untuk mendapatkan solusi suatu model.

Berkaitan dengan hal-hal tersebut di atas, tulisan ini akan membahas model linier umum campuran (General Linear Mixed Model) dengan kendala persamaan linier, yaitu akan ditunjukkan bahwa model campuran terkendala eksplisit ekuivalen dengan model campuran terkendala implisit, dengan menggunakan solusi umum kendala persamaan linier parameter.

2. Hasil dan Pembahasan

2.1. Model Linier Umum Terkendala

Misal model linier umum dinyatakan sebagai berikut : $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{e}$ dengan $\boldsymbol{Y}$ adalah vektor respon yang berukuran N x 1 dan $\mathbf{e} \sim N_N(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I_N})$. Asumsikan $\boldsymbol{X}$ adalah matriks rancangan berukuran N x p dengan $r(\mathbf{X})=p$, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor parameter tak diketahui berukuran p x 1. Kendala linier parameter dinyatakan dengan $\boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{r}$, dengan $\boldsymbol{R}$ adalah matriks diketahui berukuran c x p yang berpangkat c ($c \leq p$) dan $\boldsymbol{r}$ adalah vektor diketahui berukuran c x 1.

Dalam model linier dengan observasi-observasi bebas, kendala parameter biasanya diatasi dengan transformasi model terkendala eksplisit ke dalam model terkendala implisit yang mengambil bentuk suatu parameter tereduksi, model tak terkendala (Searle,1971 ; Rao, 1973; Hocking, 1985)

2.2. Model Campuran Terkendala Eksplisit

Model campuran dengan kendala persamaan linier parameter untuk $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ dengan k adalah jumlah unit sampel bebas (subyek) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y_i} = \boldsymbol{X_i\beta} + \boldsymbol{Z_i d_i} + \boldsymbol{e_i} \qquad (1)$$

dengan kendala $\boldsymbol{R_1\beta} = \boldsymbol{r}$ dan $\boldsymbol{R_2 d_i} = \boldsymbol{0}$, asumsi $\boldsymbol{R_1\beta}=\boldsymbol{r}$ merupakan persamaan konsisten (lihat Searle, 1982 untuk diskusi kekonsistenan). $\boldsymbol{Y_i}$ adalah suatu vektor n_i x 1 dari n_i observasi pada subyek ke-i, $\boldsymbol{X_i}$ adalah matriks rancangan diketahui berukuran n_i x p berpangkat p untuk subyek ke-i. Vektor $\boldsymbol{\beta}$ adalah parameter efek tetap tak diketahui berukuran p x 1, $\boldsymbol{Z_i}$ adalah matriks rancangan subyek ke-i diketahui yang berkaitan dengan efek acak $\boldsymbol{d_i}$ berukuran n_i x q (berpangkat q). $\boldsymbol{d_i}$ adalah vektor parameter acak individu tak diketahui

Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika Volume 17 Nomor 1 2017, 17 – 22
https://jurnal.unej.ac.id/index.php/MIMS/index ISSN 1411-6669

berukuran q x 1, $\boldsymbol{e_i}$ adalah vektor n_i x 1 dari komponen galat acak, $\boldsymbol{R_1}$ adalah matriks diketahui c_1 x p berpangkat c_1<p, $\boldsymbol{R_2}$ adalah matriks diketahui berukuran c_2 x q berpangkat c_2<q, dan $\boldsymbol{r}$ adalah vektor c_1 x 1 diketahui.

Asumsi untuk model campuran di atas adalah d_i~N(0,D) ; e_i~N(0,σ^2Vi);

$$\boldsymbol{V}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_i\\ \boldsymbol{e}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \sigma^2\boldsymbol{V}_i\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{V}$(.) adalah varian kovarian. Matriks kovarian untuk galat acak adalah $\sigma^2\boldsymbol{V_i}$= var($\boldsymbol{e}_i$) mempunyai ukuran n_ixn_i, yang pada umumnya dan juga dalam tulisan ini $\sigma^2\boldsymbol{V_i}=\sigma^2\boldsymbol{I}$. σ^2 adalah skalar, parameter varian subyek. Matriks kovarian untuk koefisien efek acak $\boldsymbol{D}$=var($\boldsymbol{d}_i$) ,mempunyai dimensi qxq. Dengan menggunakan asumsi-asumsi tersebut, V($\boldsymbol{Y_i}$) dapat dinyatakan dengan :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_i &= \mathrm{var}(\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{d}_i+\boldsymbol{e}_i)\\ &= \mathrm{var}(\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\beta})+\mathrm{var}(\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{d}_i)+\mathrm{var}(\boldsymbol{e}_i)\\ &= \mathrm{var}(\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{d}_i)+\mathrm{var}(\boldsymbol{e}_i)\\ &= \boldsymbol{Z}_i\ \mathrm{var}(\boldsymbol{d}_i)\boldsymbol{Z}_i'+\mathrm{var}(\boldsymbol{e}_i)\\ &= \boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{D}\boldsymbol{Z}_i'+\sigma^2\boldsymbol{I}_{n_i}\end{aligned}$$

2.3. Model Campuran Terkendala Implisit

Model campuran terkendala implisit untuk $i \in \{1, 2,\dots,k\}$ dengan k adalah jumlah unit sampel bebas (subyek) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y}_{R_i}=\boldsymbol{X}_{R_i}\boldsymbol{\beta}_R+\boldsymbol{Z}_{R_i}\boldsymbol{d}_{R_i}+\boldsymbol{e}_i \quad (2)$$

$\boldsymbol{Y_{Ri}}$ adalah suatu vektor n_i x 1 dari ni observasi pada subyek ke-i, $\boldsymbol{X_i}$ adalah matriks rancangan diketahui berukuran n_i x (p-c_1) berpangkat (p-c_1) untuk subyek ke-i. Vektor $\boldsymbol{\beta_R}$ adalah parameter efek tetap takdiketahui berukuran (p-c_1) x 1, $\boldsymbol{Z_{Ri}}$ adalah matriks rancangan subyek ke-i diketahui yang berkaitan dengan efek acak $\boldsymbol{d_{Ri}}$ berukuran n_i x (q-c_2) (berpangkat q). $\boldsymbol{d_{Ri}}$ adalah vektor parameter acak individu takdiketahui berukuran (q-c_2) x 1, $\boldsymbol{e}_i$ adalah vektor n_i x 1 dari komponen galat acak.

Asumsi untuk model campuran terkendala implisit adalah $\boldsymbol{d_{Ri}}$~N($\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{D_R}$) ; $\boldsymbol{e_i}$~N($\boldsymbol{0}$,σ^2_R $\boldsymbol{I_i}$), sehingga $\boldsymbol{V}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_{R_i}\\ \boldsymbol{e_i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_R & 0\\ 0 & \sigma_R{}^2\boldsymbol{I}_i\end{bmatrix}$

V(.) adalah varian kovarian, matriks kovarian untuk galat acak $\sigma^2_R\boldsymbol{I_i}$= var($\boldsymbol{e_i}$) mempunyai ukuran n_ixn_i. Matriks kovarian untuk koefisien efek acak $\boldsymbol{D_R}$=var($\boldsymbol{d}_i$) , mempunyai dimensi (q-c_2)x(q-c_2). σ^2_R adalah skalar, parameter varian subyek.

2.4. Transformasi Model Campuran Terkendala Eksplisit ke Model Campuran Terkendala Implisit

Pendugaan parameter untuk model campuran terkendala dapat dilakukan melalui transformasi model campuran terkendala eksplisit yang didefinisikan pada (1) ke model campuran terkendala implisit (2) dengan menggunakan solusi umum dari $\boldsymbol{R_1\beta}=\boldsymbol{r}$ dan $\boldsymbol{R_2 d_i} = \boldsymbol{0}$ untuk semua i $\in$ {1, 2,…,k}.

Teorema : Model campuran terkendala implisit (2) ekuivalen dengan model campuran terkendala eksplisit (1).

Lemma : Pada model yang didefinisikan pada (1), jika $\boldsymbol{R_1}$ mempunyai p kolom dan $\boldsymbol{R_1}^+$ adalah matriks kebalikan umum dari $\boldsymbol{R_1}$, maka persamaan konsisten $\boldsymbol{R_1\beta}= \boldsymbol{r}$ mempunyai solusi :

$$\boldsymbol{\beta = R_1^{+} r + (R_1^{+} R_1 - I) h_1} \quad (3)$$

untuk beberapa vektor sembarang $\boldsymbol{h_1}$ yang berukuran p (untuk bukti lemma ini lihat Searle,1982)

Penguraian nilai singular $\boldsymbol{R_1}$ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$R_1 = P_1[\Delta_1 \quad 0]Q_1'$$

dengan $\boldsymbol{P}_1(c_1 x c_1)$ dan $\boldsymbol{Q}_1(pxp)$ adalah ortonormal dan $\boldsymbol{\Delta_1}(c_1 \text{ x } c_1)$ adalah matriks diagonal nilai eigen tak nol (positif) dari $\boldsymbol{R_1 R_1}'$dan $\boldsymbol{R_1' R_1}$ (Searle, 1982). Dan matriks kebalikan Moore Penrose dari $\boldsymbol{R_1}$ adalah $\boldsymbol{R_1^{+} = Q_{11}}\Delta_1^{-1}\boldsymbol{P_1'}$ dengan $\boldsymbol{Q_{11}}$ (p xc_1) didefinisikan dengan $\boldsymbol{Q_1 = [Q_{11} \quad Q12]}$, $\boldsymbol{Q}_{12}$ adalah matriks berukuran p x (p-c_1). Matriks $\boldsymbol{R_1}^+$ dikenal sebagai matriks kebalikan umum Moore Penrose dari $\boldsymbol{R_1}$. Dengan mensubtitusikan $\boldsymbol{Q_{11}}\Delta_1^{-1}\boldsymbol{P_1'}$ untuk $\boldsymbol{R_1}^+$ pada (2.4.1) dan menetapkan $\boldsymbol{\beta_R} = \boldsymbol{Q_{12}' h_1}$, maka :

$$\boldsymbol{\beta = Q_{11} \Delta_1^{-1} P_1' r + Q_{12} \beta_R} \quad (4)$$

Dari lemma, solusi untuk $\boldsymbol{d_i}$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{d_i = (R_2^{+} R_2 - I) h_{2i}} \quad (5)$$

Dengan cara yang sama seperti di atas, penguraian nilai singular untuk $\boldsymbol{R_2}$ dapat diperoleh sebagai berikut : $\boldsymbol{R_2 = P_2[\Delta_2 \quad 0]Q_2'}$ dengan $\boldsymbol{P_2}$ (c_2xc_2) dan $\boldsymbol{Q_2}$(qxq) matriks orthogonal dan $\boldsymbol{\Delta_2}$(c_2xc_2) adalah matriks diagonal nilai eigen tak nol (positif) dari $\mathbf{R_2'R_2}$ dan $\boldsymbol{R_2 R_2'}$. Dengan menggunakan partisi dari $\boldsymbol{Q_2 = [Q_{21} \quad Q_{22}]}$, matriks kebalikan umum Moore Penrose dari $\boldsymbol{R_2}$ dapat dinyatakan sebagai $\boldsymbol{R_2^{+} = Q_{21}}\Delta_2^{-1}\boldsymbol{P_2'}$. dengan mensubtitusikan $\boldsymbol{Q_{21}\Delta_2^{-1}P_2'}$ untuk $\boldsymbol{R_2}^+$ pada (4) dan menetapkan $\boldsymbol{d_{R_i} = Q_{22}' h_{2i}}$, maka:

$$\boldsymbol{d_i = Q_{22} d_{R_i}} \quad (6)$$

Dari (4) dan (6) untuk i$\in$ {1,2,…,k}, maka kita peroleh :

$$\boldsymbol{Y_i - X_i Q_{11} \Delta_1^{-1} P_1' r = X_i Q_{12} \beta_R + Z_i Q_{22} d_{R_i} + e_i}$$

Apabila $\boldsymbol{Y_{Ri}}$, $\boldsymbol{X_{Ri}}$, dan $\boldsymbol{Z_{Ri}}$ didefinisikan dengan

$$\boldsymbol{Y_{R_i}} = \boldsymbol{Y_i} - \boldsymbol{X_i Q}_{11}\Delta_1^{-1}\boldsymbol{P}_1'\boldsymbol{r} = \boldsymbol{Y_i} - \boldsymbol{X_i R}_1^{+}\boldsymbol{r}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{X_{R_i}} = \boldsymbol{X_i Q}_{12}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{Z_{R_i}} = \boldsymbol{Z_i Q}_{22} \tag{9}$$

maka persamaan di atas sama dengan model campuran terkendala implisit (3), untuk i ∈ {1, 2,…,k}atau $\boldsymbol{Y_{R_i} = X_{R_i} \beta_R + Z_{R_i} d_{R_i} + e_i}$.

Hal-hal khusus dari teorema :

a. Hanya ada kendala pada efek tetap dan tidak ada kendala pada efek acak. Dalam hal seperti ini, persamaan (9) dinyatakan dengan $\boldsymbol{Z_{R_i}} = \boldsymbol{Z_i}$, untuk persamaan (7) dan (8) tetap sama.

b. Hanya ada kendala pada efek acak dan tidak ada kendala pada efek tetap. Untuk hal seperti ini, persamaan (7) dinyatakan dengan $\boldsymbol{Y_{R_i}} = \boldsymbol{Y_i}$ dan persamaan (8) dinyatakan dengan $\boldsymbol{X_{R_i}} = \boldsymbol{X_i}$, untuk persamaan (9) tetap sama.

Uraian-uraian di atas memperlihatkan bahwa penduga parameter pada model campuran terkendala eksplisit (1)dapat diperoleh dengan menggunakan penduga dari model campuran terkendala implisit dengan bantuan matriks $\boldsymbol{Q_{12}}$, $\boldsymbol{Q_{22}}$ dan $\boldsymbol{R_1}^{+}$, yaitu $\boldsymbol{\hat{\beta} = R_1^{+} r + Q_{12} \hat{\beta}_R}$; $\boldsymbol{\hat{D} = Q_{22} \hat{D}_R Q_{22}'}$ dan $\boldsymbol{\hat{d}_i = Q_{22} \hat{d}_{R_i}}$.Dari teorema serta bukti di atas, maka dapat disimpulkan bahwa model linier umum campuran terkendala (1) dapat ditransformasi ke dalam model campuran terkendala implisit yang mengambil bentuk tak terkendala (2) (model campuran parameter tereduksi) atau dengan kata lain bahwa model campuran terkendala eksplisit ekuivalen dengan model campuran terkendala implisit (Edwards, et al, 2001).

3. Kesimpulan

Dengan menggunakan pendekatan solusi umum dari kendala persamaan linier parameter, model linier campuran terkendala eksplisit equivalen dengan model linier campuran terkendala implisit.

Daftar Pustaka

[1] Edwards *et al.* (2001), Linear Equality Constraints in the General Linear Mixed Model. *Biometrics,* **57** : 1185 – 1190

[2] Hocking, R.R., (1985) *The Analysis of Linear Models*. Monterey, California: Brooks/Cole.

[3] Rao, C.R., (1973), *Linear Statistical Inference and Its Applications*. New York : Wiley.

[4] Searle, S.R., (1971), *Linear Models.* New York: Wiley

[5] Searle, S.R., (1982), *Matrix Algebra Useful for Statistics*. New York:Wiley.